

УДК 532.135

**УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ В ОДНОМЕРНОЙ
СТРУКТУРНОЙ МОДЕЛИ ЭКСТРУЗИИ**

Н.А. Беляева, А.В. Спиридовонов

Представлена математическая модель твердофазной экструзии пористого вязкоупругого материала с условием постоянства скорости плунжера пресса. Полученные результаты подтверждают правомерность замены уравнения движения на уравнение равновесия в ранее выполненных по данной тематике работах. Для описания выбранного типа течения использованы лагранжиевы(массовые) координаты.

Постановка задачи

Рассмотрим процесс выдавливания вязкоупругого сжимаемого материала из цилиндрической камеры, радиус поперечного сечения которой – r_0 , в направляющий цилиндрический калибр радиуса r_1 , под действием плунжера пресса. В работах [1-4] уравнение движения среды в процессе экструзии, ввиду малости числа Рейнольдса, было заменено на уравнение равновесия. В данной работе рассмотрена модель течения с использованием исходного уравнения движения.

Вся область течения разделяется на два отдельных участка: движение внутри камеры между перемещающимся поршнем $z = H(t)$ и выходным отверстием $z = 0_+$ и течение внутри калибра между $z = 0_-$ (входным отверстием в калибр) и свободной поверхностью $z = -L(t)$, t – время. Возмущениями в обеих областях при переходе из камеры в отверстие пренебрегаем. Движение смеси в каждой из областей считаем одномерным с одной ненулевой компонентой скорости $V_z = V$.

Введем массовые координаты $(q; t) : t$ – реальное время, массовая координата q имеет смысл относительной массы материала, находящейся

между переменным сечением z и свободной поверхностью $z = -L(t)$. Таким образом,

$$q = \frac{M}{S_0 \rho_1} = \int_0^z \rho(\xi, t) d\xi + \frac{S_1}{S_0} \int_{-L(t)}^0 \rho(\xi, t) d\xi,$$

где M — масса материала в указанном сечении, S_0, S_1 — площади сечений камеры и калибра, соответственно, ρ_1 — плотность несжимаемой основы материала, при этом плотность материала определяется произведением $\rho_1 \cdot \rho$, где $\rho = \rho(q, t)$ — относительная плотность среды.

Система уравнений, описывающая экструдирование среды, имеет вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho^2 \frac{\partial V}{\partial q} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \rho \frac{\partial V}{\partial q} + \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \sigma}{\partial q} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial a}{\partial t} + V \rho \frac{\partial a}{\partial q} = D \left[\rho^2 \frac{\partial^2 a}{\partial q^2} + \rho \frac{\partial a}{\partial q} \frac{\partial \rho}{\partial q} \right] + k_2 [1 - a - a \chi \exp(\rho \sigma)], \quad (3)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{G}{\mu} \sigma = G \frac{\partial V}{\partial q} \rho; \quad (4)$$

$$t = 0 : \rho(q, 0) = \rho_0(q), a = a_0(q); \quad (5)$$

$$V|_{q=q_0} = V_0, V(q_+, t) = -\frac{S_1 k_1 |\sigma(q, t)|^m}{S_0 \rho_1 \rho(q^*, t)}, V(q_-, t) = -\frac{k_1 |\sigma(q, t)|^m}{\rho_1 \rho(q^*, t)}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial a}{\partial q}|_{q=q_0} = \frac{\partial a}{\partial q}|_{q=q^*} = 0, \quad (7)$$

$$\sigma|_{q=0} = 0, \quad (8)$$

где уравнение (1) — уравнение неразрывности: $V = V(q, t)$ — скорость течения материала; (2) — уравнение движения Навье-Стокса, определяющее скорость течения материала, $\sigma = \sigma(q, t)$ — напряжение; уравнение (3) — диффузионно-кинетическое уравнение, где $a = a(q, t)$ — степень структурных превращений, $k_2 = \text{const}$ — эффективный коэффициент скорости накопления числа сшивок. Для описания вязко-упругого поведения материала используем обобщенную модель Максвелла (4), где $\mu = \mu(a) = \mu_0 \exp(ka)$, $G = G(a) = \mu_0 \exp(ka)/t_r$ — вязкость и модуль сдвига соответственно, зависящие от степени структурных превращений a , t_r — время релаксации. Начальные условия для относительной плотности ρ материала и степени структурных превращений определяются первым и вторым условием (5) соответственно. Первое условие (6) означает условие постоянства скорости плунжера пресса, а второе и

третье – скорость структуры на отверстии в камере $V(q_+, t)$ и в калибре $V(q_-, t)$ соответственно, где k_1 – коэффициент пропорциональности закона сопротивления отверстия, q^* – элементарная масса, находящаяся на отверстии в рассматриваемый момент времени t . Первое граничное условие (7) означает непроникновение вещества через плунжер, а второе – структуризация в калибре не происходит. Условие (8) означает, что выдавленный стержень движется свободно, т.е. трение о стенки калибра пренебрежимо мало.

Численное решение

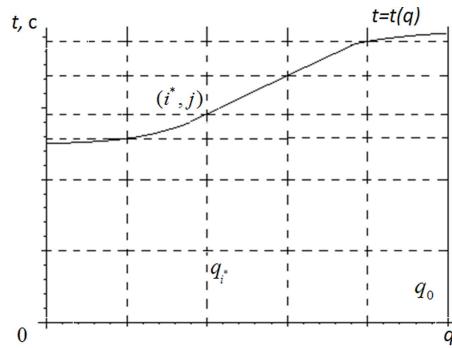


Рис. 1. Массово-временная сетка

Рассмотрим масштабно-временную сетку (рис.1): (q_i, t_j) , $i \in 0..n$, $j \geq 0$, n – число точек разбиения массовой оси q , причем $j = 0$ (ось q) соответствует начальному моменту времени. Длина отрезка разбиения вдоль оси q равна $\Delta q = q_0/n$. В дальнейшем (при выдавливании) временной шаг в слое t_j определялся скоростью элементарной массы i^* , находящейся на отверстии: $dt_j = dq/V_{i^*,j}$, $j \geq 1$. Приведем формулы вычисления искомых функций задачи в узлах построенной сетки. Для численного определения степени структуризации a_{ij} в камере применим метод прогонки, заменив формулу (3) разностными соотношениями

$$\begin{aligned} & \frac{a_{ij} - a_{i,j-1}}{\Delta t_j} + V_{ij}\rho_{ij} \frac{a_{ij} - a_{i-1,j}}{\Delta q} = \\ & = D \left(\rho_{i,j}^2 \frac{a_{i+1,j} - 2a_{ij} + a_{i-1,j}}{\Delta q^2} + \rho_{i,j} \frac{a_{ij} - a_{i-1,j}}{\Delta q} \frac{\rho_{ij} - \rho_{i-1,j}}{\Delta q} \right) + \\ & + k_2 [1 - a_{ij} - a_{ij} \chi \exp(p\sigma_{ij})], i \in [i^*, n], j \geq 1, \\ & a_{i0} = 0, \quad 0 \leq i \leq n, \\ & \frac{a_{nj} - a_{n-1,j}}{\Delta q} = 0, \quad \frac{a_{i^*+1,j} - a_{i^*,j}}{\Delta q} = 0, \quad j \geq 1. \end{aligned}$$

В результате численного решения определяются степень структуризации материала и, следовательно, вязкость структуры $\mu_{ij} = \mu_0 \exp(ka_{ij})$ в рассматриваемом временном слое $t = t_j$. При движении структуры в камере плотность в узлах сетки находится по формуле:

$$\rho_{ij} = \frac{\rho_{ij-1} \Delta q}{\Delta q + \Delta t \rho_{i,j-1} (V_{ij} - V_{i-1,j})}, \rho_{i0} = \rho_0.$$

Для численного определения скорости применим метод прогонки, заменив (2) разностными соотношениями:

$$\frac{V_{ij} - V_{i,j-1}}{\Delta t_j} + V_{i,j-1} \rho_{ij} \frac{V_{ij} - V_{i-1,j}}{\Delta q} + \frac{1}{\rho_1} \frac{\sigma_{i,j-1} - \sigma_{i-1,j-1}}{\Delta q} = 0,$$

$$V_{i0} = 0, \quad 0 \leq i \leq n-1, \quad V_{n0} = V_0.$$

Из соотношения (4) получим рекуррентную формулу для определения напряжения в камере в различные моменты времени $t = t_j$:

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{\mu \Delta t}{\Delta q t_r + \Delta t \Delta q} \right) (V_{ij} - V_{i-1,j}) \rho_{ij} + \sigma_{i,j-1} \frac{\Delta q t_r}{\Delta q t_r + \Delta t \Delta q}$$

Изменение плотности ρ и степени структуризации a в калибре не происходит, каждая элементарная масса имеет степень структуризации и вязкость, приобретенную при прохождении отверстия. Выдавленный стержень движется со скоростью:

$$V_j^k = -k_1 |\sigma_j|^m / \rho_1 \rho_{i^*,j}, \quad j \geq 0.$$

Результаты численного эксперимента

Для численного решения задачи использовался язык программирования Delphi7.

Приведем результаты численного эксперимента на основе предложенной модели.

Динамика плотности движущегося в камере материала (рис.2) показывает постепенное уплотнение материала. Плотность выдавленного стержня возрастает от свободной поверхности к плунжеру. Элементарные массы, прилежащие к плунжеру, выдавливаются полностью уплотненными.

Степень структуризации среды, ввиду большой скорости структурирования, быстро возрастает от нулевых значений до максимального единичного значения.

Рисунок 4 показывает однородный характер напряжения, т.е. независимость по массовой координате, что подтверждает правомерность замены уравнения движения на уравнение равновесия, при котором изначально предполагается [1-4] независимость осевого напряжения от массовой координаты. Распределение скоростей элементарных масс в камере (рис.3) показывает немонотонный характер изменения скоростей выдавливаемых в калибр масс, т.е. скорость стержня в калибре.

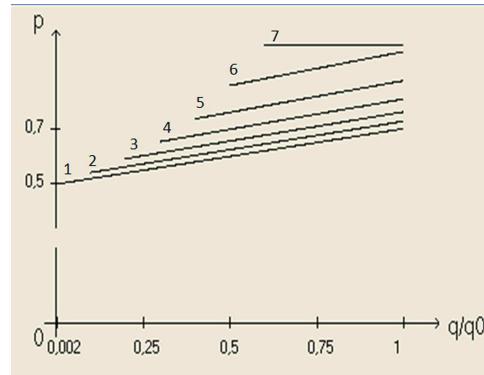


Рис. 2. Массово-временное распределение плотности $\rho = \rho(q, t)$ в камере

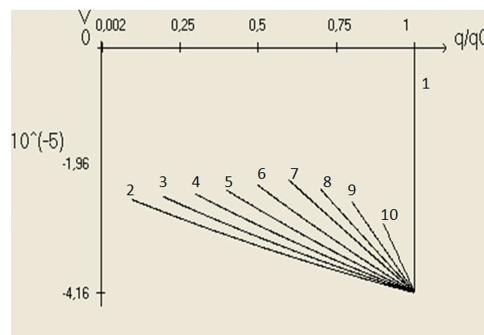


Рис. 3. Массово-временное распределение скорости в камере

Значения параметров задачи: $V_0 = 0.00004165$ м/с – скорость на плунжере в начальный момент времени; $q_0 = 0.04$ м – полная относительная масса; $r_0 = 0.2$ м – радиус основания цилиндрической камеры; $r_1 = 0.04$ м – радиус основания калибра; $\rho_1 = 1500$ кг/м³ – плотность несжимаемой основы материала; $\rho_0 = 0.5$ кг/м³; $\rho_m = 0.7$ кг/м³ - начальные значения плотности на отверстии и плунжере соответственно; $m = 1/3$ – порядок степенной зависимости; $D = 0.0000001$ м³/с – коэффициент диффузии; $p = 0.02$ Па⁻¹ – константа, характеризующая интенсивность процесса деформации связей; $\mu_0 = 2 \cdot 10^8$ Па·с – начальная вязкость структуры; $k_o = k_v = -0.02$ – коэффициент пропорциональности экспоненциальной зависимости объемной и сдвиговой вязкости соответственно; $k_1 = 0.00385$ с⁻¹ – коэффициент пропорциональности в законе сопротивления отверстия; $k_2 = 1$ с⁻¹ – константа скорости восстановления структуры.

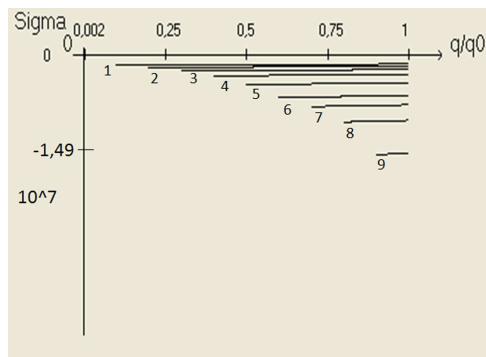


Рис. 4. Массово-временное изменение напряжения

Литература

1. Беляева Н. А., Столин А. М., Стельмах Л. С. Кинетика уплотнения и структуризации в твердофазной экструзии вязкоупругой среды // Инженерная физика. 2007. № 5. С. 34–41.
2. Беляева Н. А. Математические модели деформируемых структурированных материалов. Монография. // Сыктывкар: Изд-во СыктГУ, 2008. 116 с.
3. Беляева Н. А., Столин А. М., Пугачев Д. В., Стельмах Л. С. Неустойчивые режимы деформирования при твердофазной экструзии вязкоупругих структурированных систем // ДАН, 2008. Т. 420. № 6. С. 777–780.
4. Беляева Н. А., Столин А. М., Стельмах Л. С. Динамика твердофазной плунжерной экструзии вязкоупругого структурированного материала // Теоретические основы химической технологии. 2008. № 5. С. 579–589.

Summary

Belyaeva N.A., Spiridonov A.V. The structural models of deformation processes

The mathematical model of tverdofaznoy extrusion of porous viscoelastic material is presented with the condition of constancy of speed of plunzhera the press. Got results, confirm legitimacy of replacement of equalization of motion on equalization of equilibrium in the works before executed on this subject. For a chosen type of flow specification lagranzh(mass) co-ordinates are used.