

УДК 539.3

О НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН¹

В.Н. Тарасов, В.Ю. Андрюкова

Исследуются линейные и нелинейные колебания прямоугольных пластин. Рассматривается разностная схема для решения динамических уравнений Кармана. Анализируются результаты численных экспериментов, проводится сравнение решений, полученных на основе линейного уравнения колебаний пластин, и решения, полученного путем численного анализа нелинейных уравнений Кармана.

Введение

Трудно назвать такую область техники, в которой не была бы актуальной проблема изучения упругих колебаний. В большинстве случаев для изучения колебаний используются линейные дифференциальные уравнения. Однако, часто необходимо использовать нелинейные уравнения (особенно при изучении колебаний пластин и оболочек). В некоторых задачах теории пластин (а также и оболочек) пользуются теорией жестких пластинок (оболочек), пренебрегающей напряжениями в срединной поверхности (линейная теория); в других задачах учитываются одновременно напряжения в срединной поверхности и напряжения изгиба (нелинейная задача). С точки зрения физики нелинейность колебаний характеризуется ангармоничностью и неизохронностью [1]. Однако, учет влияния нелинейных слагаемых иногда приводит к неожиданным эффектам: например, эффект возврата Ферми-Пасты-Улама

¹Работа выполнена при финансовой поддержке федерального агентства по науке и инновации ГК № 02.740.11.0618

(ФПУ) ([5]). Влияние напряжений в срединной поверхности на свободные колебания пластин к настоящему времени изучено все еще недостаточно, по-видимому, это связано с трудностями анализа вычислительных экспериментов, хотя сейчас разработаны достаточно эффективные численные методы решения нелинейных уравнений.

Метод конечных разностей для решения нелинейных уравнений колебаний прямоугольных пластин

Известно, что учет напряжений в срединной поверхности в теории пластин приводит к уравнениям Кармана

$$\begin{cases} \tilde{D}\Delta\Delta w = -\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\partial y}, \\ \frac{1}{E}\Delta\Delta\varphi = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \end{cases} \quad (1)$$

где $w = w(x, y, t)$ - прогиб, $\varphi = \varphi(x, y, t)$ - функция напряжений, $D = \frac{Eh_0^3}{12(1-\nu^2)}$ - цилиндрическая жесткость пластины, E - модуль Юнга, ν - коэффициент Пуассона, $\tilde{D} = D/h_0$, h_0 - толщина пластины, x, y - координаты точек срединной поверхности пластины, t - время,

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \Delta\Delta w = \frac{\partial w^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial y^2\partial x^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}$$

– операторы Лапласа и бигармонический оператор. Предполагается, что пластина является прямоугольной, т.е. $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$. Предположим, что пластина свободно оперта по своим краям и точки срединной поверхности свободно перемещаются в координатной плоскости (x, y) . Тогда граничные условия можно записать ([2]):

$$\begin{cases} w(0, y, t) = w(a, y, t) = 0, & \frac{\partial^2 w(0, y, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w(a, y, t)}{\partial x^2} = 0, \\ w(x, 0, t) = w(x, b, t) = 0, & \frac{\partial^2 w(x, 0, t)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w(x, b, t)}{\partial y^2} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi(0, y, t)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varphi(a, y, t)}{\partial y^2} = 0, & \frac{\partial^2 \varphi(0, y, t)}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 \varphi(a, y, t)}{\partial x\partial y} = 0, \\ \frac{\partial^2 \varphi(x, 0, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi(x, b, t)}{\partial x^2} = 0, & \frac{\partial^2 \varphi(x, 0, t)}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 \varphi(x, b, t)}{\partial x\partial y} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Граничные условия (3) означают отсутствие нормальных и касательных напряжений на краях пластины.

Кроме того, должны быть заданы начальные условия

$$w(x, y, 0) = u(x, y), \quad \frac{dw(x, y, 0)}{dt} = v(x, y). \quad (4)$$

Для конечномерной аппроксимации задачи (1) - (3) применим метод сеток. Введем обозначения:

$$x_i = ih_x, \quad i \in 0..M, \quad y_j = jh_y, \quad j \in 0..N,$$

$$w_{ijk} = w(x_i, y_j, t_k), \quad \varphi_{ijk} = \varphi(x_i, y_j, t_k), \quad h_x = \frac{a}{M}, \quad h_y = \frac{b}{N}.$$

Производные аппроксимируем конечноразностными отношениями

$$\frac{\partial w^2(x_i, y_j, t_k)}{\partial x^2} \approx \frac{w_{i+1,j,k} - 2w_{i,j,k} + w_{i-1,j,k}}{h_x^2} = L_1(w_{i,j,k}), \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 w(x_i, y_j, t_k)}{\partial y^2} = \frac{w_{i,j+1,k} - 2w_{i,j,k} + w_{i,j-1,k}}{h_y^2} = L_2(w_{i,j,k}), \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 w(x_i, y_j, t_k)}{\partial x \partial y} \approx \frac{w_{i+1,j+1,k} - w_{i-1,j,k} - w_{i,j-1,k} + w_{i-1,j-1,k}}{4h_x h_y} = L_3(w_{i,j,k}). \quad (7)$$

Для упрощения формул и расчетных схем далее будем считать, что $h_x = h_y = h$, (этого всегда можно добиться за счет выбора чисел M и N , при условии, что a и b соизмеримы). Тогда сеточный бигармонический оператор будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \widetilde{\Delta\Delta} w_{i,j,k} = \widetilde{\Delta\Delta} w(x_i, y_j, t_k) = & \frac{1}{h^4} (20w_{i,j} - 8(w_{i,j+1,k} + w_{i+1,j,k} + w_{i-1,j} + w_{i,j-1,k}) \\ & + 2(w_{i+1,j+1,k} + w_{i+1,j+1,k} + w_{i-1,j-1,k} + w_{i-1,j-1,k}) + \\ & + (w_{i,j+2,k} + w_{i+2,j,k} + w_{i-2,j,k} + w_{i,j-2,k})). \end{aligned} \quad (8)$$

Поскольку функции прогиба и напряжений зависят также и от времени t , то неявная разностная схема для системы уравнений (1) - (3) будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \widetilde{\Delta\Delta} \varphi_{i,j,k+1} = E \left(\frac{w_{i+1,j+1,k+1} - w_{i-1,j,k+1} - w_{i,j-1,k+1} + w_{i-1,j-1,k+1}}{4h^2} \right)^2 - \\ - E \frac{w_{i+1,j,k+1} - 2w_{i,j,k+1} + w_{i-1,j,k+1}}{h^2} \times \frac{w_{i,j+1,k+1} - 2w_{i,j,k+1} + w_{i,j-1,k+1}}{h^2}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{D}{h_0} \widetilde{\Delta\Delta} w_{i,j,k+1} = -\rho \frac{w_{i,j,k+1} - 2w_{i,j,k} + w_{i,j,k}}{h_t^2} + \\ + \frac{\varphi_{i,j+1,k+1} - 2\varphi_{i,j,k+1} + \varphi_{i,j-1,k+1}}{h^2} \times \frac{w_{i+1,j,k+1} - 2w_{i,j,k} + w_{i-1,j,k+1}}{h^2} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{w_{i,j+1,k+1} - 2w_{i,j,k+1} + w_{i,j-1,k+1}}{h^2} \times \frac{\varphi_{i+1,j,k+1} - 2\varphi_{i,j,k+1} + \varphi_{i-1,j,k+1}}{h^2} - \\
 & 2 \frac{w_{i+1,j+1,k+1} - w_{i-1,j,k+1} - w_{i,j-1,k+1} + w_{i-1,j-1,k+1}}{4h^2} \times \\
 & \times \frac{\varphi_{i+1,j+1,k+1} - \varphi_{i-1,j,k+1} - \varphi_{i,j-1,k+1} + \varphi_{i-1,j-1,k+1}}{4h^2}. \quad (10)
 \end{aligned}$$

Уравнения (9) - (10) справедливы при

$$2 \leq i \leq M - 2, \quad 2 \leq j \leq N - 2, \quad k \geq 3.$$

Граничные условия (2) дают равенства

$$w_{0,j,k} = w_{M,j,k} = 0, \quad w_{2,j,k} = 2w_{1,j,k}, \quad w_{M-2,j,k} = 2w_{M-1,j,k}, \quad 0 \leq j \leq N, \quad (11)$$

$$w_{i,0,k} = w_{i,N,k} = 0, \quad w_{i,2,k} = 2w_{i,1,k}, \quad w_{i,N-2,k} = 2w_{i,N-1,k}, \quad 0 \leq i \leq M, \quad (12)$$

а граничные условия (3) дают

$$\varphi_{0,j,k} - 2\varphi_{1,j,k} + \varphi_{2,j,k} = 0, \quad \varphi_{M,j,k} - 2\varphi_{M-1,j,k} + \varphi_{M-2,j,k} = 0, \quad 0 \leq j \leq N. \quad (13)$$

$$\varphi_{i,0,k} - 2\varphi_{i,1,k} + \varphi_{i,2,k} = 0, \quad \varphi_{i,N,k} - 2\varphi_{i,N-1,k} + \varphi_{i,N-2,k} = 0, \quad 0 \leq i \leq M. \quad (14)$$

$$\varphi_{i+1,2,k} + \varphi_{i-1,0,k} - \varphi_{i-1,2,k} - \varphi_{i+1,0,k} = 0, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{i-1,N-2,k} + \varphi_{i-1,N,k} - \varphi_{i+1,N-2,k} + \varphi_{i-1,N,k} = 0, \quad (16) \\ 1 \leq i \leq M - 1. \end{aligned}$$

$$\varphi_{2,j+1,k} + \varphi_{0,j-1,k} - \varphi_{0,j+1,k} - \varphi_{2,j-1,k} = 0, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{M,j+1,k} + \varphi_{M,j-1,k} - \varphi_{M-2,j-1,k} - \varphi_{M,j-1,k} = 0, \quad (18) \\ 1 \leq j \leq N - 1. \end{aligned}$$

Граничные условия (15) - (18) не все являются различными. Одни и те же равенства получаются, если в (15) подставить $i = 1$, а в (17) $j = 1$, также (16) при $i = M - 1$ совпадает с (18) при $j = N - 1$, (16) при $i = 1$ совпадает с (17) при $j = N - 1$, (16) при $i = M - 1$ совпадает с (17) при $j = N - 1$. Это связано с тем, что функция $\varphi(x, y)$ из уравнений (1) может быть определена с точностью до произвольной аффинной

функции двух переменных вида $\varphi_0(x, y) = a + bx + cy$. Ясно, что можно потребовать выполнение равенств

$$\varphi_{0,0,k} = \varphi_{M,0,k} = \varphi_{0,N,k} = \varphi_{M,N,k} = 0. \quad (19)$$

Строго говоря, можно написать только любые три равенства из четырех, выполнение же четвертого следует из отсутствия касательных напряжений на кромках пластины.

Начальные условия (4) дают равенства

$$w_{i,j,1} = u(x_i, y_j); \quad w_{i,j,2} = w_{i,j,1} + h_t v(x_i, y_j).$$

Пусть уже получены значения

$$\varphi_{i,j,k}; \quad w_{i,j,k}, \quad i \in 0..M, \quad j \in 0..N, \quad k \geq 2.$$

Введем векторы

$$\Phi(k) = \varphi_{i,j,k}, \quad W(k) = w_{i,j,k}, \quad i \in 0..M, \quad j \in 0..N, \quad k \geq 2.$$

Систему уравнений (10) перепишем в виде

$$\begin{aligned} & \frac{D}{h_0} \widetilde{\Delta \Delta} w_{i,j,k+1} + \rho \frac{w_{i,j,k+1}}{h_t^2} = \rho \frac{2w_{i,j,k} - w_{i,j,k-1}}{h_t^2} + \\ & + \frac{\varphi_{i,j+1,k+1} - 2\varphi_{i,j,k+1} + \varphi_{i,j-1,k+1}}{h^2} \times \frac{w_{i+1,j,k+1} - 2w_{i,j,k} + w_{i-1,j,k+1}}{h^2} + \\ & + \frac{w_{i,j+1,k+1} - 2w_{i,j,k+1} + w_{i,j-1,k+1}}{h^2} \times \frac{\varphi_{i+1,j,k+1} - 2\varphi_{i,j,k+1} + \varphi_{i-1,j,k+1}}{h^2} - \\ & 2 \frac{w_{i+1,j+1,k+1} - w_{i-1,j,k+1} - w_{i,j-1,k+1} + w_{i-1,j-1,k+1}}{4h^2} \times \\ & \times \frac{\varphi_{i+1,j+1,k+1} - \varphi_{i-1,j,k+1} - \varphi_{i,j-1,k+1} + \varphi_{i-1,j-1,k+1}}{4h^2} \end{aligned} \quad (20)$$

Обозначим через

$$NL_{ij}(w_{i,j,k+1}, \varphi_{i,j,k+1}; w_{i,j,k}, w_{i,j,k-1})$$

– правую часть системы уравнений (20), а через

$$\widetilde{NL}_{ij}(w_{i,j,k+1}, \varphi_{i,j,k+1})$$

– правую часть системы уравнений (9); ($NL_{ij}, \widetilde{NL}_{ij}$ нелинейные операторы).

Тогда итерационная схема будет иметь вид:

$$\frac{D}{h_0} \widetilde{\Delta} \Delta w_{i,j,k+1}^{l+1} + \rho \frac{w_{i,j,k+1}^{l+1}}{h_t^2} = NL_{ij}(w_{i,j,k+1}^l, \varphi_{i,j,k+1}^l; w_{i,j,k}, w_{i,j,k-1}), \quad (21)$$

$$\widetilde{\Delta} \Delta \varphi_{i,j,k+1}^{l+1} = \widetilde{N} \widetilde{L}_{ij}(w_{i,j,k+1}^l, \varphi_{i,j,k+1}^l), \quad (22)$$

$$2 \leq i \leq M - 2, \quad 2 \leq j \leq N - 2.$$

Причем, должны быть выполнены граничные условия (11) - (20), т.е. $w_{i,j,k+1}^{l+1}$ должны удовлетворять равенствам (11) - (12), а $\varphi_{i,j,k+1}^{l+1}$ равенствам (13) - (20).

Из особенностей итерационной схемы можно отметить следующее: уравнения (23) решаются относительно неизвестных $w_{i,j,k+1}^{l+1}$, а из уравнений (24) находим $\varphi_{i,j,k+1}^{l+1}$; затем найденные значения подставляем в правые части уравнений (23) - (24), т.е. системы линейных уравнений для определения прогиба w и функции напряжений $\varphi_{i,j,k+1}^{l+1}$ на каждой итерации решаются независимо.

Обсуждение результатов.

Если в уравнениях (1) положить $\varphi = 0$, то получим линейное уравнение, описывающее поперечные колебания пластины:

$$\widetilde{D} \Delta \Delta w = -\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (23)$$

Уравнение (23) может быть решено методом разделения переменных. Его решение представимо в виде ряда

$$w = \sum_{mn} (A_{mn} \sin(\omega_{mn}t) + B_{mn} \cos(\omega_{mn}t)) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \quad (24)$$

В (24) m и n пробегает значения от 1 до ∞ ,

$$\omega_{mn} = c_0^{-1/2} \left(\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right), \quad (25)$$

ω_{mn} - частота собственных колебаний, $c_0 = \frac{\rho h_0}{D}$. Функции

$$w_{mn} = \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

являются собственными функциями бигармонического оператора (описывают собственные формы колебаний пластины).

Коэффициенты A_{mn} и B_{mn} определяются равенствами

$$A_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b v(x, y) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dx dy, \quad (26)$$

$$B_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b u(x, y) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dx dy. \quad (27)$$

Для колеблющейся пластины определена полная энергия

$$U = \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\tilde{D}}{2} (\Delta w)^2 + \frac{\rho}{2} \dot{w}^2 \right) dx dy, \quad (28)$$

которая не зависит от времени (закон сохранения энергии). Подставляя (24) в (28), с учетом (25) получим

$$U = \frac{ab}{4} \frac{\tilde{D}}{2} \sum_{mn} \left(\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right)^2 (A_{mn}^2 + B_{mn}^2).$$

Таким образом, в линейном случае сохраняется не только полная энергия, но и не происходит перераспределения энергии между модами собственных колебаний, иными словами, пластину можно рассматривать, как бесконечный набор не взаимодействующих между собой линейных осцилляторов.

Для проведения численных экспериментов были выбраны следующие параметры:

$$h_0 = 0.2; \quad \rho = 0.3; \quad E = 5000; \quad a = 40; \quad b = 40; \quad \nu = 0.3.$$

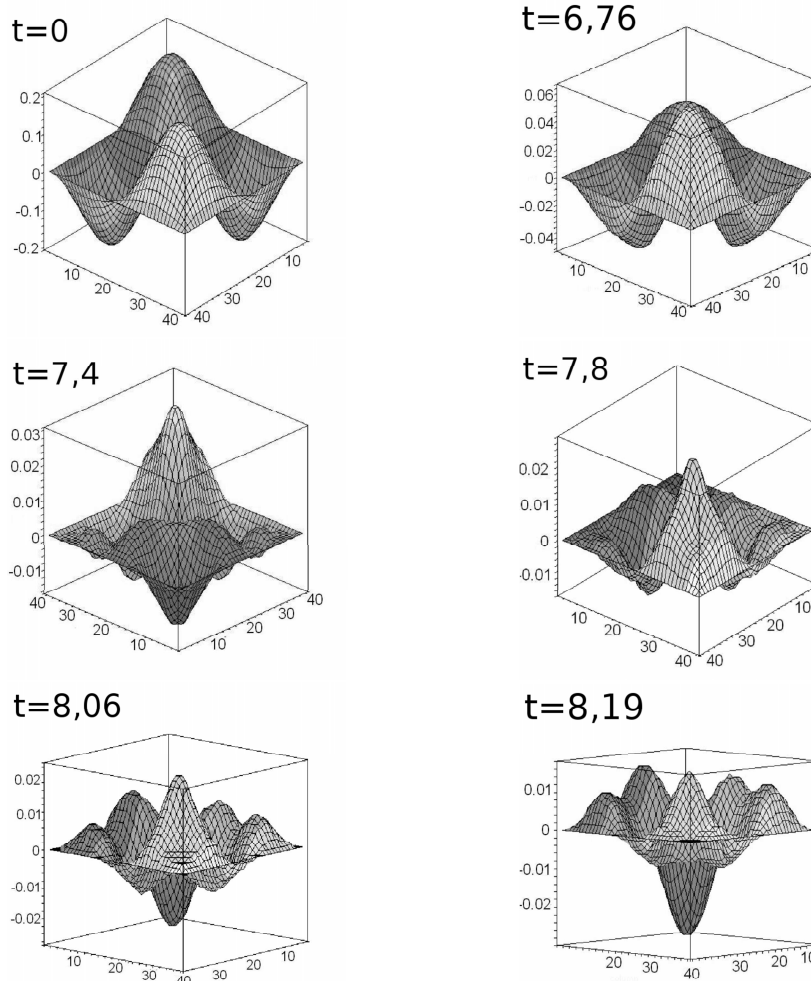
Далее решение нелинейной задачи будем обозначать через $\tilde{w}(x, y, t)$. В качестве начальных условий было принято

$$w(x, y, 0) = \tilde{w}(x, y, 0) = 0.2 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \quad \dot{w}(x, y, 0) = \dot{\tilde{w}}(x, y, 0) = 0.$$

График этой функции представлен на рис. 1 ($t = 0$) При таких значениях параметров частота и период линейных колебаний равны ($m = 2, n = 2$.)

$$\omega_{mn} = 0.38; \quad T = \frac{2\pi}{\omega_{mn}} = 16.29.$$

Поскольку $w(x, y, 0)$ является собственной функцией линейной задачи, то $w(x, y, t) = \cos(\omega_{mn} t) w(x, y, 0)$, т.е. прогиб пластины, сохраняет свою форму, изменяется лишь величина этого прогиба.



Иначе ведет себя решение нелинейной задачи. Вначале энергия пластины перераспределяется между несколькими близкими модами w_{mn} , затем, пройдя целый ряд последовательных стадий, (см. рис.1 $t = 6.76, t = 7.8, t = 8.06, t = 8.19, t = 8.84, t = 9.36$) пластина при $t = 13$ восстанавливается в исходном положении (повернутом на угол $\frac{\pi}{2}$), а приблизительно при $t = 26$ исходное положение восстанавливается полностью.

Восстановление начального приближения в нелинейных системах впервые наблюдали С. Улам и Д. Паста, ([5]), которые по предложению физика Э. Ферми, рассматривали ангармоническую цепочку из 32 грузиков, соединенных пружинами с нелинейной характеристикой (упругие силы при растяжении или сжатии пружины имели вид

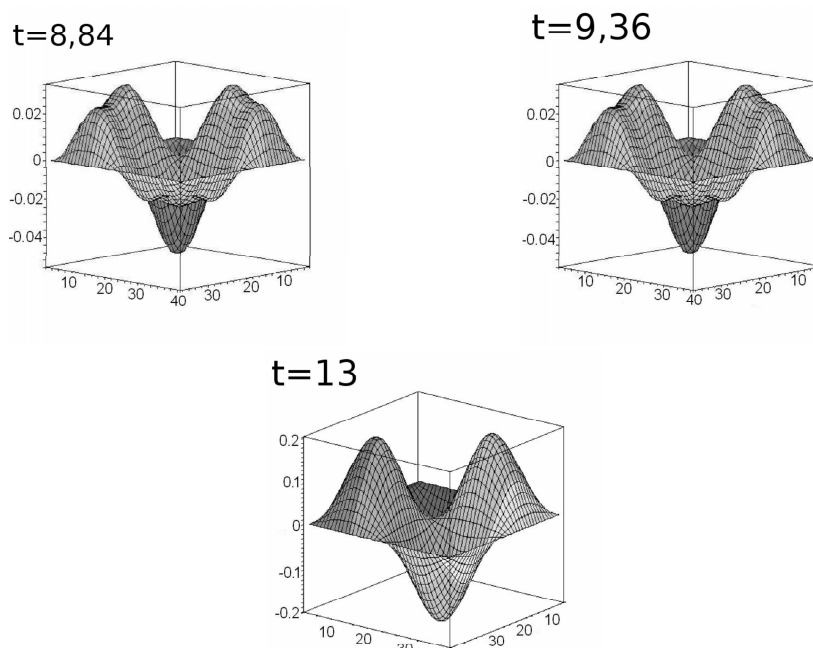


Рис. 1: Нелинейная задача.

$(k\Delta x + \alpha(\Delta x)^2) \Delta x$ – удлинение пружины). Предполагалось, что энергия первоначального возбуждения распределится по всем гармоникам, и установится термодинамическое равновесие (как говорят физики, произойдет термализация системы). Но этого не происходило. Процесс колебаний носил периодический (или почти периодический) характер, первоначальное исходное состояние восстанавливалось с точностью до нескольких процентов. Этот эффект в дальнейшем получил название эффекта Ферми-Пасты-Улама.

Важность изучения эффектов, возникающих в нелинейных колебательных системах, подчеркивается также в работах [1] - [4].

Литература

1. **Пановко Я. Г.** Основы прикладной теории упругих колебаний.// М.: Издательство Машиностроение, 1967. 316 с.
2. **Теребушко О. И.** Основы теории упругости и пластичности.// М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. 320 с.

3. **Вольмир А.С.** Устойчивость деформируемых систем.// М.: Наука, 1967. 984 с.
4. **Паймушин В.Н.** Проблемы геометрической нелинейности и устойчивости в механике тонких оболочек и прямолинейных стержней.// ПММ Т71, 2007. Вып.5. С.880 - 893.
5. **С.Улам.** Нерешенные математические задачи.// М.: Наука, 1964. 168 с.

Summary

Tarasov V.N., Andryukova V.Yu. Of nonlinear fluctuations of rectangular plates.

Linear and nonlinear fluctuations of rectangular plates are researched. The difference scheme for solving the dynamic equations of Karman is considered. The results of numerical experiments are analyzed, solutions obtained on the basis of a linear equations of vibrations of plates and the solutions obtained by numerical analysis of nonlinear Karman equations are compared.

*Отдел математики КНЦ УрО РАН
Сыктывкарский лесной институт*

Поступила 05.05.2010