

УДК 539.3

КОНСТРУКТИВНО-НЕЛИНЕЙНАЯ МЕХАНИКА ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК¹

Е.И. Михайловский, В.Н. Тарасов

Дан обзор основных результатов, полученных авторами и их учениками за последние 20 лет в области конструктивно-нелинейной механики пластин и оболочек. Пояснен общий ход доказательства предложенных авторами метода обобщенной реакции для решения контактных задач со свободной границей и метода локального поиска собственных значений положительно однородных операторов для решения существенно нелинейных спектральных задач. Иллюстрируются алгоритмы локального перебора вариантов в сочетании с их полным перебором на редкой сетке и с движением по параметру жесткости одной из упругих сред. Исследуется влияние учета трансверсальных деформаций в уравнениях механики пластин и оболочек.

Предисловие

Кафедра математического моделирования и кибернетики (ММиК) создана в 1987 году. В 1989 году фактически на ее базе была проведена III Всесоюзная конференция по нелинейной теории упругости, посвященная памяти акад. В.В. Новожилова (12-14 сентября 1989г., г. Сыктывкар), на которой докладами [1-4], можно сказать, задокументированы основные направления фундаментальных исследований кафедры:

- 1) нелинейные модели и методы механики упругих оболочек;
- 2) конструктивно-нелинейная механика стержней, пластин и оболочек;
- 3) математическое моделирование деформирования вязкоупругих структурированных полимерных систем.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 09-01-00178-а

В коллективной монографии [5] среди прочего сказано:

"Значительное внимание уделено новому разделу механики оболочек – конструктивно-нелинейным задачам. Интересные результаты здесь получены Е.И. Михайловским и его учениками. Ими разработаны эффективные методы решения контактных задач со свободной границей [6–9] (*номера ссылок изменены, Е.И.М.*) и задач на устойчивость тонкостенных конструкций с односторонними связями [10–12]."

В данной обзорной статье излагаются основные результаты, полученные в "Сыктывкарском филиале" школы В.В. Новожилова в области конструктивно-нелинейной механики пластин и оболочек за последнее двадцатилетие.

Статья разделена на две части. В 11-м выпуске "Вестника" публикуется первая часть статьи, в которой кратко изложен \mathcal{M} -алгоритм учета трансверсальных деформаций, а затем рассматриваются контактные задачи со свободной границей, где, в частности, исследуется влияние учета названных деформаций.

1. Нелинейная теория жесткогибких оболочек, свободная от гипотез Кирхгофа

1.1. \mathcal{M} -алгоритм учета трансверсальных деформаций в уравнениях кирхгофовских теорий

В нелинейной теории оболочек, основанной на гипотезах Кирхгофа, делается предположение, что радиус-вектор материальной точки до деформации

$$\mathring{\mathbf{R}}(\alpha, \zeta) = \mathring{\mathbf{r}}(\alpha) + \zeta \mathring{\mathbf{n}}(\alpha), \quad (1.1)$$

в актуальной (деформированной) конфигурации можно адекватно представить формулой

$$\mathbf{R}(\alpha, \zeta) = \mathbf{r}(\alpha) + \zeta \mathbf{n}(\alpha). \quad (1.2)$$

Здесь использованы обозначения: $(\alpha^1, \alpha^2, \zeta)$ – лагранжевы координаты; α^1, α^2 – гауссовы координаты срединной поверхности: $\alpha = (\alpha^1, \alpha^2)$; $\zeta \in [-\mathring{h}/2, \mathring{h}/2]$ – трансверсальная координата; $\mathring{\mathbf{r}}(\alpha)$, $\mathbf{r} = \mathring{\mathbf{r}}(\alpha) + \mathbf{u}(\alpha)$ – радиус-векторы точки срединной поверхности оболочки до и после деформации; $\mathbf{u}(\alpha)$ – вектор перемещений; $\mathring{\mathbf{n}}$, \mathbf{n} – нормали к срединной поверхности до и после деформации.

К.Ф.Черных предложил т.н. *квазикирхгофовскую* теорию оболочек [13], предназначенную, прежде всего, для расчета тонкостенных резинотехнических изделий. В этой теории сохранены все гипотезы Кирхгофа, кроме допущения о неизменности толщины оболочки, так как

в случае резиноподобных материалов изменение толщины (т.н. *поперечное обжатие*) может быть существенным. В квазикирхгофской теории принято допущение, что положение материальной точки после деформации можно представить зависимостью („с“ – Chernykh)

$$\overset{c}{\mathbf{R}}(\alpha, \zeta) = \mathbf{r}(\alpha) + \lambda_\zeta(\alpha)(\zeta + \frac{1}{2}\zeta^2 \mathfrak{a}_\zeta(\alpha))\mathbf{n}(\alpha). \quad (1.3)$$

Параметры $\lambda_\zeta, \mathfrak{a}_\zeta$ характеризуют поперечное обжатие. Толщина оболочки после деформации определяется формулой

$$h = [\overset{c}{\mathbf{R}}(\alpha, \overset{c}{h}/2) - \overset{c}{\mathbf{R}}(\alpha, -\overset{c}{h}/2)] \cdot \mathbf{n} = \lambda_\zeta \overset{c}{h},$$

т.е. $\lambda_\zeta = h/\overset{c}{h}$ – кратность изменения толщины оболочки.

В соответствии с (1.3) нормальное перемещение (прогиб) выражается формулой

$$w^\zeta(\alpha, \zeta) \approx w(\alpha) + (\lambda_\zeta - 1)\zeta + \frac{1}{2}\zeta^2 \mathfrak{a}_\zeta. \quad (1.4)$$

где $w(\alpha)$ – прогиб срединной поверхности.

Параболический закон изменения прогиба (1.4) впервые рассматривался, видимо, П. Нагди при построении уточненной теории изгиба плоских пластин [14]. Со сказанным связано использование ниже термина "*теория типа Нагди*".

Как уже отмечалось, существенная особенность квазикирхгофской теории оболочек заключается в учете поперечного обжатия. Однако принятое автором этой теории допущение о том, что параметры поперечного обжатия $\lambda_\zeta, \mathfrak{a}_\zeta$ являются неэнергетическими (неварьируемыми), приводит к неэффективному учету соответствующей деформации. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть с позиции квазикирхгофской теории линейный изгиб плоской пластины. Названная теория после линеаризации приводит к уравнению Жермен – Лагранжа. Между тем известно, что при учете поперечного обжатия это уравнение должно содержать дополнительно нагрузочное слагаемое вида $\alpha \Delta q_n$ (см. пункт 1.2.1). Впервые поперечное обжатие учтено эффективно при использовании аппроксимации (1.3) в работе [15].

Нелинейная теория *жесткогибких оболочек* (т.е. изготовленных из жесткого сжимаемого материала и допускающих конечные (большие) перемещения за счет конечных углов поворота при относительно малых деформациях), учитывающая поперечные сдвиги в линейном приближении, предложена в работе [16] на основе аппроксимации

$$\mathbf{R}(\alpha, \zeta) = \overset{c}{\mathbf{R}}(\alpha, \zeta) + \zeta \psi_\beta(\alpha) \mathbf{r}^\beta(\alpha). \quad (1.5)$$

(Здесь и ниже по повторяющимся в одночлене греческим индексам α, β следует суммировать от 1-го до 2-х.)

При этом поперечное обжатие, как и в квазикирхгофской теории, учитывалось неэффективно, т.е. вариации $\delta\lambda_\zeta, \delta\alpha_\zeta$ в расчет не принимались.

Ниже приводятся основные уравнения нелинейной теории жестко-гибких оболочек, *эффективно* учитывающие поперечное обжатие, а также (в линейном приближении) поперечные сдвиги по моделям С.П. Тимошенко и Д.И. Журавского [17]. Как известно, неучет поперечных сдвигов в силу закона упругости влечет за собой отсутствие соответствующих напряжений, что привело бы к невозможности уравновесить нормальную нагрузку на оболочку. Поэтому в теориях, базирующихся на гипотезах Кирхгофа, игнорируют соотношения закона упругости, связывающие поперечные сдвиги и напряжения. С тем, чтобы избежать названного противоречия, обычно используют сдвиговую модель С.П. Тимошенко (см. форм. (1.5)), предложенную им в теории колебаний балок [18] и распространенную в дальнейшем на пластины [19]. Однако эта модель вступает в противоречие с тангенциальной нагрузкой на лицевых поверхностях оболочки. Дело в том, что по модели С.П.Тимошенко поперечные напряжения $J\sigma^{i3}$ постоянны по толщине оболочки, а это приводит к нарушению условия $J\sigma^{i3}(\pm h/2) = q_i^\pm$, $i = 1, 2$. Уйти от этого очередного противоречия в наиболее интересном для практики случае действия на оболочку лишь нормальной нагрузки, можно воспользовавшись сдвиговой моделью Д.И. Журавского [17].

И еще об одной подоплеке построения теории оболочек с использованием модели Д.И. Журавского. В работе [20] показано, что при нормальных нагрузках, близких к сосредоточенным, графики изгибающих моментов от изменения кривизны срединной поверхности и от тангенциального изменения поперечных сдвигов находятся в противофазе в области максимальных абсолютных значений тех и других моментов. При этом относительное снижение абсолютной величины моментов кирхгофской теории может многократно превышать оценку погрешности этой теории, данную в работе [21]. Иными словами, критерий Новожилова – Финкельштейна оценки погрешности гипотез Кирхгофа перестает "работать" при нагрузках, близких к сосредоточенным. Сказанным, в частности, подтверждается вывод, к которому пришел А.Л. Гольденвейзер при асимптотическом построении двумерной теории оболочек [22]: оценка данная в работе [21], является справедливой для напряженно-деформированных состояний (НДС) с не слишком большой изменчивостью.

Однако максимальные напряжения от изгиба срединной поверхности реализуются у лицевых поверхностей оболочки, где сдвиговая модель С.П. Тимошенко вступает в противоречие с граничными условиями. Для количественной оценки этого противоречия возникла целесообразность в построении *теории типа Тимошенко* на основе сдвиговой модели Д.И. Журавского.

Для того, чтобы иметь возможность одновременно рассматривать обе названные сдвиговые модели, соотношение (1.5) обобщим следующим образом:

$$\mathbf{R}(\alpha, \zeta) = \overset{c}{\mathbf{R}}(\alpha, \zeta) + \varphi(\zeta)\psi_\beta(\alpha)\mathbf{r}^\beta(\alpha), \quad (1.6)$$

Здесь

$$\varphi(\zeta) = \begin{cases} \zeta & \text{— модель Тимошенко} \\ \zeta - \frac{4}{3h^2}\zeta^3 & \text{— модель Журавского.} \end{cases} \quad (1.6')$$

Кроме (1.6) используются допущения:

(α) оболочка является тонкой и остается таковой в процессе деформирования, т.е.

$$\zeta \overset{\circ}{b}_{ij} / \sqrt{\overset{\circ}{a}_{ii}\overset{\circ}{a}_{jj}} \ll 1, \quad \zeta b_{ij} / \sqrt{a_{ii}a_{jj}} \ll 1$$

(a_{ij} , b_{ij} — компоненты метрического тензора и тензора кривизны срединной поверхности);

(β) тангенциальные компоненты тензора деформации Грина – Лагранжа изменяются по толщине оболочки линейно;

(γ) поперечные сдвиги учитываются по линейной теории;

(δ) локальной изменяемостью функции $\lambda_\zeta(\alpha)$ можно пренебрегать.

В соответствии с принятыми допущениями получаем следующие формулы для компонент тензора Грина – Лагранжа:

$$\begin{aligned} \gamma_{ij}^\zeta &= \gamma_{ij} + \zeta(\varkappa_{ij} + \mu_{ij}), \quad \gamma_{i3}^\zeta = \frac{1}{2}\varphi'(\zeta)\psi_i, \quad i, j = 1, 2, \\ \gamma_{33}^\zeta &= \frac{1}{2}(\lambda_\zeta^2 - 1) + \zeta\lambda_\zeta^2\varkappa_\zeta. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \gamma_{ij} &= \frac{1}{2}(a_{ij} - \overset{\circ}{a}_{ij}), \quad \varkappa_{ij} = -\lambda_\zeta b_{ij} + \overset{\circ}{b}_{ij}, \\ \mu_{ij} &= \frac{1}{2}(\nabla_i \psi_j + \nabla_j \psi_i) \approx \frac{1}{2}(\overset{\circ}{\nabla}_i \psi_j + \overset{\circ}{\nabla}_j \psi_i); \end{aligned}$$

$\nabla_i, \overset{\circ}{\nabla}_i$ – ковариантные производные:

$$\nabla_i \psi_j = \partial_i \psi_j - \Gamma_{ij}^\alpha \psi_\alpha, \quad \overset{\circ}{\nabla}_i \psi_j = \partial_i \psi_j - \overset{\circ}{\Gamma}_{ij}^\alpha \psi_\alpha;$$

$\Gamma_{ij}^k, \overset{\circ}{\Gamma}_{ij}^k$ – символы Кристоффеля 2-го рода:

$$\Gamma_{ij}^k = \partial_j \partial_i \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}^k, \quad \overset{\circ}{\Gamma}_{ij}^k = \partial_j \partial_i \overset{\circ}{\mathbf{r}} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{r}}^k;$$

$$\partial_i \psi_j = \partial \psi_j / \partial \alpha^i, \quad \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}^j = \delta_i^j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \quad \mathbf{r}_i = \partial_i \mathbf{r}. \quad (1.7')$$

□ Для описания напряженно-деформированного состояния жестко-гибкой оболочки предпочтительным является упругий потенциал теоретического стандартного материала 2-го порядка (STM-2). С позиции тензорной алгебры упругий закон для STM-2 предполагает подобие девиаторов 1-го и 2-го уровней соосных тензоров Пиолы – Кирхгофа ($\overset{\circ}{\mathbf{\Pi}}$) и Грина – Лагранжа ($\overset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}$) [23]

$$\overset{\circ}{\mathbf{\Pi}}_i = 2\mu \overset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}_i, \quad i = 1, 2$$

и имеет вид

$$\overset{\circ}{\mathbf{\Pi}} = 2\mu \overset{\circ}{\mathbf{\Gamma}} + \lambda I_{\overset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}} \mathbf{1}, \quad (1.8)$$

где упругие константы λ, μ связаны с первыми инвариантами тензоров $\overset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}, \overset{\circ}{\mathbf{\Pi}}$ и вторыми инвариантами их девиаторов $\overset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}_i, \overset{\circ}{\mathbf{\Pi}}_i$, формулами

$$\lambda = \frac{1}{3} \left(\frac{I_{\overset{\circ}{\mathbf{\Pi}}}}{I_{\overset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}}} - \frac{II_{\overset{\circ}{\mathbf{\Pi}}_i}}{II_{\overset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}_i}} \right), \quad \mu = \frac{1}{2} \frac{II_{\overset{\circ}{\mathbf{\Pi}}_i}}{II_{\overset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}_i}}. \quad (1.9)$$

Напомним, что закон Гука имеет вид

$$\mathbf{\Sigma} = 2\mu \mathbf{E} + \lambda I_E \mathbf{1},$$

где $\mathbf{\Sigma}, \mathbf{E}$ – тензоры номинальных [23] (обобщенных [24]) напряжений и малых деформаций Коши. Учитывая, что

$$\lim_{\overset{\circ}{\mathbf{\Gamma}} \rightarrow \mathbf{E}} \overset{\circ}{\mathbf{\Pi}} = \mathbf{\Sigma},$$

параметры λ, μ (см. (1.9)) являются упругими константами Ламе, связанными с модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν формулами

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad \blacksquare$$

На основании (1.8) с учетом принятых выше допущений имеем

$$J \sigma^{ij} = (\lambda \overset{\circ}{a}^{ij} \overset{\circ}{a}^{\alpha\beta} + 2\mu \overset{\circ}{a}^{i\alpha} \overset{\circ}{a}^{j\beta}) \gamma_{\alpha\beta}^\zeta + \lambda \overset{\circ}{a}^{ij} \gamma_{33}^\zeta$$

$$\begin{aligned}
 J\sigma^{33} &= \lambda \mathring{a}^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta}^{\zeta} + (\lambda + 2\mu) \gamma_{33}^{\zeta}, \\
 J\sigma^{i3} &= \mu \varphi'(\zeta) \mathring{a}^{i\beta} \psi_{\beta}, \quad J = dV/d\mathring{V}.
 \end{aligned} \tag{1.10}$$

Параметры $\lambda_{\zeta}, \mathring{\alpha}_{\zeta}$ определяем из граничных условий

$$J\sigma^{33}(\mathring{h}/2) = q_n^+, \quad J\sigma^{33}(-\mathring{h}/2) = q_n^-.$$

После несложных преобразований находим

$$\begin{aligned}
 \lambda_{\zeta}^2 &= 1 - \frac{2\lambda}{\lambda + 2\mu} \mathring{a}^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta} + \frac{2m_n}{(\lambda + 2\mu)\mathring{h}}, \\
 \lambda_{\zeta}^2 \mathring{\alpha}_{\zeta} &= -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \mathring{a}^{\alpha\beta} (\mathring{\alpha}_{\alpha\beta} + \mu_{\alpha\beta}) + \frac{q_n}{(\lambda + 2\mu)\mathring{h}},
 \end{aligned}$$

где

$$q_n = q_n^+ - q_n^-, \quad m = \frac{1}{2}\mathring{h}(q_n^+ + q_n^-).$$

Усилия и моменты вводятся следующим образом:

$$\begin{aligned}
 S^{ij} &= \int_{-\mathring{h}/2}^{\mathring{h}/2} (J\sigma^{ij} - \frac{\nu}{1-\nu} J\sigma^{33} \mathring{a}^{ij}) d\zeta, \\
 M^{ij} &= \int_{-\mathring{h}/2}^{\mathring{h}/2} (J\sigma^{ij} - \frac{\nu}{1-\nu} J\sigma^{33} \mathring{a}^{ij}) \zeta d\zeta, \\
 T_{.n}^i &= \lambda_{\zeta} \int_{-\mathring{h}/2}^{\mathring{h}/2} J\sigma^{i3} d\zeta.
 \end{aligned} \tag{1.11}$$

На основании соотношений (1.7), (1.10) и (1.11) определяющие уравнения упругости рассматриваемой уточненной теории жесткогибких оболочек имеют вид

$$\begin{aligned}
 S^{ij} &= c_{\circ} A^{ij, \alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta}, \quad M^{ij} = M^{ij w} + M^{ij \psi}, \\
 M^{ij w} &= \lambda_{\zeta} d_{\circ} A^{ij, \alpha\beta} \mathring{\alpha}_{\alpha\beta}, \quad M^{ij \psi} = d_{\circ} A^{ij, \alpha\beta} \mu_{\alpha\beta}, \\
 T_{.n}^i &= 2\mu \varphi(\mathring{h}/2) \mathring{a}^{i\beta} \psi_{\beta},
 \end{aligned} \tag{1.12}$$

где

$$A^{ij, \alpha\beta} = \mathring{a}^{i\alpha} \mathring{a}^{j\beta} + \nu \mathring{c}^{i\alpha} \mathring{c}^{j\beta},$$

$\check{c}^{ik} = (\mathring{\mathbf{r}}^i \times \mathring{\mathbf{r}}^j) \cdot \mathring{\mathbf{n}}$ – контравариантные компоненты дискриминантного тензора срединной поверхности; c_o , d_o – тангенциальная и изгибная жесткости оболочки:

$$c_o = \frac{E\check{h}}{1-\nu^2}, \quad d_o = \frac{E\check{h}^3}{12(1-\nu^2)}.$$

Уравнения равновесия выводятся с использованием вариационного уравнения Лагранжа

$$\int_{\check{\Omega}} \left(\int_{-\check{h}/2}^{\check{h}/2} \delta U d\zeta \right) d\check{\Omega} = \int_{\Omega} (\mathbf{q}^+ \cdot \mathbf{R}^+ - \mathbf{q}^- \cdot \mathbf{R}^-) d\Omega,$$

где

$$\delta U = J\sigma^{\alpha\beta}\delta\gamma_{\alpha\beta}^{\zeta} + 2J\sigma^{\alpha 3}\delta\gamma_{\alpha 3}^{\zeta} + J\sigma^{33}\delta\gamma_{33}^{\zeta}.$$

С использованием приведенных статических величин

$$\begin{aligned} \tilde{T}^{ij} &= \mathcal{A}^{-1}T^{ij} + \frac{\nu}{1-\nu} \mathring{a}^{ij}m_n, \\ \tilde{T}_{.n}^i &= \frac{\mathcal{A}^{-1}\check{h}}{2\varphi(\check{h}/2)k}T_{.n}^i \approx \frac{1}{k}\mu\check{h}\mathring{a}^{i\beta}\psi_{\beta}, \\ \tilde{M}^{ij} &= \mathcal{A}^{-1}M^{ij} + \lambda_{\zeta}h_{\lambda}^2\mathring{a}^{ij}q_n \end{aligned} \quad (1.13)$$

названные уравнения удается представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \nabla_{\alpha}\tilde{T}^{\alpha i} - b_{\alpha}^i\tilde{T}_{.n}^{\alpha} + q^i &= 0, \\ \nabla_{\alpha}\tilde{T}_{.n}^{\alpha} + b_{\alpha\beta}\tilde{T}^{\alpha\beta} + q_n &= 0, \\ \nabla_{\alpha}\tilde{M}^{\alpha i} - \tilde{T}_{.n}^i &= 0, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (1.14)$$

В формулах (1.13) введены обозначения

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\check{h}/2} \int_{-\check{h}/2}^{\check{h}/2} \varphi'^2(\zeta) d\zeta = \begin{cases} 1 & \text{— модель Тимошенко,} \\ 8/15 & \text{— модель Журавского.} \end{cases}$$

$$\mathcal{A} = dS/d\check{S} = \sqrt{\bar{a}}/\sqrt{\mathring{a}}, \quad a = a_{11}a_{22} - a_{12}^2, \quad \mathring{a} = \mathring{a}_{11}\mathring{a}_{22};$$

$$T^{ij} = S^{ij} - b_{\alpha}^j M^{i\alpha} + \frac{\nu}{1-\nu} \lambda_{\zeta}^{-1} \mathring{a}^{ij} b_{\alpha\beta} M^{\alpha\beta};$$

$$h_{\lambda}^2 = \frac{\nu\check{h}^2}{8(1-\nu)}. \quad (1.14')$$

Уравнения (1.14) при отсутствии тильд идентичны по форме записи уравнениям равновесия линейной теории оболочек (6.81) [25] и в этом смысле в работе [23] названы *каноническими*.

Тот факт, что уравнения нелинейной механики тонких упругих оболочек, построенных без использования гипотез Кирхгофа, удалось преобразовать к каноническому виду относительно приведенных статических величин (1.13), позволяет сформулировать быстрый алгоритм уточнения различных частично или полностью линеаризованных вариантов кирхгофской теории оболочек путем учета трансверсальных (поперечных) деформаций. Этот алгоритм, предложенный первым автором и не имевший устойчивого названия, впредь будем именовать *М*-алгоритмом.

М-алгоритм заключается:

– в замене статических величин соответствующего варианта кирхгофской теории оболочек (T^{ij}, M^{ij}, T_n^i) правыми частями формул (1.13);

– в сохранении всех допущений рассматриваемого кирхгофского варианта теории оболочек, связанных с выражением геометрических параметров деформированной срединной поверхности (a_{ij}, b_{ij}) через перемещения.

Несколько слов о граничных величинах. В работе [15] показано, что с позиции принципа Лагранжа нелинейная теория оболочек, вообще говоря, *не является корректной*, так как даже в кирхгофском варианте имеется шесть независимых геометрических граничных величин

$$w, \quad u_\nu, \quad u_t, \quad \frac{dw}{d\dot{s}_\nu}, \quad \frac{du_\nu}{d\dot{s}_\nu}, \quad \frac{du_t}{d\dot{s}_\nu},$$

что не согласуется с порядком системы полевых уравнений в перемещениях.

Если же пренебречь работой соответствующих обобщенных сил на вариациях $\delta(du_\nu/d\dot{s}_\nu), \delta(du_t/d\dot{s}_\nu)$ в функционале Лагранжа, то для рассматриваемой нелинейной теории оболочек граничные величины можно представить в виде таблицы [23]

$$\begin{vmatrix} \tilde{Q}_{\nu n} & \tilde{M}_{\nu\nu} & \tilde{M}_{\nu t} \\ w & \vartheta_\nu + \psi_\nu & \vartheta_t + \psi_t \end{vmatrix}, \quad (1.15)_1$$

$$\begin{vmatrix} \tilde{T}_{\nu\nu} & \tilde{T}_{\nu t} \\ u_\nu & u_t \end{vmatrix}. \quad (1.15)_2$$

где

$$\tilde{Q}_{\nu n} = \tilde{T}_{\nu n} - \mathcal{A}\tilde{T}_{\nu\nu}\vartheta_\nu - \mathcal{A}\tilde{T}_{\nu t}\vartheta_t;$$

$$\begin{aligned}\vartheta_\nu &= -\frac{dw}{d\dot{s}_\nu} - \overset{\circ}{\sigma}_\nu u_\nu + \overset{\circ}{\tau}_\nu u_t, \\ \vartheta_t &= -\frac{dw}{d\dot{s}_t} - \overset{\circ}{\sigma}_t u_t + \overset{\circ}{\tau}_t u_\nu,\end{aligned}\quad (1.15')$$

$\overset{\circ}{\sigma}_\nu, \overset{\circ}{\sigma}_t, \overset{\circ}{\tau}_\nu = \overset{\circ}{\tau}_t$ – нормальные кривизны и кручения s_ν -, s_t -линий.

1.2. Теория пологих оболочек типа Маргера–Тимошенко–Нагди

1.2.1. К выводу полевых уравнений

В работе [26] \mathfrak{M} -алгоритм иллюстрируется на примере уточнения теории пологих оболочек К. Маргера [27] за счет учета поперечных сдвигов и обжатия. Как известно (см. например, [28]), в названной теории кроме допущений, связанных с пологостью оболочки, следуя Т. Кáрману, учитываются в формулах для тангенциальных компонент тензора Грина-Лагранжа квадратичные слагаемые относительно углов поворота касательных к координатным линиям срединной поверхности. В конечном счете кинематические уравнения принимаются в виде

$$\gamma_{ij}^\zeta = \gamma_{ij} + \zeta \mathfrak{x}_{ij}, \quad (1.16)$$

где

$$\begin{aligned}\gamma_{ij} &= e_{ij} - k_{ij}w + \frac{1}{2}w_{,i}w_{,j}; \quad e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \\ k_{ij} &\triangleq \overset{\circ}{b}_{ij} / \sqrt{\overset{\circ}{a}_{ii}\overset{\circ}{a}_{jj}}, \quad \mathfrak{x}_{ij} = -w_{,ij} \triangleq -\partial^2 w / \partial x_i \partial x_j.\end{aligned}\quad (1.16')$$

За исходные (подлежащие уточнению) в работе [26] приняты уравнения (1.21), (1.22), (1.24)–(1.26) [29], которые, будучи приведенными к принятым выше обозначениям, записываются в виде (статические величины помечены тильдами, чтобы не выписывать систему дважды; в силу пологости оболочки принято $T_{ij} \approx S^{ij}$; предполагается, действие лишь нормальной нагрузки)

$$\begin{aligned}\widetilde{M}_{\alpha\beta, \beta\alpha} + (k_{\alpha\beta} + w_{, \alpha\beta})\widetilde{T}_{\alpha\beta} + q_n &= 0; \\ \widetilde{T}_{in} = \widetilde{M}_{i\alpha, \alpha}, \quad \widetilde{T}_{i, \alpha\alpha} &= 0, \quad i = 1, 2.\end{aligned}\quad (1.17)$$

Формулы (1.13) в рамках принятых геометрических допущений имеют вид

$$\begin{aligned}\widetilde{M}_{ij} &= M_{ij} + M_{ij}^\psi + h_\lambda^2 q_n \delta_{ij}, \\ \widetilde{T}_{ij} &= T_{ij} + \frac{\nu}{1-\nu} m_n \delta_{ij}, \quad \widetilde{T}_{in} = \frac{1}{k} \mu h \psi_i,\end{aligned}\quad (1.18)$$

где

$$\begin{aligned}
 \overset{w}{M}_{11} &= -d_{\circ}(w_{,11} + \nu w_{,22}), \quad \overset{w}{M}_{22} = (1 \leftrightarrow 2)\overset{w}{M}_{11}, \\
 \overset{w}{M}_{12} &= -(1 - \nu)d_{\circ}w_{,12}; \\
 \overset{\psi}{M}_{11} &= d_{\circ}(\psi_{1,1} + \nu\psi_{2,2}), \quad \overset{\psi}{M}_{22} = (1 \leftrightarrow 2)\overset{\psi}{M}_{11}, \\
 \overset{\psi}{M}_{12} &= \frac{1}{2}(1 - \nu)d_{\circ}(\psi_{1,2} + \psi_{2,1}).
 \end{aligned} \tag{1.18'}$$

Очевидно, что уравнения относительно приведенных усилий (1.17) удовлетворяются при

$$\tilde{T}_{11} = \Phi_{,22}, \quad \tilde{T}_{22} = \Phi_{,11}, \quad \tilde{T}_{12} = -\Phi_{,12},$$

т. е. (см. форм. (1.18))

$$\begin{aligned}
 T_{11} &= \Phi_{,22} - \frac{\nu}{1 - \nu}m_n, \quad T_{22} = \Phi_{,11} - \frac{\nu}{1 - \nu}m_n, \\
 T_{12} &= -\Phi_{,12}.
 \end{aligned} \tag{1.19}$$

Окончательно после несложных преобразований приходим к следующей разрешающей системе уравнений теории пологих оболочек типа Маргера–Тимошенко–Нагди (коротко типа М – Т– N):

$$\begin{aligned}
 d_{\circ}\Delta^2 w &= q_n - (kh_{\psi}^2 - h_{\lambda}^2)\Delta q_n + \\
 &+ (I - kh_{\psi}^2\Delta)[\Delta_B\Phi + \Lambda(\Phi, w)],
 \end{aligned} \tag{1.20}_1$$

$$\frac{1}{Eh}\Delta^2\Phi = \frac{\nu}{Eh}\Delta m_n - \frac{1}{2}\Lambda(w, w) - \Delta_B w - \beta w, \tag{1.20}_2$$

$$\begin{aligned}
 \Delta\psi_i - \frac{1 + \nu}{2}\frac{\partial}{\partial x_j}(\psi_{i,j} - \psi_{j,i}) - \frac{1}{kh_{\psi}^2}\psi_i &= \\
 = (\Delta w - \frac{h_{\lambda}^2}{d_{\circ}}q_n)_{,i}, \quad i \neq j.
 \end{aligned} \tag{1.20}_3$$

Здесь I – тождественный оператор,

$$\Delta(\) = \frac{\partial^2(\)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2(\)}{\partial x_2^2}, \quad h_{\psi}^2 = \frac{\dot{h}^2}{6(1 - \nu)},$$

$$\Lambda(\Phi, w) = w_{,11}\Phi_{,22} - 2w_{,12}\Phi_{,12} + w_{,22}\Phi_{,11},$$

$$\Delta_B(\) = k_{22}\frac{\partial^2(\)}{\partial x_1^2} - 2k_{12}\frac{\partial^2(\)}{\partial x_1\partial x_2} + k_{11}\frac{\partial^2(\)}{\partial x_2^2},$$

$$\beta = k_{11,22} - 2k_{12,12} + k_{22,11}. \quad (1.20')$$

Полезным, особенно при формулировании граничных условий, является следующее промежуточное уравнение:

$$\psi_{\alpha,\alpha} = -\frac{k}{\mu\hbar}(q_n + \Delta_B\Phi + \Lambda(\Phi, w)). \quad (1.21)$$

Уравнения (1.20) совпадают с соответствующими уравнениями, полученными в работе [23] непосредственно из вариационного принципа Лагранжа при названных выше геометрических допущениях.

В таблице 1.1 приведены различные варианты основного уравнения изгиба плоской пластины, учитывающего трансверсальные деформации (сдвиги и обжатие).

Таблица. 1.1.

Индекс	Вид уравнения	Источник
α	$d_o\Delta^2w = q_n - (kh_\psi^2 - h_\lambda^2)q_n$	Линеаризованное уравнение (1.20) при $k_{ij} = 0$
β	$d_o\Delta^2w = q_n - (\frac{3}{2}h_\psi^2 - \frac{2}{3}h_\lambda^2)q_n$	Алгоритм Н-Ф см. [30], форм. (2.18)
γ	$d_o\Delta^2w = q_n - (\frac{6}{5}h_\psi^2 - \frac{4}{5}h_\lambda^2)q_n$	Уравнение Э. Рейснера см. [19], форм. (169)
δ	$d_o\Delta^2w = q_n - (0 - \frac{2}{3}h_\lambda^2)q_n$	Уравнение (β) по версии В.В. Пикуля

Поясним уравнение δ , полученное в работе [31] на основе алгоритма Новожилова–Финкельштейна (алгоритм Н – Ф), использованного этими авторами для оценки погрешности гипотез Кирхгофа в линейной теории оболочек. Сравнив полученное им уравнение (δ) с уравнением (γ), автор работы [31] пришел к сенсационному выводу: "В.В. Новожилов и Р.М. Финкельштейн для оценки погрешности гипотез Кирхгофа в качестве базы сравнения выбрали уравнения, погрешность которых выше, чем уравнений, построенных на основе гипотез Кирхгофа. Поэтому предложенная ими оценка является несостоятельной". Однако этот вывод, озвученный на Международной конференции, основан на ошибке, допущенной при проведении элементарных выкладок.

1.2.2. Полудеформационный вариант граничных величин

Величины, в терминах которых записываются граничные условия единой теории пологих оболочек типа М – Г – N, можно представить в виде таблиц (1.15), где с учетом принятых в названной теории допущений следует положить

$$\tilde{T}_{\nu\nu} = T_{\nu\nu} + \frac{\nu}{1-\nu}m_n = \Delta_{tt}\Phi,$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{T}_{\nu t} &= -\Delta_{\nu t}\Phi, \quad \tilde{M}_{\nu\nu} = M_{\nu\nu} + h_\lambda^2 q_n, \\
 \tilde{Q}_{\nu n} &= \mu h \psi_\nu - \vartheta_\nu \Delta_{tt}\Phi + \vartheta_t \Delta_{\nu t}\Phi, \\
 \vartheta_\nu &= -\frac{dw}{d\dot{s}_\nu} + \psi_\nu, \quad \vartheta_t = -\frac{dw}{d\dot{s}_t} + \psi_t;
 \end{aligned} \tag{1.22}_1$$

$$\begin{aligned}
 \Delta_{\nu\nu}(\cdot) &= \frac{d^2(\cdot)}{d\dot{s}_\nu^2} + \dot{\rho}_\nu \frac{d(\cdot)}{d\dot{s}_t}, \quad \Delta_{tt}(\cdot) = \frac{d^2(\cdot)}{d\dot{s}_t^2} + \dot{\rho}_t \frac{d(\cdot)}{d\dot{s}_\nu}, \\
 \Delta_{\nu t}(\cdot) &= \frac{d^2(\cdot)}{d\dot{s}_\nu d\dot{s}_t} - \dot{\rho}_t \frac{d(\cdot)}{d\dot{s}_t}, \quad \Delta_{t\nu}(\cdot) = \frac{d^2(\cdot)}{d\dot{s}_t d\dot{s}_\nu} - \dot{\rho}_\nu \frac{d(\cdot)}{d\dot{s}_\nu}, \\
 \Delta_{\nu t} &= \Delta_{t\nu}, \quad \Delta = \Delta_{\nu\nu} + \Delta_{tt}, \\
 \dot{\rho}_t &= \frac{d\gamma}{d\dot{s}_t}, \quad \dot{\rho}_\nu = -\frac{d\gamma}{d\dot{s}_\nu}, \quad \gamma - \text{угол между ортами } \mathbf{r}_1/\sqrt{\dot{a}_{11}} \text{ и } \dot{\nu}.
 \end{aligned} \tag{1.22}_2$$

Очевидно, что система уравнений (1.20) при использовании традиционного варианта граничных величин (1.15) *не является замкнутой*, так как тангенциальные перемещения u_ν , u_t не выражаются без интегрирования через основные искомые функции w , Φ . Иными словами, с тем, чтобы записать граничные условия в терминах тангенциальных смещений, необходимо дополнительно интегрировать систему (1.19) с учетом формул

$$T_{11} = c_o(\gamma_{11} + \nu\gamma_{22}), \quad T_{22} = (1 \Leftrightarrow 2)T_{11},$$

$$T_{12} = (1 - \nu)c_o\gamma_{12}$$

и (1.16')₁, (1.16')₂.

Система уравнений (1.20) будет замкнутой, если граничные величины (1.15)₂ (с учетом принятых в теории типа М – N – T упрощений) заменить следующими [23]:

$$\left| \begin{array}{c|c} F_t^* & B_n^* \\ \hline -\varepsilon_{tt}^* & \varepsilon_{tn}^* \end{array} \right|, \tag{1.23}$$

где

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{tt}^* &= \frac{1}{E\dot{h}}(\Delta_{\nu\nu}\Phi - \nu\Delta_{tt}\Phi) + w\Delta_{tt}z - \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{d\dot{s}_t}\right)^2 - \frac{\nu}{E\dot{h}}m_n, \\
 -\varepsilon_{tn}^* &= \frac{1}{E\dot{h}}\frac{d\Delta\Phi}{d\dot{s}_\nu} + \frac{1+\nu}{E\dot{h}}\diamond\Phi - w\diamond z + \frac{dw}{d\dot{s}_\nu}\Delta_{tt}z - 2\Delta_{\nu t}z\frac{dw}{d\dot{s}_t} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{dw}{ds_\nu} \frac{d^2w}{ds_t^2} + \frac{1}{2} \dot{\rho}_t \left[\left(\frac{dw}{ds_\nu} \right)^2 + \left(\frac{dw}{ds_t} \right)^2 \right] - \frac{\nu}{E\dot{h}} \frac{dm_n}{ds_\nu}, \\
& F_t^* = -\frac{d\Phi}{ds_\nu}, \quad B_n^* = \Phi;
\end{aligned} \tag{1.24}$$

$$\Diamond(\cdot) = \frac{d\Delta_{tt}(\cdot)}{ds_\nu} + \dot{\rho}_\nu [\Delta_{tt}(\cdot) + \Delta_{\nu\nu}(\cdot)] - 2\dot{\rho}_\nu \Delta_{\nu t}(\cdot),$$

$z = z(x_1, x_2)$ – уравнение срединной поверхности полой оболочки.

Полудеформационный вариант граничных величин предложен первым автором в работе [32] (см. также статьи [33,34]) для теории плоских пластин Кáрманна – Тимошенко и обобщен на случай пологих оболочек Маргера в статье [35]. Термин „полудеформационные граничные величины“ связан с тем, что деформационными являются лишь тангенциальные величины, т.е. ровно половина полного варианта этих величин [25].

1.2.3. Теория цилиндрических оболочек типа М – Т – N

Преобразуем уравнения (1.20) для случая круговой цилиндрической оболочки радиуса R . Переходя к безразмерным координатам

$$\xi = x_1/R, \quad \varphi = x_2/R,$$

получим

$$k_{22} = -\frac{1}{R}, \quad k_{11} = k_{12} = 0, \quad \beta = 0, \quad \Delta_B = -\frac{1}{R^3} \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial \xi^2}. \tag{1.25}$$

С учетом этих соотношений уравнения (1.20)₁ и (1.20)₂ принимают вид

$$\begin{aligned}
d_o \Delta^2 w + R \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(\Phi - \frac{kh_\psi^2}{R^2} \Delta \Phi \right) &= f_1 + \left(I - \frac{kh_\psi^2}{R^2} \Delta \right) \Lambda(\Phi, w), \\
-E\dot{h}R \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \Delta^2 \Phi &= f_2 - \frac{1}{2} E\dot{h} \Lambda(w, w),
\end{aligned} \tag{1.26}$$

где

$$\begin{aligned}
f_1 &= R^4 \left(q_n - \frac{h_*^2}{R^2} \Delta q_n \right), \quad f_2 = \nu R^2 \Delta m_n, \\
\Lambda(\Phi, w) &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial \varphi} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \varphi} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2},
\end{aligned}$$

$$\Delta(\cdot) = \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial \varphi^2}, \quad h_*^2 = kh_\psi^2 - h_\lambda^2. \quad (1.26')$$

После определения функции $w(\xi, \varphi)$ поперечные сдвиги могут быть найдены из преобразованных соответствующим образом уравнений (1.20)₃.

На основании уравнений (1.26) после отбрасывания подчеркнутых там слагаемых получим разрешающие уравнения следующих частных теорий изгиба цилиндрических оболочек:

i) *линейная кирхгофсовская теория* при $h_\psi^2 = h_\lambda^2 = 0$, $m_n = 0$, $\psi_1 = \psi_2 = 0$

$$\Delta^4 w + 4b^4 \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} = \frac{R^4}{d_o} \Delta^2 q_n, \quad (1.27)$$

где

$$4b^4 = 12(1 - \nu^2)R^2/h^2; \quad (1.27')$$

ii) *линейная теория типа Тимошенко* при $h_\lambda^2 = 0$, $m_n = 0$

$$\Delta^4 w - 2(1 + \nu) \frac{\partial^4 \Delta w}{\partial \xi^4} + 4b^4 \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} = \frac{R^4}{d_o} (\Delta^2 q_n + \frac{kh_\psi^2}{R^2} \Delta^3 q_n); \quad (1.28)$$

iii) *линейная теория типа Нагди* при $h_\psi^2 = 0$, $\psi_1 = \psi_2 = 0$

$$\Delta^4 w + 4b^4 \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} = \frac{R^4}{d_o} (\Delta^2 q_n - \frac{h_\lambda^2}{R^2} \Delta^3 q_n) - \frac{\nu R^3}{d_o} \frac{\partial^2 \Delta m_n}{\partial \xi^2}. \quad (1.29)$$

Граничные условия формулируются на основе таблиц (1.15). Что же касается полудеформационного варианта граничных величин (1.15)₁, (1.24), то из-за некорректности автоматического распространения формул (1.24) на случай замкнутой цилиндрической оболочки получим соответствующие величины непосредственно для края $\xi = \text{const}$ названной оболочки.

Вводя векторы тангенциальных усилий и перемещений

$$\mathbf{T}_1^* \triangleq T_{11} \mathbf{e}_1 + T_{12} \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{u}^* \triangleq u_1 \mathbf{e}_1 + u_t \mathbf{e}_2$$

и принимая во внимание, что $d\mathbf{n}/d\varphi = \mathbf{e}_2$, $d\mathbf{e}_2/d\varphi = -\mathbf{n}$, можно записать

$$\mathbf{T}_1^* = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \mathbf{e}_1 - \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \mathbf{e}_2 \right) - \frac{1}{R^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \mathbf{n}.$$

С учетом этого равенства получаем

$$R \int_0^{2\pi} \mathbf{T}_1^* \cdot \delta \mathbf{u}^* d\varphi = \frac{1}{R} \int_0^{2\pi} [\Phi \delta \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial \varphi^2} \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \delta \left(\frac{\partial u_2}{\partial \varphi} \right)] d\varphi.$$

Таким образом, можно использовать следующий вариант граничных величин (см. табл. (1.23)):

$$F_2^* = -\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}, \quad B_n^* = \Phi; \quad (1.30)_1$$

$$\varepsilon_{22}^* = \frac{1}{R} \frac{\partial u_2}{\partial\varphi}; \quad \varkappa_{2n}^* = \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial\varphi^2}. \quad (1.30)_2$$

Выразим величины (1.30)₂ через основные искомые функции w , Φ . Из уравнений (1.16')₁, (1.16')₂, (1.19), (1.23) находим

$$\begin{aligned} \varepsilon_{22}^* = e_{22} &= \frac{1}{R} \frac{\partial u_2}{\partial\varphi} = \frac{1}{E\dot{h}R^2} \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2} - \nu \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} \right) - \\ &\quad - \frac{w}{R} - \frac{1}{2R^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2} \right)^2 - \frac{\nu}{E\dot{h}} m_n; \end{aligned} \quad (1.31)_1$$

$$e_{12} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u_1}{\partial\varphi} + \frac{\partial u_2}{\partial\xi} \right) = -\frac{1+\nu}{E\dot{h}R} \frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi\partial\varphi} - \frac{1}{2R^2} \frac{\partial w}{\partial\xi} \frac{\partial w}{\partial\varphi}.$$

Дифференцируя последнее уравнение по φ и учитывая формулы (1.30)₂, получим

$$\varkappa_{2n}^* = -\frac{1}{R} \frac{\partial \varepsilon_{22}^*}{\partial\xi} - \frac{2(1+\nu)}{E\dot{h}R^3} \frac{\partial^3\Phi}{\partial\xi\partial\varphi^2} - \frac{1}{R^3} \frac{\partial}{\partial\varphi} \left(\frac{\partial w}{\partial\xi} \frac{\partial w}{\partial\varphi} \right). \quad (1.31)_2$$

Нетрудно убедиться, что формулы (1.31) следуют и непосредственно из соответствующих формул (1.24') с учетом соотношений

$$\Delta_{tt}z = k_{22} = -\frac{1}{R}, \quad \diamond z = \frac{1}{R} \frac{\partial \Delta_{tt}z}{\partial\xi} = 0.$$

2. Контактная задача со свободной границей

2.1. Контактная задача для пластины и абсолютно жесткого основания (теория Кирхгофа)

Рассмотрим задачу о контактном взаимодействии цилиндрически изгибаемой пластины с плоским абсолютно жестким идеально гладким основанием (рис. 2.1.) Пусть пластина толщиной h и шириной $2l$ ($x \triangleq x_1 \in [0, 2l]$) расположена параллельно названному основанию с зазором $\Delta \ll h$ и испытывает действие нагрузки $q_n(x) = q_n(2l - x)$.

Предположим также, что два края пластины $x = 0$ и $x = 2l$ шарнирно оперты, а два других – бесконечно удалены или загружены так, чтобы реализовывался цилиндрический изгиб пластины.

При определенной величине нагрузки пластина коснется основания при $x = l$. Принимается допущение, что при дальнейшем увеличении нагрузки *пластина выстилается по основанию без зазоров*, образуя область контакта шириной $[x_0, 2l - x_0]$. Двухточечная граница области контакта $\{x = x_0, x = 2l - x_0\}$ заранее не определена и в этом смысле называется *свободной*.

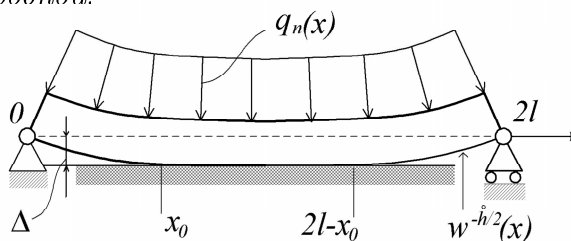


Рис. 2.1.

Впредь считается, что внешняя нагрузка является постоянной $q_n = q_0 = const$. Поставленная задача в рамках кирхгофсовской теории пластин допускает формулировку

$$w^{IV} = p_0 - r(x) \triangleq f(x), \quad x \in (0, l); \tag{2.1}_1$$

$$w(0) = 0, \quad w''(0) = 0, \quad w'(l) = 0, \quad w'''(l) = 0, \tag{2.1}_2$$

при следующих дополнительных условиях:

$$r(x) \geq 0, \quad \text{если } x \in [0, l]; \tag{2.1}_3$$

$$w(x) = \Delta, \quad \text{если } x \in [x_0, l]. \tag{2.1}_4$$

Здесь $p_0 = q_0/d_0$; $d_0 r(x)$ – погонная сила давления пластины на основание.

Из уравнений (2.1)₁ и (2.1)₄ имеем

$$r(x) = p_0 \quad \text{при } x \in (x_0, l]. \tag{2.2}$$

Соотношение (2.2) означает, что общая формула для силы давления пластины на основание может быть принята в виде

$$r(x) = R_0 \delta(x - x_0) + p_0 H(x - x_0), \tag{2.3}$$

где $H(\cdot), \delta(\cdot)$ – функции Хевисайда и Дирака (δ - функция).

Таким образом, для правой части уравнения (2.1)₁ имеет место формула

$$f(x) = p_0 H(x_0 - x) - R_0 \delta(x - x_0). \quad (2.4)$$

Нетрудно убедиться, что функции Грина для краевой задачи (2.1)₁ – (2.1)₂ имеет вид

$$G(x, \xi) = \frac{1}{6} \begin{cases} 6l\xi x - 3\xi^2 x - x^3, & x \leq \xi \\ 6l\xi x - 3\xi x^2 - \xi^3, & x \geq \xi \end{cases} \quad (2.5)$$

С использованием функции Грина решение краевой задачи (2.1)₁ – (2.1)₂ можно представить в виде

$$\begin{aligned} \underline{x \leq x_0} : w(x) &= \frac{1}{6} R_0 (x^3 - 6lx_0 x + 3x_0^2 x) + \\ &+ \frac{1}{6} p_0 (\frac{1}{4} x^4 - x_0 x^3 + 3lx_0^2 x - x_0^3 x); \end{aligned} \quad (2.6)_1$$

$$\begin{aligned} \underline{x \geq x_0} : w(x) &= \frac{1}{6} R_0 (x_0^3 - 6lx_0 x + 3x_0 x^2) + \\ &+ \frac{1}{6} p_0 (3lx_0^2 x - \frac{3}{2} x_0^2 x^2 - \frac{1}{4} x_0^4). \end{aligned} \quad (2.6)_2$$

Сравнивая формулы (2.1)₄ и (2.6)₂, находим

$$x_0 = \sqrt[4]{24\Delta/p_0}, \quad R_0 = \frac{1}{2} p_0 x_0. \quad (2.7)$$

С учетом формулы (2.7)₂ соотношению (2.3) можно придать вид

$$r(x) = \frac{1}{2} p_0 x_0 \delta(x - x_0) + p_0 H(x - x_0). \quad (2.8)$$

2.2. Контактная задача для двух пластин

Предположим теперь, что под изгибаемой пластиной вместо жесткого основания расположена еще одна пластина, идентичная первой. Тогда контактная задача может быть сформулирована так ($x \in (0, l]$):

$$\begin{aligned} w_1^{IV} &= p_c - r(x), \\ w_1(0) &= 0, \quad w_1''(0) = 0, \quad w_1'(l) = 0, \quad w_1'''(l) = 0; \end{aligned} \quad (2.9)_1$$

$$\begin{aligned} w_2^{IV} &= r(x), \\ w_2(0) &= 0, \quad w_2''(0) = 0, \quad w_2'(l) = 0, \quad w_2'''(l) = 0; \end{aligned} \quad (2.9)_2$$

$$r(x) \geq 0; \quad (2.9)_3$$

$$w_1(x) - w_2(x) - \Delta \leq 0; \quad (2.9)_4$$

$$r(x)[w_1(x) - w_2(x) - \Delta] = 0. \quad (2.9)_5$$

Условие дополняющей нежесткости (2.9)₅ (термин заимствованный из курса линейного программирования) регулирует выполнение неравенств (2.9)₃ и (2.9)₄: там, где $r > 0$, осуществляется контакт, т.е. $w_1 - w_2 - \Delta = 0$; если же $w_1 - w_2 - \Delta < 0$ (контакта пластин нет), то реакции отсутствуют, т.е. $r = 0$.

Введя обозначения

$$u_1 = w_1 - w_2, \quad u_2 = w_1 + w_2, \quad (2.10)$$

придем к двум независимым задачам ($x \in (0, l]$):

$$u_1^{IV} = p_o - 2r(x) \triangleq f_1(x),$$

$$\begin{aligned} u_1(0) = 0, \quad u_1''(0) = 0, \quad u_1'(l) = 0, \quad u_1'''(l) = 0, \\ r(x) \geq 0, \quad u_1(x) \leq \Delta, \quad r(x)(u_1(x) - \Delta) = 0; \end{aligned} \quad (2.11)_1$$

$$u_2^{IV} = p_o,$$

$$u_2(0) = 0, \quad u_2''(0) = 0, \quad u_2'(l) = 0, \quad u_2'''(l) = 0. \quad (2.11)_2$$

По аналогии с (2.2), (2.4) имеем (рис. 2.2)

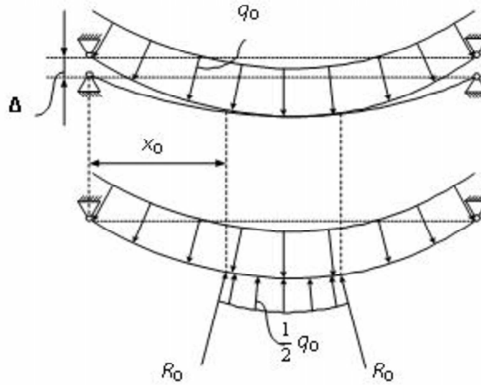


Рис. 2.2.

$$\begin{aligned} r(x) &= R_o \delta(x - x_o) + \frac{1}{2} p_o H(x - x_o), \\ f_1(x) &= p_o H(x_o - x) - 2R_o \delta(x - x_o). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Сравнив (2.12)₂ и (2.4), убеждаемся, что для функции $u_1(x)$ можно использовать формулу (2.6), если заменить там R_0 на $2R_0$.

Решение задачи (2.11)₂ определяется так:

$$u_2(x) = p_c \int_0^l G(x, \xi) d\xi = \frac{1}{6} p_0 (\frac{1}{4} x^4 - lx^2 + 2l^3 x). \quad (2.13)$$

Возвращаясь к исходным искомым функциям, получаем

$$w_i(x) = \frac{p_0}{24} \begin{cases} V_i(x) & \text{при } x \leq x_0 \\ U_i(x) & \text{при } x_0 \leq x \leq l, \end{cases} \quad (2.14)$$

где

$$\begin{aligned} U_1 &= x^4 - (2l + x_0)x^3 + (4l^3 + x_0^3)x, \\ U_2 &= -(2l - x_0)x^3 + (4l^3 - x_0^3)x, \\ V_1 &= \frac{1}{2}x^4 - 2lx^3 + 4l^3x + \frac{1}{2}x_0^4, \\ V_2 &= \frac{1}{2}x^4 - 2lx^3 + 4l^3x - \frac{1}{2}x_0^4. \end{aligned} \quad (2.14')$$

2.3. Метод обобщенной реакции

Условия (2.9)₃ – (2.9)₅ можно записать в виде одного существенно нелинейного (т.е. не допускающего линеаризацию без искажения физического смысла) уравнения

$$r = \{r - \alpha(w_2 - w_1 + \Delta)\}_+, \alpha > 0, \quad (2.15)$$

где индексом " + " помечена положительная срезка функции:

$$\varphi_+ = \max(0, \varphi) = \frac{1}{2}(\varphi + |\varphi|).$$

Действительно, пусть

$$r - \alpha(w_2 - w_1 + \Delta) > 0.$$

Тогда уравнение (2.15) принимает вид

$$r = r - \alpha(w_2 - w_1 + \Delta)$$

или

$$w_2 - w_1 + \Delta = 0$$

и поэтому

$$r > 0.$$

Пусть теперь

$$r - \alpha(w_2 - w_1 + \Delta) < 0.$$

Тогда на основании (2.15)

$$r = 0$$

и, значит,

$$w_1 - w_2 - \Delta < 0.$$

С использованием функции Грина (2.5) из (2.9)₁ – (2.9)₂ находим

$$\begin{aligned} w_1(x) &= p_0 \int_0^l G(x, \xi) d\xi - \int_0^l G(x, \xi) r(\xi) d\xi, \\ w_2(x) &= \int_0^l G(x, \xi) r(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Исключив с помощью этих формул $w_1(x)$, $w_2(x)$ из уравнения (2.15), приходим к следующему разрешающему уравнению относительно реакции $r(x)$:

$$r(x) = \{r(x) - \alpha[2 \int_0^l G(x, \xi) r(\xi) d\xi - p_0 \int_0^l G(x, \xi) d\xi + \Delta]\}_+, \alpha > 0. \quad (2.17)$$

Для решения уравнения (2.17) естественно воспользоваться методом простых итераций

$$\begin{aligned} r^{(k)} &= \{r^{(k-1)} - \alpha[2 \int_0^l G(x, \xi) r^{(k-1)} d\xi - \\ &- p_0 \int_0^l G(x, \xi) d\xi + \Delta]\}_+, \alpha > 0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

При этом очевидно, что последовательность $r^{(k)}$ не сходится ни в каком разумном смысле, в силу того, что выражение для $r(x)$ содержит δ -функцию (см. форм. (2.8)). Однако последовательности

$$\begin{aligned} w_1^{(k)}(x) &= p_0 \int_0^l G(x, \xi) d\xi - \int_0^l G(x, \xi) r^{(k)}(\xi) d\xi, \\ w_2^{(k)}(x) &= \int_0^l G(x, \xi) r^{(k)}(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (2.19)$$

сходятся с определенным числом производных, так как обращение операторов краевых задач (2.9)₁, (2.9)₂ (что осуществляется с использованием функции Грина) сводится к четырехкратному интегрированию функции $r(x)$.

Рассмотренная задача допускает следующее обобщение:

$$A_1 u_1 = f_1 - r, \quad (2.20)_1$$

$$A_2 u_2 = f_2 + r, \quad (2.20)_2$$

$$r \geq 0, \quad (2.20)_3$$

$$u_1 - u_2 - \Delta \leq 0, \quad \Delta \geq 0, \quad (2.20)_4$$

$$(r, u_1 - u_2 - \Delta) = 0. \quad (2.20)_5$$

К системе (2.20) сводятся постановки многих задач о контактном взаимодействии гибких элементов конструкций. При этом (2.20)₁, (2.20)₂ – операторные уравнения краевых задач статики названных элементов конструкции в смещениях. Условие (2.20)₃ указывает на односторонность связи. Неравенство (2.20)₄ является условием непроникновения одного элемента через другой. И, наконец, условие дополняющей нежесткости (2.20)₅, устанавливает связь между неравенством (2.20)₃ и (2.20)₄: если $r > 0$, то $u_1 - u_2 - \Delta = 0$, если же $u_1 - u_2 - \Delta < 0$, то $r = 0$.

Как и выше показывается, что условие (2.20)₃ – (2.20)₅ будут выполняться, если r удовлетворяет уравнению

$$r = \{r - \alpha(u_2 - u_1 + \Delta)\}_+, \quad \alpha > 0, \quad (2.21)$$

Функция $r(P)$, $P \in \Omega$, определяемая уравнением (2.21), обеспечивающим выполнение условий (2.20)₃ – (2.20)₅, называется *обобщенной реакцией* [9].

Используя уравнение обобщенной реакции, систему уравнений и неравенств можно заменить следующей согласованной системой уравнений:

$$\begin{cases} A_1 u_1 = f_1 - r \\ A_2 u_2 = f_2 + r \\ r = \{r - \alpha(u_2 - u_1 + \Delta)\}_+, \alpha > 0 \end{cases} \quad (2.22)$$

Ниже предполагаем, что A_1, A_2 – положительно определенные операторы, действующие из пространства $L_2(\Omega)$:

$$(A_i u, u) \geq \gamma_i^2 \|u\|^2 \quad \forall u \in D_{A_i}.$$

Как известно [36], такие операторы могут быть расширены до самосопряженных. Считаем, что соответствующее расширение операторов

A_1, A_2 выполнено. При этих условиях существуют самосопряженные обратные операторы A_1^{-1}, A_2^{-1} , такие, что

$$\|A_i^{-1}\| \leq \gamma_i^{-2}, \quad i = 1, 2.$$

С учетом сказанного, третье уравнение (2.22) можно представить в виде

$$r = \{r - \alpha\Phi'r\}_+, \alpha > 0, \quad (2.23)$$

где

$$\Phi'r = A_2^{-1}(f_2 + r) - A_1^{-1}(f_1 - r) + \Delta, \quad (2.23')$$

Восстановим функционал $\Phi(r)$ по его слабой производной $\Phi'r$. Имеем

$$\Phi(r) = \frac{1}{2}(A_1^{-1}(f_1 - r), f_1 - r) + \frac{1}{2}(A_2^{-1}(f_2 + r), f_2 + r) + (r, \Delta). \quad (2.24)$$

Очевидно, что $\Phi(r) \geq 0$, если $r \in M\{r \geq 0\}$, и, следовательно, существует

$$\inf_{r \in M} \Phi(r) \triangleq \Phi_*. \quad (2.25)$$

Нетрудно убедиться также, что функционал $\Phi(r)$ является строго выпуклым.

Образуем на основании уравнения (2.23) итерационную схему

$$r^{(k+1)} = \{r^{(k)} - \alpha\Phi'r^{(k)}\}_+, \alpha > 0 \quad (2.26)$$

и покажем, что $\{r^{(k)}\}$ является минимизирующей последовательностью (μ -последовательностью) для функционала $\Phi(r)$.

Справедливы следующие леммы [37].

Лемма 1. Имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi(r^{(k)}) &\triangleq \Phi_r \geq \Phi_*; \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \|r^{(k+1)} - r^{(k)}\| &= 0; \\ \lim_{k \rightarrow \infty} (\Phi'r^{(k)}, r^{(k+1)} - r^{(k)}) &= 0. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Лемма 2. Выполняется оценка

$$\|r^{(k)} - s^{(k)}\| < \rho_c = const, \quad (2.28)$$

где

$$s^{(k+1)} = \{s^{(k)} - \alpha\Phi's^{(k)}\}_+, \alpha > 0$$

(последовательность $\{s^{(k)}\}$ отличается от $\{r^{(k)}\}$ лишь выбором начального приближения $s^{(0)}$, о чем будет сказано ниже).

Теорема 1. Последовательность $\{r^{(k)}\} \subset M$ является минимизирующей для функционала $\Phi(r)$.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательный функционал

$$\Psi(z) = \frac{1}{2} \|z - (r^{(k)} - \alpha\Phi'r^{(k)})\|^2, \quad z \in M.$$

Как известно [37], необходимое и достаточное условие минимума этого функционала можно записать в виде т.н. вариационного неравенства

$$(\Psi'r^{(k+1)}, z - r^{(k+1)}) \geq 0 \quad \forall z \in M, \quad (2.29)$$

где

$$\Psi'r^{(k+1)} = r^{(k+1)} - r^{(k)} + \alpha\Phi'r^{(k)}.$$

Полагая $z = s^{(k)}$ в неравенстве (2.29), получим

$$(r^{(k+1)} - r^{(k)} + \alpha\Phi'r^{(k)}, s^{(k)} - r^{(k)} - r^{(k+1)} + r^{(k)}) \geq 0$$

или

$$\begin{aligned} \alpha(\Phi'r^{(k)}, s^{(k)} - r^{(k)}) &\geq \|r^{(k+1)} - r^{(k)}\|^2 + \\ &+ (r^{(k+1)} - r^{(k)}, r^{(k)} - s^{(k)}) + \alpha(\Phi'r^{(k)}, r^{(k+1)} - r^{(k)}). \end{aligned}$$

Переходя здесь к пределу, с учетом соотношений (2.27) – (2.28), будем иметь

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\Phi'r^{(k)}, s^{(k)} - r^{(k)}) \geq 0.$$

Условие выпуклости функционала $\Phi(r)$ можно записать так:

$$\Phi(r) \geq \Phi(r^{(k)}) + (\Phi'r^{(k)}, r - r^{(k)}).$$

Отсюда при $r = s^{(k)}$ имеем

$$\Phi(s^{(k)}) \geq \Phi(r^{(k)}) + (\Phi'r^{(k)}, s^{(k)} - r^{(k)}).$$

Переходя здесь к пределу с учетом (2.28), получим

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi(s^{(k)}) \triangleq \Phi_s \geq \Phi_r. \quad (2.30)$$

Относительно $s^{(0)}$ примем следующее предположение:

$$\Phi(s^{(0)}) \leq \Phi_* + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0. \quad (2.31)$$

С учетом неравенств (2.30), (2.31) окончательно имеем

$$\Phi_* \leq \Phi_r \leq \Phi_s \leq \Phi(s^{(o)}) \leq \Phi_* + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \blacksquare$$

Используя последовательность $\{r^{(k)}\}$ можно построить последовательности для перемещений $\{u_i^{(k)}\}$, $i = 1, 2$ по формулам

$$u_1^{(k)} = A_1^{-1}(f_1 - r^{(k)}), \quad u_2^{(k)} = A_2^{-1}(f_2 + r^{(k)}). \quad (2.32)$$

Покажем, что последовательности (2.32) сходятся. Действительно, из легко устанавливаемого неравенства

$$\begin{aligned} & \Phi\left(\frac{r^{(k)} + r^{(j)}}{2}\right) - \frac{1}{2}\Phi(r^{(k)}) - \frac{1}{2}\Phi(r^{(j)}) \leq \\ & \leq \frac{1}{8}\gamma_1^2 \|u_1^{(k)} - u_1^{(j)}\|^2 - \frac{1}{8}\gamma_2^2 \|u_2^{(k)} - u_2^{(j)}\|^2 \end{aligned}$$

с учетом того, что

$$\lim_{k, j \rightarrow \infty} \Phi\left(\frac{r^{(k)} + r^{(j)}}{2}\right) = \Phi_*,$$

и в силу полноты пространства $L_2(\Omega)$ следует существование пределов

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_i^{(k)} \triangleq u_i^*, \quad i = 1, 2. \quad \blacksquare \quad (2.33)$$

Далее показано, что u_i^* , $i = 1, 2$ удовлетворяет условию

$$u_1^* - u_2^* - \Delta \leq 0$$

и что для любых конструктивно допустимых перемещений \bar{u}_i , $i = 1, 2$, т.е. удовлетворяющих кроме прочего условию

$$u_1 - u_2 - \Delta \leq 0,$$

выполняется неравенство

$$J(u_1^*, u_2^*) \leq J(\bar{u}_1, \bar{u}_2),$$

где

$$J(u_1, u_2) = \frac{1}{2}(A_1 u_1, u_1) + \frac{1}{2}(A_2 u_2, u_2) - (f_1, u_1) - (f_2, u_2).$$

Таким образом, доказано, что решение задачи

$$J(u_1, u_2) \longrightarrow \min_{u_1 - u_2 - \Delta < 0},$$

а значит, и задачи (2.20), составляют функции

$$u_1^* = \lim_{k \rightarrow \infty} A_1^{-1}(f_1 - r^{(k)}), \quad u_2^* = \lim_{k \rightarrow \infty} A_2^{-1}(f_2 + r^{(k)}),$$

где

$$r^{(k)} = \{r^{(k-1)} - \alpha \Phi' r^{(k-1)}\}_+, \quad \alpha > 0.$$

2.4. Примеры применения метода обобщенной реакции

Метод обобщенной реакции достаточно широко апробирован решением конкретных задач со свободной границей с использованием кирхгофской теории пластин и оболочек. Приведем здесь результаты решения двух задач, имеющих непосредственное отношение к проблеме прочности и надежности горизонтальных автоклавов.

2.4.1. Оболочка, подкреплённая кольцом жесткости одностороннего действия

Из практики эксплуатации оболочечных конструкций известно, что ребра жесткости, неразрывно связанные с оболочкой, являются концентраторами напряжений. Поэтому при возможности оболочки подкрепляют ребрами одностороннего действия. Расчет таких конструкций сводится к решению контактных задач с неизвестной областью активного взаимодействия.

Предположим, что шарнирно опертая цилиндрическая оболочка длиной l и радиусом R подкреплена в центральной части кольцом постоянной жесткости толщиной h_c и шириной $2a$ (рис.2.3).

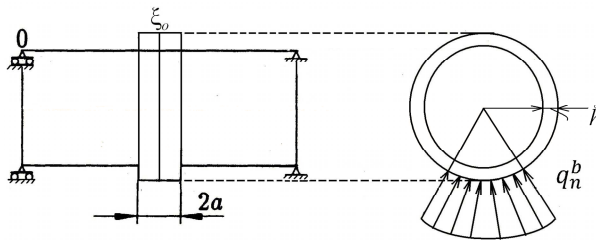


Рис. 2.3.

Уравнение обобщенной реакции можно представить в виде

$$r(\varphi) = \left\{ r(\varphi) - \alpha \left[\int_0^{2\pi} G^b(\varphi, \beta) q_n^b(\beta) d\beta - \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^{2\xi_0} \int_0^{2\pi} (\Delta^2 G)(\xi_0, \varphi; \alpha, \beta) q_n(\alpha, \beta) d\alpha d\beta + \\
 & + \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{R} (\Delta^2 G)(\xi_0, \varphi; \xi_0, \beta) + G^b(\varphi, \beta) \right) r(\beta) d\beta \Bigg]_+ , \quad \alpha > 0. \quad (2.34)
 \end{aligned}$$

Здесь $G^b(\varphi, \beta)$; $G(\xi, \varphi; \alpha, \beta)$ – функции Грина для краевых задач изгиба кольца и оболочки:

$$G^b(\varphi, \beta) = \frac{R^4}{\pi K_\nu} \sum_{k \neq 1}^{\infty} \frac{\cos k\varphi \cos k\beta}{(k^2 - 1)^2},$$

$\xi = x/R$, $\xi_0 = l/2R$, K_ν – жесткость кольца при изгибе;

$$\begin{aligned}
 G(\xi, \varphi; \alpha, \beta) &= \frac{R^4}{\pi \xi_0 d_0} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin m_* \xi \cos k\varphi \sin m_* \alpha \cos k\beta}{\Delta_{km}}, \\
 \Delta_{km} &= (m_*^2 + k^2)^4 + 4b^4 m_*^4; \quad m_* = m\pi R/l. \quad (2.35)
 \end{aligned}$$

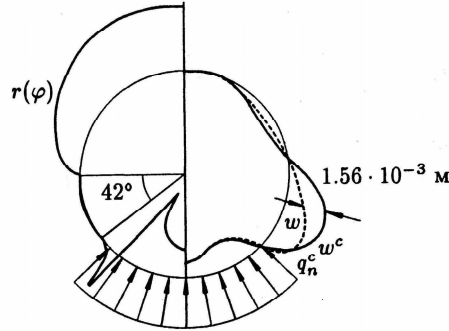


Рис. 2.4.

На рис. 2.4 показаны графики погонных реакций кольца (—) и оболочки в сечении $\xi = \xi_0$ (- - - -) при следующих значениях параметров конструкции и нагрузки:

$$h = 0.01\text{м}, R = 1.8\text{м}, l = 6\text{м}, a = 0.025\text{м}, h_0 = 0.1\text{м}, q_n = 0,$$

$$q_n^b = \begin{cases} -3 \cdot 10^5 \text{ Н/м} & \text{при } \varphi \in [-\pi/4, \pi/4] \\ 0 & \text{при } \varphi \notin [-\pi/4, \pi/4]. \end{cases}$$

Приведенные в виде графиков на рис. 2.4 результаты получены после 3000 итераций при $\alpha = 0.25$. Из графиков отчетливо виден отход кольца от оболочки (по расчетам при $|\varphi| \in (54^\circ, 104^\circ)$). Усматривается

также появление локального изгибающего момента, действующего на кольцо вблизи границы его контакта с оболочкой.

2.4.2. Цилиндрическая оболочка, свободно лежащая на опоре

Рассмотрим тяжелую замкнутую цилиндрическую оболочку, свободно лежащую в средней части на опоре в виде подкладной плиты переменной толщины $h_o(\varphi) = h_o(-\varphi)$, опирающейся, в свою очередь, при $|\varphi| \leq \varphi_o$ на упругоподатливую тумбу (рис. 2.5).

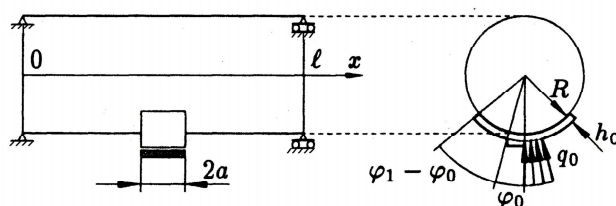


Рис. 2.5.

В силу симметрии конструкции относительно сечения $\xi = \xi_o$ и малой ширины подкладной плиты ($2a/l \ll 1$) в последней реализуется цилиндрический изгиб, адекватно описываемый гипотезой плоских сечений.

Радиальные перемещения точек подкладной плиты можно представить формулой

$$w^b(\varphi) = u(\varphi) + a_y \cos \varphi, \quad a_y = \text{const.} \quad (2.36)$$

Вычисляя равнодействующую всех сил, приложенных к плите, и принимая жесткость опоры на просадку равной $c = \text{const}$, находим

$$a_y = \frac{2R}{c} \int_0^{\varphi_1} (q_n^b(\varphi) + r(\varphi)) \cos \varphi d\varphi.$$

С учетом соотношения (2.36) краевую задачу для подкладной плиты можно сформулировать так [20]:

$$\frac{1}{R^4} \Delta_o K_\nu \Delta_o u(\varphi) = q_n^b(\varphi) + r(\varphi), \quad \varphi \in [0, \varphi_1],$$

$$u(0) = 0, u'(0) = 0, (K_\nu \Delta_o u)(\varphi_1) = 0, (K_\nu \Delta_o u)'(\varphi_1) = 0.$$

Соответствующая этой краевой задаче функция Грина $G_o(\alpha, \beta)$ может быть найдена путем последовательного решения следующих начальных задач:

$$\Delta_o \mu(\varphi) = R^4 \delta(\varphi - \beta), \quad \mu(\varphi_1) = 0, \quad \mu(\varphi_1)' = 0;$$

$$\Delta_{\circ}G_{\circ} = \mu(\varphi, \beta)/K_{\nu}(\varphi), \quad G_{\circ}(0, \beta) = 0, \quad G'_{\circ}(0, \beta) = 0.$$

Используя решения эталонной начальной задачи

$$\Delta_{\circ}v = f(\varphi), \quad v(\varphi_{\circ}) = 0, \quad v'(\varphi_{\circ}) = 0$$

в виде

$$v(\varphi) = \int_{\varphi_{\circ}}^{\varphi} f(t) \sin(\varphi - t) dt,$$

нетрудно получить окончательную формулу для искомой функции Грина:

$$G_{\circ}(\varphi, \beta) = \begin{cases} S(\varphi) & \text{при } \varphi \leq \beta \\ S(\beta) & \text{при } \varphi \geq \beta, \end{cases}$$

где

$$S(x) = \int_0^x \frac{R^4}{K_{\nu}(t)} \sin(t - \varphi) \sin(t - \beta) dt$$

Функции Грина для краевой задачи, описывающей изгиб цилиндрической оболочки, сохраняет вид (2.35).

Окончательно уравнение относительно реакций подкладной плиты $r(\varphi)$ можно записать так:

$$\begin{aligned} r(\varphi) = & \left\{ r(\varphi) - \alpha \left[\int_0^{\varphi_1} (G_{\circ}(\varphi, \beta) + \frac{2R}{c} \cos \varphi \cos \beta) q_n^b(\beta) d\beta - \right. \right. \\ & \left. \left. - \int_0^{2\xi_{\circ}} \int_0^{2\pi} (\Delta^2 G)(\xi_{\circ}, \varphi; \alpha, \beta) q_n(\alpha, \beta) d\alpha d\beta + \right. \right. \\ & \left. \left. + \int_0^{\varphi_1} \left(\frac{2}{R} (\Delta^2 G)(\xi_{\circ}, \varphi; \xi_{\circ}, \beta) + G_{\circ}(\varphi, \beta) + \frac{2R}{c} \cos \varphi \cos \beta \right) r(\beta) d\beta \right] \right\}_+. \end{aligned}$$

В численном эксперименте рассматривалась шарнирно опертая цилиндрическая оболочка, испытывающая действие равномерного внутреннего давления (p). Предусмотрена возможность учитывать равномерно распределенную массу оболочки (q_y). Толщина подкладной плиты принималась постоянной, а внешняя погонная нагрузка на нее – кусочно-постоянной (см. рис. 2.5):

$$q_n^b = \begin{cases} -2q_{\circ} a \varphi_{\circ}, & \text{при } |\alpha| \leq \alpha_{\circ} \\ 0, & \text{при } |\alpha| > \alpha_{\circ}. \end{cases}$$

Вычисления выполнялись при следующих значениях параметров конструкции и нагрузки:

$$R = 1.8 \text{ м}, \quad l = 5 \text{ м}, \quad h = (2.3 \div 3.5) \cdot 10^{-2} \text{ м},$$

$$h_0 = 0.1 \text{ м}, \quad a = 5 \cdot 10^{-2} \text{ м}, \quad \varphi_0 = 15^\circ, \quad \varphi_1 = 30^\circ \div 50^\circ,$$

$$q_0 = 382 \text{ кН/м}, \quad c = 5 \cdot 10^3 \text{ кН/м}, \quad p = 1.2 \text{ МПа}, \quad q_y = 0.$$

Как и в первой задаче (см. рис.2.4), наблюдается появление локального изгибающего момента, действующего на опору вблизи границы ее контакта (отмеченной пунктирным лучом, рис. 2.6) с корпусом сосуда давления. Этот эффект впервые подмечен, видимо, в работе [38] при рассмотрении контактной задачи для двух круговых пластин и связан с невозможностью удовлетворения граничным условиям по моментам на стыке контактирующей и свободной от нагрузки частей гибкого элемента.

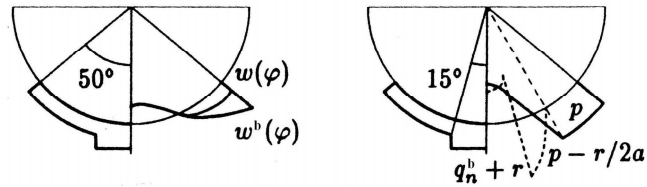


Рис. 2.6.

На рис. 2.6 показаны прогибы кольцевой опоры $w^b(\varphi)$ и оболочки $w(\xi_0, \varphi)$, а также погонная нагрузка на опору $q_n^b(\varphi) + r(\varphi)$ и удельная нагрузка на оболочку $p(\xi, \varphi) - r(\varphi)/2a$ в сечении $\xi = \xi_0$ при $h = 2.8 \cdot 10^{-2}$ м и $\varphi_1 = 50^\circ$.

2.5. Влияние учета трансверсальных деформаций на распределение контактных реакций

2.5.1. Контактная задача для цилиндрической изгибаемой пластины (аналитическое решение)

Рассмотрим задачу, решенную в подразделе 2.1, с позиции теории типа Тимошенко–Нагди. В соответствии с этой теорией линейный цилиндрический изгиб пластины описывается уравнениями (см.(1.20))

$$w^{IV} = p_n - h_*^2 p_n'', \quad (2.37)_1$$

$$\Phi^{IV} = \nu m_n'', \quad (2.37)_2$$

$$\psi_1' = -h_\psi^2 p_n, \quad (2.37)_3$$

где $w(x)$, $\Phi(x)$, $\psi_1(x)$ – соответственно прогиб пластины, функция напряжений, изменение первоначально прямого угла между осями x_1 и x_3 (поперечный сдвиг);

$$()' = \frac{d()}{dx}, \quad p_n = \frac{q_n}{d_o}, \quad h_*^2 = h_\psi^2 - h_\lambda^2. \quad (2.37)'$$

С использованием замены

$$w = \hat{w} - h_*^2 \hat{w} \quad (2.38)$$

контактную задачу для равномерно нагруженной шарнирно опертой пластины можно записать в виде

$$\hat{w}^{IV} = p_n = p_o - r(x), \quad x \in (0, l); \quad (2.39)_1$$

$$\hat{w}(0) = 0, \quad \hat{w}''(0) = 0, \quad \hat{w}'(l) = 0, \quad \hat{w}'''(l) = 0 \quad (2.39)_2$$

Здесь учтено, в частности, что граничные условия шарнирного опирания имеют вид (см. (1.18), (2.37)₁, (2.38), (2.39)₁)

$$\begin{aligned} \tilde{M}_{11} &= M_{11} + h_\lambda^2 q_n = -d_o w'' + d_o \psi_1' + h_\lambda^2 q_n = \\ &= -d_o (w'' + h_*^2 p_n) = -d_o (\hat{w}'' - h_*^2 \hat{w}^{IV} + h_*^2 p_n) = \\ &= \underline{-d_o \hat{w}''} = 0, \\ w &= \hat{w} - h_*^2 \hat{w}'' = \underline{\hat{w}} = 0, \end{aligned}$$

и введены обозначения

$$p_o = q_n^+ / d_o = const, \quad r(x) = q_n^- / d_o. \quad (2.40)$$

При этом на участке выстилания $[x_o, l]$ предполагается выполнение условий:

— выстилания

$$w^{-\check{h}/2}(x) = \Delta, \quad x \in [x_o, l]; \quad (2.41)_1$$

— отсутствия излома лицевой поверхности $\zeta = -\check{h}/2$ при $x = x_o$

$$(w^{-\check{h}/2})'(x_o - 0) = 0; \quad (2.41)_2$$

— сопряжения по срединной поверхности правой и левой частей пластины

$$w(x_o - 0) = w(x_o + 0),$$

$$-w'(x_c - 0) + \psi_1(x_o - 0) = -w'(x_o + 0) + \psi_1(x_o + 0). \quad (2.41)_3$$

С использованием формулы (1.4) условие (2.41)₁ приводится к виду

$$\begin{aligned} L\hat{w} &= (h_\lambda^4 - 9/8(1 - 2\lambda)h_\psi^4)\hat{w}^{IV} - (h_\psi^2 - 2h_\lambda^2)\hat{w}'' + \hat{w} = \\ &= \Delta + 3/2(1 - 2\lambda)h_\psi^4 p_o. \end{aligned} \quad (2.42)$$

С учетом симметрии полный интеграл уравнения (2.42) выражается формулой ($x \in [x_o, l]$)

$$\hat{w}(x) = \Delta + 3/2(1 - 2\lambda)h_\psi^4 p_o + \tilde{C}_1 \Phi_1 + \tilde{C}_2 \Phi_2;$$

где

$$\Phi_i(x) : L\Phi_i = 0, \quad \Phi_i(x) = \Phi_i(2l - x), \quad i = 1, 2.$$

Из уравнения (2.39)₁ при этом следует, что ($x \in [x_o, l]$)

$$r(x) = p_c - \tilde{C}_1 \Phi_1^{IV} - \tilde{C}_2 \Phi_2^{IV} = p_o - C_1 \Phi_1 - C_2 \Phi_2 \quad (2.43)$$

На основании формулы (2.43) выражение для контактной реакции в общем случае имеет вид

$$r(x) = R_o \delta(x - x_o) + (p_c - C_1 \Phi_1 - C_2 \Phi_2) H(x - x_o), \quad (2.44)$$

где R_o – сосредоточенная реакция на границе области контакта.

Подставляя $r(x)$ из (2.43) в уравнение (2.39)₁ и разрешая последнее с использованием функции Грина (2.5), получим

$$\hat{w} = \begin{cases} f_1(R_o, x_o, C_1, C_2; x), & \text{при } x \geq x_o \\ f_2(R_o, x_o, C_1, C_2; x), & \text{при } x \leq x_o. \end{cases} \quad (2.45)$$

При этом легко проверяется выполнение условий

$$\hat{w}^k(x_c - 0) = \hat{w}^k(x_c + 0), \quad k = 0, 1, 2.$$

Подставляя в уравнение (2.39)₁ $\hat{w} = f_1$ из (2.45) и приравнявая в полученном равенстве коэффициенты при одинаковых степенях x справа и слева, получим два равенства вида

$$\begin{aligned} f_{11}(x_o, h_*^2, C_1, C_2) &= \Delta + \frac{3}{2}(1 - 2\nu)h_\psi^2 p_o + \\ &+ \frac{1}{24}p_o x_o^4 \left(1 - 24 \frac{h_*^2}{x_o^2}\right) - \frac{1}{6}R_o x_o^3 \left(1 - 12 \frac{h_*^2}{x_o^2}\right), \end{aligned} \quad (2.46)_1$$

$$f_{12}(x_o, C_1, C_2) = R_o x_o - \frac{1}{2} p_o x_o^2. \quad (2.46)_2$$

□ Если сравнить соотношения, использованные при выводе формул (2.45), с соответствующими соотношениями классической теории пластин (см. подраздел **2.1**), можно убедиться, что в последних отсутствуют параметры $h_*^2, h_\psi^2, C_1, C_2$. Полагая в уравнениях (2.46)₁, (2.46)₂ $h_*^2 = 0, h_\psi^2 = 0, C_1 = C_2 = 0$, получим

$$\Delta + \frac{1}{24} p_o x_o^4 - \frac{1}{6} R_o x_o^3 = 0, \quad R_o x_o - \frac{1}{2} p_o x_o^2 = 0,$$

откуда сразу следуют формулы (2.7). ■

Далее условие (2.41)₂ с учетом уравнений $\hat{w} = f_1$ из (2.45) и (2.46)₂ можно представить в виде

$$f_3(x_o, h_\lambda^2, h_\psi^2, C_1, C_2) = 0. \quad (2.46)_3$$

Таким образом, получены три уравнения (2.46) относительно четырех неизвестных x_o, R_o, C_1, C_2 . Неиспользованными остались два условия сопряжения (2.41)₃. На основании формулы (2.45) первое из названных условий выполняется тождественно.

Используя уравнения (2.37)₃ и (2.38), можно записать

$$\psi_1 = -h_\psi^2 \int (p_o - r(x)) dx + C_3,$$

$$w' = \hat{w}' - h_*^2 \int (p_o - r(x)) dx + C_4,$$

где (см. форм. (2.37), (2.38))

$$\begin{aligned} \int (p_o - r(x)) dx &= p_o x + p_o (x - x_o) H(x - x_o) - R_o H(x - x_o) + \\ &+ [\tilde{C}_1 (\Phi_1'''(x) - \Phi_1'''(x_o)) + \tilde{C}_2 (\Phi_2'''(x) - \Phi_2'''(x_o))] H(x - x_o). \end{aligned}$$

С учетом этих формул второе условие из (2.41)₃ принимает вид

$$h_\lambda^2 \int (p_o - r(x)) dx \Big|_{x_o-0}^{x_o+0} = h_\lambda^2 R_o = 0,$$

или

$$R_o = 0. \quad (2.47)$$

При выполнении (2.47) система (2.46) является согласованной по отношению к неизвестным x_o, C_1, C_2 .

□ Отсутствие сосредоточенной силы на краю области контакта обосновано в рассматриваемой задаче для случая одновременного учета поперечного обжатия и поперечных сдвигов. Нетрудно сообразить, что условие (2.47) выполняется и в случае учета лишь поперечного обжатия. Если же из трансверсальных деформаций учитываются только сдвиги, то условие выстилания $(2.41)_1$ заменяется следующим:

$$w(x) + 1/2\overset{\circ}{h} = \Delta,$$

откуда с учетом прочих условий (2.41) также следует выполнение равенства (2.47) [39]. ■

С использованием системы (2.46) и ей аналогичных при учете лишь обжатия или поперечных сдвигов проводился численный эксперимент. Принимались следующие значения параметров:

$$l = 1 \text{ м}, \quad \overset{\circ}{h} = 10^{-2} \text{ м}, \quad \Delta = 10^{-3} \text{ м}, \quad E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа} \quad (2.48)$$

при различных значениях коэффициента Пуассона ν и нагрузки $q_0 = d_0 p_0$.

Характерные распределения реакций (при $\nu = 0.3$) показано на рисунках:

- 2.7 – учет поперечного обжатия;
- 2.8 – учет поперечного обжатия и сдвигов;
- 2.9 – учет поперечных сдвигов.

Эксперимент показал, что в первом и втором случаях (т.е. при учете поперечного обжатия) предложенный алгоритм не при любой внешней нагрузке $q_0 = d_0 p_0$ приводит к допустимому решению $r(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0, l]$. Однако при любых значениях исходных параметров можно подобрать такое значение нагрузки $q_0 = q^*$ (*т.н. нижняя нагрузка односвязного контакта*) после превышения, которого условие $r(x) \geq 0$ начинает выполняться.

Подмечено, что учету лишь обжатия отвечают более высокие значения q^* , чем совместному учету обжатия и сдвигов. При этом расстояние от опоры до границы области контакта практически не отличается от получаемого по теории Кирхгофа (см. форм.(2.7) и рис. 2.7–2.9). Однако значения реакций на границе области контакта в отличие от классической теории являются пиковыми, но *конечными*. Этот эффект не может быть выявлен при использовании, например, метода обобщенной реакции, который, будучи итерационными, не позволяет идентифицировать сосредоточенные силы. Тем самым полученное аналитическое решение имеет принципиальное значение, подтверждая, что уточнения теории

пластин и оболочек, связанные с учетом трансверсальных деформаций, могут оказаться существенными, во всяком случае, для задач свободного контактного взаимодействия.

В данной работе, носящей обзорный характер, не представляется возможным детально изложить рассматриваемое аналитическое решение. За подробностями в случае необходимости можно обратиться к первоисточнику [37].

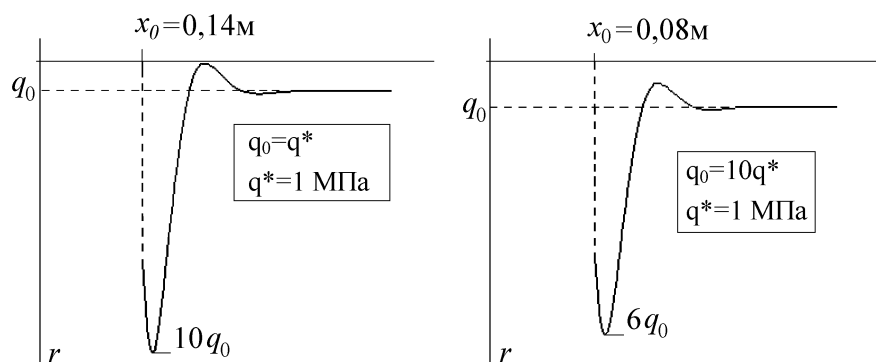


Рис. 2.7.

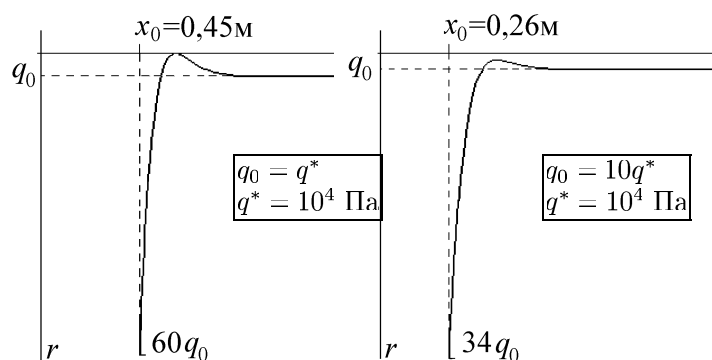


Рис. 2.8.

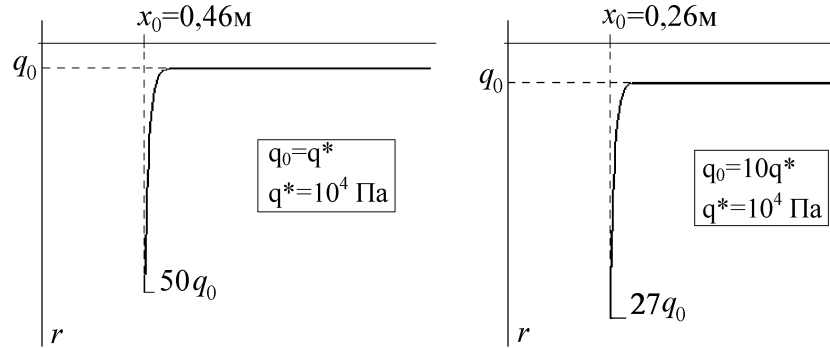


Рис. 2.9.

2.5.2. Метод обобщенной реакции в контактной задаче для цилиндрически изгибаемой пластины

Предложенный выше алгоритм при учете поперечного обжатия не дает допустимых решений ($r \geq 0$) при нагрузках меньше q^* . С целью выявления характера распределения контактных реакций при $q_0 < q^*$ был применен метод обобщенной реакции.

Рассмотрим краевую задачу (2.39) при следующих дополнительных условиях (см. также (2.38)):

$$r(x) \geq 0, \quad w^{-\hat{h}/2}(x) \leq \Delta, \quad r(x)(w^{-\hat{h}/2} - \Delta) = 0.$$

Как уже обсуждалось, эти условия выполняются, если положить

$$r = \{r - \alpha(\Delta - w^{-\hat{h}/2})\}_+.$$

Записывая последнее уравнение в развернутом виде, и применяя схему простых итераций, будем иметь

$$r^{(k)} = \left\{ r^{(k-1)} - \alpha \left[\Delta + Dd_0(p_0 + r^{(k-1)}) + \frac{\hat{h}}{4(\lambda - 2\mu)} d_0 r^{(k-1)} - \hat{w}^{(k-1)} - (2h_\lambda^2 - h_\psi^2)(\hat{w}^{(k-1)})'' \right] \right\}_+, \quad (2.49)$$

где (см. форм. (2.5))

$$\hat{w}^{(k-1)}(x) = d_0 \int_0^l G(x, \xi) (p_0 - r^{(k-1)}(\xi)) d\xi,$$

$$D = \frac{\overset{\circ}{h}}{8(\lambda + 2\mu)} + \frac{h_\lambda^2}{\mu \overset{\circ}{h}} - \frac{h_\lambda^2 h_*^2}{d_o}. \quad (2.49)'$$

В качестве начального приближения для итерационной схемы (2.49) принимались следующие выражения для искомых функций:

$$r^{(\circ)}(x) = 0, \quad \hat{w}^{(\circ)}(x) = d_o p_o \int_0^l G(x, \xi) d\xi.$$

Если при этом прогиб нижней лицевой плоскости оказывается меньше, чем зазор Δ , то контактная задача не состоялась и процесс (2.49) на этом прекращается.

С использованием итерационной схемы (2.49) в сочетании с конечно-разностной аппроксимацией проводился численный эксперимент при тех же значениях параметров конструкции и нагрузки, что и в случае аналитического решения (см. форм. (2.48)).

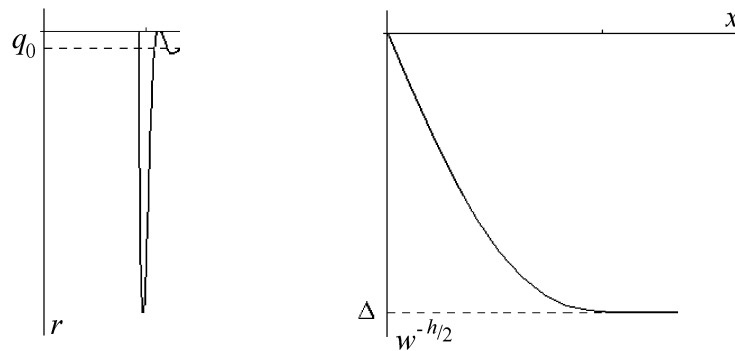


Рис. 2.10.

На рис. 2.10 показан характерный вид решения контактной задачи. На графике левого рисунка отчетливо виден участок, на котором $r(x) = 0$. И хотя по графику прогиба нельзя увидеть, что пластина на этом участке отходит от основания, все же значения прогиба здесь меньше зазора в течение всего вычислительного процесса. В связи со сказанным можно утверждать, что часто используемая при решении контактных задач гипотеза полного прилегания, вообще говоря, не выполняется.

Показано, что при воздействиях, превосходящих нижнюю нагрузку односвязного контакта графика прогибов и реакции, полученных аналитически и методом обобщенной реакции, согласуются между собой.

2.5.3. Осесимметричное контактное взаимодействие тонкой пластины с жестким основанием

Применим уравнения теории изгиба пластин типа М – Т – N к расчету НДС в круглой жестко заземленной пластине радиуса R и толщины $\overset{\circ}{h}$ при ее контакте с гладким жестким основанием в результате действия равномерно распределенной нормальной нагрузки [39, 42].

Вводя безразмерные полярные координаты и учитывая осесимметричность конструкции и нагрузки разрешающую, систему уравнений (1.20), (1.21) для случая плоской пластины можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned}\Delta^2 w &= \frac{R^4}{d_c} \left[q_n - \frac{h_*^2}{R^2} \Delta q_n + \left(I - \frac{h_\psi^2}{R^2} \Delta \right) \frac{1}{R^4} \Lambda(\Phi, w) \right], \\ \Delta^2 \Phi &= \nu R^2 \Delta m_n - \frac{1}{2} E \overset{\circ}{h} \Lambda(w, w), \\ \frac{1}{\rho} \frac{d(\rho \psi_\rho)}{d\rho} &= -\frac{R}{\mu \overset{\circ}{h}} \left[q_n + \frac{1}{R^4} \Lambda(\Phi, w) \right].\end{aligned}\quad (2.50)$$

Здесь

$$\begin{aligned}\Delta(\cdot) &= \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d(\cdot)}{d\rho} \right), \quad \Lambda(\Phi, w) = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{d\Phi}{d\rho} \frac{dw}{d\rho} \right), \\ \Lambda(w, w) &= \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{dw}{d\rho} \right)^2, \quad h_*^2 = h_\psi^2 - h_\lambda^2, \quad \rho \in [0, 1].\end{aligned}\quad (2.50')$$

Граничные условия жестко заземленного свободного в тангенциальном направлении края можно представить равенствами (см. форм. (1.15)₁; (1.22)₁; (1.24))

$$\begin{aligned}w(1) = 0, \quad \vartheta_\rho(1) &= -\frac{1}{\rho} w_{,\rho}(1) + \psi_\rho(1) = 0, \\ \Phi(1) = 0, \quad \Phi_{,\rho}(1) &= 0.\end{aligned}\quad (2.51)$$

Сделаем следующую замену:

$$w(\rho) = \tilde{w}(\rho) + R \bar{\psi}_\rho \rho^2 \ln \rho, \quad \psi_\rho = \psi_\rho(1).\quad (2.52)$$

Принимая во внимание, что функция $\rho^2 \ln \rho$ является бигармонической, систему (2.50) можно преобразовать так:

$$\Delta^2 \tilde{w} = \frac{1}{d_c} \left[R^4 q_n - h_*^2 R^2 \Delta q_n + \left(I - \frac{h_\psi^2}{R^2} \Delta \right) \Lambda(\Phi, \tilde{w} + R \bar{\psi}_\rho \rho^2 \ln \rho) \right],$$

$$\begin{aligned} \Delta^2 \Phi &= \nu R^2 \Delta m_n - \frac{1}{2} E \check{h} \Lambda(\tilde{w} + R \bar{\psi}_\rho \rho^2 \ln \rho, \tilde{w} + R \bar{\psi}_\rho \rho^2 \ln \rho), \\ \frac{1}{\rho} \frac{d(\rho \psi_\rho)}{d\rho} &= -\frac{R}{\mu \check{h}} \left[q_n + \frac{1}{R^4} \Lambda(\Phi, \tilde{w} + R \bar{\psi}_\rho \rho^2 \ln \rho) \right]. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Граничные условия (2.51) с учетом замены (2.52) принимают вид

$$\tilde{w}(1) = 0, \quad \tilde{w}_{,\rho}(1) = 0, \quad \Phi(1) = 0, \quad \Phi_{,\rho}(1) = 0. \quad (2.54)$$

Функция Грина для обращения операторов левых частей первых двух уравнений (2.53) с учетом граничных условий (2.54) определяется формулой [43]

$$G(\rho, \xi) = \frac{1}{8} \xi \begin{cases} 2(\rho^2 + \xi^2) \ln \xi + (1 + \rho^2)(1 - \xi^2), & \rho \leq \xi \\ 2(\rho^2 + \xi^2) \ln \rho + (1 + \xi^2)(1 - \rho^2), & \rho \geq \xi. \end{cases} \quad (2.55)$$

С использованием функции Грина (2.55) уравнения (2.53) трансформируются в интегродифференциальные относительно функций $\Phi(\rho)$, $\tilde{w}(\rho)$. Выполнив в этих последних уравнениях переход от $\tilde{w}(\rho)$ к $w(\rho)$ по формуле (2.52), получим

$$\begin{aligned} w(\rho) &= -R \bar{\psi}_\rho \rho^2 \ln \rho + \frac{1}{d_c} \int_0^1 \left[R^4 q_n - h_*^2 R^2 \Delta q_n + \right. \\ &\quad \left. + \left(I - \frac{h_\psi^2}{R^2} \Delta \right) \Lambda(\Phi, w) \right] (\xi) G(\rho, \xi) d\xi, \\ \Phi(\rho) &= \int_0^1 [\nu R^2 \Delta m_n - \frac{1}{2} E \check{h} \Lambda(w, w)] (\xi) G(\rho, \xi) d\xi, \\ \psi_\rho &= -\frac{R}{\mu \check{h}} \int_0^1 \rho \left[q_n + \frac{1}{R^4} \Lambda(\Phi, w) \right] d\rho. \end{aligned} \quad (2.56)$$

(Учтено, что в силу симметрии конструкции $\psi_\rho(0) = 0$.) Решение системы определялось с использованием итерационной схемы стационарного метода Ричардсона в сочетании с конечно-разностной аппроксимацией:

$$\begin{aligned} w^{(k)}(\rho) &= (1 - \tau) w^{(k-1)} - \tau R \bar{\psi}_\rho^{(k)} \rho^2 \ln \rho + \frac{\tau}{d_c} \int_0^1 \left[R^4 q_n - \right. \\ &\quad \left. - h_*^2 R^2 \Delta q_n + \left(I - \frac{h_\psi^2}{R^2} \Delta \right) \Lambda(\Phi^{(k)}, w^{(k-1)}) \right] G(\rho, \xi) d\xi, \quad \tau > 0, \end{aligned} \quad (2.57)$$

где

$$\Phi^{(k)}(\rho) = \int_0^1 [\nu R^2 \Delta m_n - \frac{1}{2} E \check{h} \Lambda(w^{(k)}, w^{(k-1)})] G(\rho, \xi) d\xi,$$

$$\bar{\psi}_\rho^{(k)} = -\frac{R}{\mu \dot{h}} \int_0^1 \rho \left[q_n + \frac{1}{R^4} \Lambda(\Phi^{(k)}, w^{(k)}) \right] d\rho,$$

$$w^{(0)}(\rho) = \frac{R^4}{d_\circ} \int_0^1 q_n(\xi) G(\rho, \xi) d\xi. \quad (2.57')$$

Итерационная схема (2.57) записана для общего случая, когда учитываются и поперечные сдвиги, и поперечное обжатие (теория типа Кармана – Тимошенко – Нагди). Если учитывается только поперечное обжатие, т.е. используется теория изгиба пластин Кармана – Нагди, то следует положить $h_\psi^2 = 0$, $h_*^2 = -h_\lambda^2$, $\bar{\psi}_\rho^{(k)} = 0$. Если же учитываются лишь поперечные сдвиги, то должны быть выполнены условия: $h_\lambda^2 = 0$, $h_*^2 = h_\psi^2$, $m_n = 0$.

Численные расчеты проводились при следующих значениях параметров:

$$R = 1 \text{ м}, \quad h = 0.05 \text{ м}, \quad \Delta = 0.1 \text{ м}, \quad E = 10^2 \text{ МПа}, \quad \nu = 0.3.$$

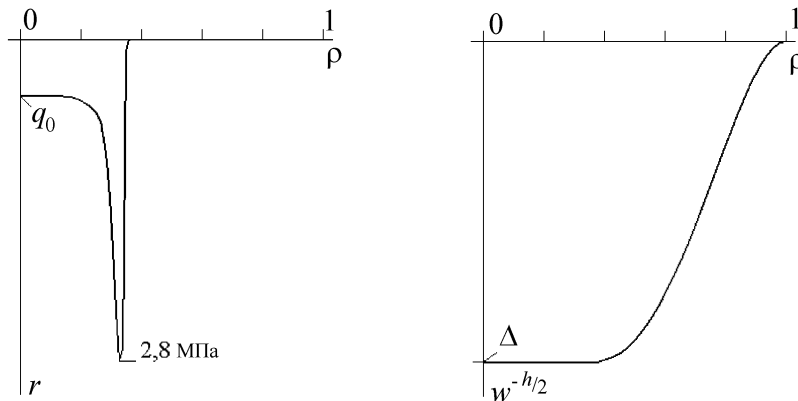


Рис. 2.11.

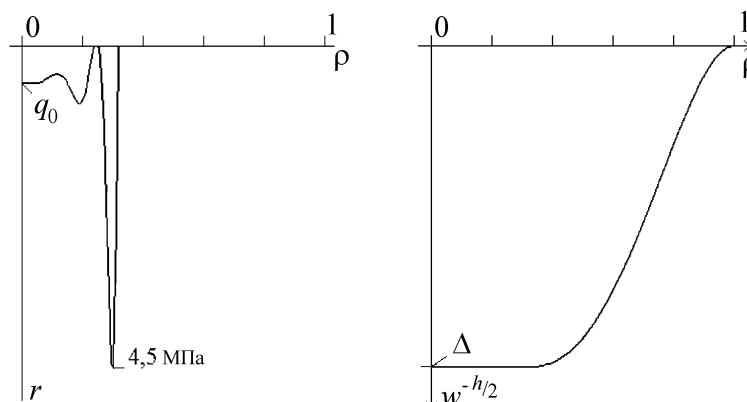


Рис. 2.12.

На рисунках 2.11, 2.12 показаны графики реакции основания и прогиба пластины при $q_0 = 5 \cdot 10^5$ Н/м, рассчитанные соответственно по теориям Кáрманна–Тимошенко и Кáрманна–Нагди. Очевидно, что графики качественно согласуются с построенными по результатам численного эксперимента для цилиндрически изгибаемой пластины (см. рис. 2.7 – 2.10).

Таким образом, подтвержден тезис, высказанный ранее по результатам расчетов параметров контактного взаимодействия цилиндрически изгибаемой пластины над жестким основанием: область свободного контакта пластины и жесткого гладкого основания при учете поперечного обжатия, вообще говоря, не является односвязной.

В заключении первой части статьи, учитывая, что работа носит обзорный характер, укажем на нецитированные выше источники [44–46], посвященные рассмотрению \mathfrak{M} -алгоритма учета трансверсальных деформаций, и – [46–48], в которых использовался метод обобщенной реакции для решения контактных задач.

Литература

1. **Корелин, Н.А.** Деформационная теория ребристых оболочек (нелинейный случай)/ Н.А. Корелин, Е.И. Михайловский. – Тезисы докл. III Всесоюз. конф. по нелинейной теории упругости. – Сыктывкар: Сыктывкарский ун-т, 1989. С. 23-25.

2. **Никитенков, В.Л.** Определение неизвестной границы в контактной задаче двух пластин/ В.Л.Никитенков, А.А. Холопов. – Тезисы докл. III Всесоюз. конф. по нелинейной теории упругости. – Сыктывкар: Сыктывкарский ун-т, 1989. С. 33-34.
3. **Михайловский, Е.И.** Метод обобщенной реакции в задаче с неизвестной границей контакта/ Е.И. Михайловский, В.Н. Тарасов.– Тезисы докл. III Всесоюз. конф. по нелинейной теории упругости. – Сыктывкар: Сыктывкарский ун-т, 1989. С. 80-81.
4. **Беляева, Н.А.** Анализ напряженного состояния в процессе формирования цилиндрических изделий с учетом совместного прое полимеризации и кристаллизации/ Н.А. Беляева, Л.В. Клычников, С.П. Давтян, С.И. Худяев.– Тезисы докл. III Всесоюз. конф. по нелинейной теории упругости. – Сыктывкар: Сыктывкарский ун-т, 1989. С. 51-53.
5. **Даль, Ю.М.** Валентин Валентинович Новожилов и его научная школа/ Ю.М. Даль, В.И. Зубов, Ю.И. Кадашевич, Е.И. Михайловский, Н.Ф. Морозов, В.Я. Павилайнен, В.А. Павловский, Л.И. Слепян, Н.С. Соломенко, К.Ф. Черных, В.А. Шамина. – С.-Петербург: НИИ химии СПбГУ, 1998. – 159 с.
6. **Михайловский, Е.И.** Контактные задачи для гибких элементов контрукций/ Е.И. Михайловский, В.Н. Тарасов// Проблемы нелинейной теории упругости.– Калинин: Изд-во Калинин. политехн. ин-та, 1989. – С. 100-108.
7. **Михайловский, Е.И.** Задача со свободной границей для оболочки, подкрепленной ребрами одностороннего действия/ Е.И. Михайловский, В.Н. Тарасов// В.В. Новожилов – ученый, педагог, гражданин.– Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1990. С. 121-128.
8. **Михайловский, Е.И.** Метод решения контактных задач с неизвестной областью взаимодействия// Новожиловский сб. (сб. трудов, посвящ. 80-летию акад. В.В. Новожилова)/ Е.И. Михайловский, В.Н. Тарасов. – СПб: Судостроение, 1992. С. 17-26.
9. **Михайловский, Е.И.** О сходимости метода обобщенной реакции в контактных задачах со свободной границей/ Е.И. Михайловский, В.Н. Тарасов//РАН. ПММ. – 1993 – Т. 57, вып. 1. – С. 128-136.

10. **Тарасов, В.Н.** Задачи на собственные значения для положительно однородных операторов/ В.Н. Тарасов// Вестн. Сыкт. ун-та. Сер.1. Мат. Мех. Инф. – 1995. – Вып. 1. – С. 192-204.
11. **Холмогоров, Д.В.** Устойчивость стержня на границе двух упругих сред/ Д.В. Холмогоров //Вестн. Сыкт. ун-та. Сер.1. Мат. Мех. Инф. – 1995. – Вып. 1. – С. 205-216.
12. **Холопов, А.А.** Минимальные формы потери устойчивости стержня на границе жесткой и упругой сред/ А.А. Холопов//Вестн. Сыкт. ун-та. Сер.1. Мат. Мех. Инф. – 1995. – Вып. 1. – С. 217-233.
13. **Черных, К.Ф.** Нелинейная теория изотропно упругих тонких оболочек / К.Ф. Черных//Изв. АН СССР. МТТ. – 1980. – №2. – С. 148-159.
- 14.* **Naghdi, P.M.** On the theory of thin elastic shell/ P.M. Nagdi// Quarterly of applied Mathematics. – 1957. – Vol. 14. – P. 369-380.
15. **Михайловский, Е.И.** Игнорирование гипотез Кирхгофа в нелинейной теории жесткогибких оболочек/ Е.И. Михайловский// Нелинейные проблемы механики и физики деформируемого твердого тела: тр. научн. школы акад. В.В. Новожилова – СПб: СПбГУ, 2000. – Вып. 2.– С. 131-160.
16. **Михайловский, Е.И.** Граничные условия подкрепленного края жесткогибкой оболочки в нелинейной теории типа Тимошенко-Рейсснера/ Е.И. Михайловский//Изв. РАН. МТТ. – 1995. – №2. – С. 109-119.
- 17.* **Беляев, Н.М.** Д.И. Журавский/ Н.М. Беляев//Люди русской науки: сб. ст. – М. - Л.: Гостехиздат, 1948. – Т. II. – С. 906-913.
- 18.* **Timoshenko, S.P.** On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bar/S.P. Timoshenko// Philosophical Magazin. – 1921. – Vol. 14, №6 – P. 744 -746.
- 19.* **Тимошенко, С.П.** Пластинки и оболочки/ С.П. Тимошенко, С. Войновский - Кригер. – М.: Физматгиз, 1963. – 636 с.

Звездочкой в списке литература помечены работы авторов, не являющихся представителями школы механики В.В. Новожилова

20. **Миронов, В.В.** Об оценке влияния учета поперечных деформаций в одной контактной задаче со свободной границей/ В.В. Миронов, Е.И. Михайловский//Изв. РАН. МТТ. – 2008. – №5. – С. 52-67.
21. **Новожилов, В.В.** О погрешности гипотез Кирхгофа в теории оболочек/ В.В. Новожилов, Р.М. Финкельштейн// АН СССР. ПММ. – 1943. – Т. VI, вып.5. – С. 331-340.
- 22.* **Гольденвейзер, А.Л.** Алгоритм асимптотического построения линейной двухмерной теории тонких оболочек и принцип Сен-Венана/ А. Л. Гольденвейзер// РАН. ПММ. – 1994. – Т. 58, вып.6. – С. 96-108.
23. **Михайловский, Е.И.** Математические модели механики упругих тел / Е.И. Михайловский. – Сыктывкар: Изд-во Сыкт. ун-та, 2007. – 516 с.
24. **Новожилов, В.В.** Теория упругости/ В.В. Новожилов. – Л.: Судпромгиз, 1956. – 370 с.
25. **Новожилов, В.В.** Линейная теория тонких оболочек/ В.В. Новожилов, К.Ф. Черных, Е.И. Михайловский. – Л.: Политехника, 1991. – 656 с.
26. **Михайловский, Е.И.** Нелинейная теория жесткогибких оболочек типа Журавского/ Е.И. Михайловский// Вестн. Сыкт. ун-та. Сер.1. Мат. Мех. Инф. – 2007. – Вып. 7. – С. 77-100.
- 27.* **Marguerre, K.** Zur Theorie der gekrümmten Platte grösser Formänderung/ K. Marguerre// Jahrbuch 1939 deutscher Luftfahrtforschung.- Berlin.
- 28.* **Филин, А.П.** Элементы теории оболочек/ А.П. Филин. – Л.: Стройиздат, Ленингр. отделение, 1987. – 384 с.
- 29.* **Вольмир, А.С.** Нелинейная динамика пластинок и оболочек/А.С. Вольмир. – М.: Наука, 1972. – 432 с.
30. **Михайловский, Е.И.** О некоторых аспектах учета трансверсальных деформаций в теории оболочек и пластин/ Е.И. Михайловский, В.Л. Никитенков, К.Ф. Черных// Вестн. Сыкт. ун-та. Сер.1. Мат. Мех. Инф. – 2003. – Вып. 5. – С. 85-98.

- 31.* **Пикуль, В.В.** К оценке погрешности гипотез Кирхгофа в теории оболочек Сб. докл. XX Международной конференции по теории оболочек и пластин "Механика оболочек и пластин"/ В.В. Пикуль. – Н. Новгород: Изд-во Нижегородского ун-та, 2002. – Вып. 5. – С. 244-249.
32. **Михайловский, Е.И.** Математические модели теории упругости/ Е.И. Михайловский, А.В. Торопов. – Сыктывкар: Изд-во Сыкт. ун-та, 1995. – 251 с.
33. **Mikhailovskii, E.I.** On formulating boundary conditions in the Kármán plane plate bending theory/ E.I. Mikhailovskii// Transactions of St-Peterburg academy of sciences for strength problems. – Syktyvkar state university. – 1997 – Vol. 1. – P. 21-44.
34. **Ермоленко, А.В.** Граничные условия для подкрепленного края в теории плоских пластин Кáрмана/ А.В. Ермоленко, Е.И. Михайловский// Изв. РАН. МТТ. – 1998. – №3. – С. 73-85.
35. **Михайловский, Е.И.** Полудеформационный вариант граничных условий в нелинейной теории пологих оболочек/ Е.И. Михайловский, А.В. Ермоленко// Нелинейные проблемы механики и физики деформируемого твердого тела: тр. научн. школы акад. В.В. Новожилова – СПб: СПбГУ, 2000. – Вып. 2. – С. 60-76.
- 36.* **Михлин, С.Г.** Вариационные методы в математической физике/С.Г. Михлин. – М.: Наука, 1970. – 432с.
- 37.* **Демьянов, В.Ф.** Приближенные методы решения экстремальных задач/В.Ф. Демьянов, А.М. Рубинов. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1968. – 180с., 1970. – 432с.
- 38.* **Артюхин, Ю.П.** Некоторые контактные задачи теории плоских пластин/ Ю.П. Артюхин, С.Н.Карасев// Исследования по теории пластин и оболочек. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1973. – Вып. 10. – С. 159-166.
39. **Ермоленко, А.В.** Уточненные соотношения нелинейной теории пластин и оболочек, ориентированные на решение контактных задач: дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 01.02.04.: защищена 17.10.2002; утв. 17.01.2003// Ермоленко Андрей Васильевич.– СПб, 2002. – 117с. – Библиограф.: с. 106-117
- 40.* **Тимошенко, С.П.** Устойчивость упругих систем/С.П. Тимошенко. – М.- Л.: ОГИЗ, 1946. – 839с.

- 41.* **Вольмир, А.С.** Устойчивость деформируемых систем/А.С. Вольмир. – М.: Наука, 1967. – 984с.
42. **Ермоленко, А.В.** Расчет круглых пластин по уточненным теориям / А.В. Ермоленко// Вестн. Сыкт. ун-та. Сер.1. Мат. Мех. Инф. – 2006. – Вып. 6. – С. 79-86.
43. **Михайловский, Е.И.** Лекции по вариационным методам механики упругих тел: учебное пособие для вузов/ Е.И. Михайловский. – Сыктывкар: Изд-во Сыкт. ун-та, 2002. – 256 с.
44. **Mikhailovskii, E.I.** On nonlinear Theory of Rigid-Flexible Shells without the Kirchhoff Hypotheses/ E.I. Mikhailovskii, A.V. Yermolenko// Critical Review of the Theories of Plates and Shells and New Application. – Berlin: Springer, 2004. – P. 157-164.
45. **Михайловский, Е.И.** Школа механики оболочек академика Новожилова/ Е.И. Михайловский. – Сыктывкар: Изд-во Сыкт. ун-та, 2005. – 172 с.
46. **Михайловский, Е.И.** Уточненные нелинейные уравнения в неклассических задачах механики оболочек: учебное пособие для вузов/ Е.И. Михайловский, А.В. Ермоленко, В.В. Миронов, Е.В. Тулубенская. – Сыктывкар: Изд-во Сыкт. ун-та, 2009. – 141 с.
47. **Кабриц, С.А.** Общая нелинейная теория упругих оболочек/ С.А. Кабриц, Е.И. Михайловский, П.Е. Говстик, К.Ф. Черных, В.А. Шамина. – СПб: Изд-во С.-Петербур. ун-та, 2002. – 388 с.
48. **Миронов, В.В.** Учет трансверсальных деформаций в контактной задаче со свободной границей для ребристой цилиндрической оболочки/ В.В. Миронов, Е.И. Михайловский// Тр. XXV Российской школы и XXXV Уральского семинара. – Екатеринбург: УрО РАН, 2004. – С. 54-65.

Summary

Mikhailovskii E.I., Tarasov V.N. The constructive - nonlinear mechanics of plates and shells

The review of the basic results obtained by authors and their disciples for last 20 years in the field of constructive-nonlinear mechanics of plates and shells is given. The general course of the proof proposed by authors of a method of the generalized reaction for the solving of contact problems

with free boundary and a method of local search of eigenvalues of positively homogeneous operators for the solving of essentially nonlinear spectral problems is explained. Algorithms of local search of variants in a combination to their full search on a rare grid and with movement on parameter of rigidity of one of elastic environments are illustrated. Effect of accounting transversal deformations in the equations of mechanics of plates and shells is investigated.

Сыктывкарский университет

Поступила 12.04.2010