

*Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1. Вып.10. 2009*

УДК 532.135

**СТРУКТУРНАЯ МОДЕЛЬ ЭКСТРУЗИИ С
ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОБОБЩЕННОЙ МОДЕЛИ
НЬЮТОНА**

Н.А. Беляева, Н.Н. Никонова

Представлена математическая модель твердофазной экструзии пористого вязкоупругого материала с условием постоянства скорости плунжера пресса. Получены результаты, подтверждающие правомерность замены уравнения движения на уравнение равновесия. Для описания рассматриваемого течения используются лагранжевы (массовые) координаты.

Постановка задачи

Рассмотрим процесс выдавливания вязкоупругого композитного сжимаемого материала из цилиндрической камеры в направляющий цилиндрический калибр под действием плунжера пресса. Начало координат $z = 0$ связем с центром отверстия основания камеры. Вся область течения разделяется на два отдельных участка: движение внутри камеры между перемещающимся поршнем $z = H(t)$ и выходным отверстием $z = 0_+$ и течение внутри калибра между $z = 0_-$ (входным отверстием в калибр) и свободной поверхностью $z = -L(t)$, t —время. Возмущениями в обеих областях при переходе из камеры в отверстие пренебрегаем. Движение смеси в каждой из областей считаем одномерным с одной ненулевой компонентой скорости $V_z = V$. На дне камеры, радиус попечного сечения которой r_0 , имеется круглое отверстие радиуса r_1 , через которое происходит выдавливание материала в направляющий цилиндрический калибр того же радиуса. Ось симметрии заготовки примем в качестве оси z , положительное направление которой противоположно направлению движения поршня.

Введем массовые координаты $(q; t)$: t -реальное время, массовая координата q имеет смысл относительной массы материала, находящейся

между переменным сечением z и свободной поверхностью $z = -L(t)$. Таким образом,

$$q = \frac{M}{S_0 \rho_1} = \int_0^z \rho(\xi, t) d\xi + \frac{S_1}{S_0} \int_{-L(t)}^0 \rho(\xi, t) d\xi,$$

где M — масса материала в указанном сечении, S_0, S_1 — площади сечений камеры и калибра, соответственно, ρ_1 — плотность несжимаемой основы материала, при этом плотность материала определяется произведением $\rho_1 \cdot \rho$, где $\rho = \rho(q, t)$ — относительная плотность среды.

Система уравнений, описывающих течение среды в камере, включает в себя уравнение неразрывности, уравнение движения Навье-Стокса, диффузионно-кинетическое уравнение относительно степени структурирования a , начальные и граничные условия:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho^2 \frac{\partial V}{\partial q} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \rho \frac{\partial V}{\partial q} + \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial q} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial a}{\partial t} + V \rho \frac{\partial a}{\partial q} = D \left[\rho^2 \frac{\partial^2 a}{\partial q^2} + \rho \frac{\partial a}{\partial q} \frac{\partial \rho}{\partial q} \right] + \Phi(a, \sigma_{zz}), \quad (3)$$

$$\sigma_{zz} = (\lambda + \frac{4}{3}\mu) \rho \frac{\partial V}{\partial q}, \quad (4)$$

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi} = (\lambda - \frac{2}{3}\mu) \rho \frac{\partial V}{\partial q}, \quad (5)$$

$$t = 0 : \rho(q, 0) = \rho_0(q), a = a_0(q), \quad (6)$$

$$V|_{q=q_0} = V_0, V(q_+, t) = -\frac{S_1}{S_0} \frac{k_1 |\sigma(q, t)|^m}{\rho_1 \rho(q^*, t)}, V(q_-, t) = -\frac{k_1 |\sigma(q, t)|^m}{\rho_1 \rho(q^*, t)}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial a}{\partial q}|_{q=q_0} = \frac{\partial a}{\partial q}|_{q=q^*} = 0, \quad (8)$$

$$\sigma|_{q=0} = 0, \quad (9)$$

где уравнение (1) — уравнение неразрывности: $V = V(q, t)$ — скорость течения материала. Начальные условия для относительной плотности ρ материала определяются первым условием соотношения (5).

Уравнение движения Навье-Стокса (2) определяет скорость течения материала. Первое условие (6) означает условие постоянства скорости плунжера пресса, второе и третье — скорость структуры на отверстии в камере $V(q_+, t)$ и в калибре $V(q_-, t)$ соответственно, где

k_1 – коэффициент пропорциональности закона сопротивления отверстия [1-4], q^* – элементарная масса, находящаяся на отверстии в рассматриваемый момент времени t .

Изменение числа межмолекулярных сшивок материала происходит в результате наложения двух процессов: разрушения и образования. Суммарная скорость превращения структуры определяется функцией $\Phi(a, \sigma_{zz})$, для которой принято выражение

$$\Phi = -k_0 \exp(p\sigma_{zz})a + k_2(1 - a),$$

где $a = a(q, t)$ -степень структурных превращений, $k_0 \exp(p\sigma_{zz})$ - эффективный коэффициент скорости разрушения структуры (характеризует снижение эффективной энергии активации), $k_2 = \text{const}$ - эффективный коэффициент скорости накопления числа сшивок.

В диффузионно-кинетическом уравнении (3) суммарную скорость превращения структуры можно представить в виде $\Phi(a, \sigma_{zz}) = k_2[1 - a - a\chi \exp(p\sigma_{zz})]$, $\chi = k_0/k_2$. Первое граничное условие (7) означает непроникновение вещества через плунжер, а второе то, что структуризация в калибре не происходит.

Из обобщенной модели Ньютона [5] получаем напряжение (4), (4), где $\mu = \mu(a) = \mu_0 \exp(k_v a)$, $\lambda = \frac{4}{3}\mu_0 \exp(k_o a)$ – сдвиговая вязкость и объемная вязкость соответственно, зависящие от степени структурных превращений a .

В калибре экструдированный материал движется свободно: трение о стенки калибра пренебрежимо мало, следовательно, отсутствует сопротивление движению материала (8).

Численное решение

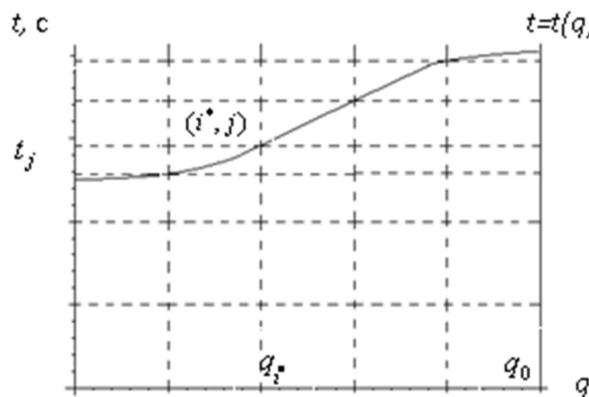


Рис. 1. Массово-временная сетка

Рассмотрим массово-временную сетку рис. 1: (q_i, t_j) , $i \in 0..n$, $j \geq 0$, n —число точек разбиения массовой оси q , причем $j = 0$ (ось q) соответствует начальному моменту времени. Длина отрезка разбиения вдоль оси q равна $\Delta q = q_0/n$.

На рис. 1 представлен пример кривой зависимости времени выдавливания $t = t(q)$ от массовой координаты. Элементарные массы q_{i^*} , соответствующие точкам, лежащим на указанной кривой, находятся на отверстии в определенные моменты времени t_j . Таким образом, узел (i^*, j) соответствует элементарной массе q_{i^*} , проходящей в момент времени t_j отверстие. Массы, соответствующие точкам, лежащим ниже указанной кривой ($i > i^*$), находятся в камере.

Приведем формулы вычисления искомых функций задачи в узлах построенной сетки. Система (1-9) решается численно, заменой разностными соотношениями:

$$\begin{aligned} \frac{\rho_{ij} - \rho_{i,j-1}}{\Delta t_j} + \rho_{ij}^2 \frac{V_{ij} - V_{i,j-1}}{\Delta q} &= 0, \quad \rho_{i0} = \rho_{0i}, \\ \frac{V_{ij} - V_{i,j-1}}{\Delta t_j} + V_{i,j-1} \rho_{ij} \frac{V_{ij} - V_{i-1,j}}{\Delta q} + \frac{1}{\rho_1} (\lambda_{ij} + \frac{4}{3} \mu_{ij}) * \\ * [\frac{\rho_{ij} - \rho_{i-1,j}}{\Delta q} \frac{V_{ij} - V_{i-1,j}}{\Delta q} + \rho_{ij} \frac{V_{i+1,j} - 2V_{ij} + V_{i-1,j}}{\Delta q^2}] &= 0, \\ V_{n,0} = V_0, \quad V_{i,0} = 0, \quad 0 \leq i \leq n-1, \\ \frac{a_{ij} - a_{i,j-1}}{\Delta t_j} + V_{i,j} \rho_{ij} \frac{a_{ij} - a_{i-1,j}}{\Delta q} &= \\ = D \left[\rho_{ij}^2 \frac{a_{i+1,j} - 2a_{ij} + a_{i-1,j}}{\Delta q^2} + \rho_{ij} \frac{a_{ij} - a_{i-1,j}}{\Delta q} \frac{\rho_{ij} - \rho_{i-1,j}}{\Delta q} \right] + \\ + k_2 [1 - a_{ij} - a_{ij} \chi \exp(p \sigma_{ij})], \quad i \in [i^*, n], \quad j \geq 1, \\ a_{i,0} = 0, \quad 0 \leq i \leq n, \quad \frac{a_{n,j} - a_{n-1,j}}{\Delta q} = 0, \quad \frac{a_{i^*+1,j} - a_{i^*,j}}{\Delta q} = 0, \quad j \geq 1, \\ \sigma_{ij} = (\lambda_{ij} + \frac{4}{3} \mu_{ij}) \rho_{ij} \frac{V_{ij} - V_{i-1,j}}{\Delta q}, \\ \sigma_{rr} = \sigma_{rr} = (\lambda_{ij} - \frac{2}{3} \mu_{ij}) \frac{\sigma_{ij}}{(\lambda_{ij} + \frac{4}{3} \mu_{ij})}. \end{aligned}$$

Для численного определения степени структуризации a и скорости V в камере применяется метод прогонки [6].

Изменение плотности ρ и степени структуризации a в калибре не происходит, каждая элементарная масса имеет степень структуризации и вязкость, приобретенную при прохождении отверстия. Выдавленный стержень движется со скоростью:

$$V_j^k = -k_1 |\sigma_j|^m / \rho_1 \rho_{i^*,j}, \quad j \geq 0.$$

Таким образом, в каждой точке построенной массово-временной сетки будут определены параметры течения структуры.

Результаты численного эксперимента

Для численного решения задачи использовалась математическая система Maple -7.

Приведем результаты численного эксперимента на основе предложенной модели. Динамика плотности движущегося в камере материала (рис.2) показывает постепенное уплотнение материала. Причем в каждый фиксированный момент времени распределение плотности подобно начальному линейному распределению. Распределение плотности в калибре показаны пунктирными линиями. Плотность выдавленного стержня возрастает от свободной поверхности к плунжеру. Последние выдавливаются полностью уплотненными.

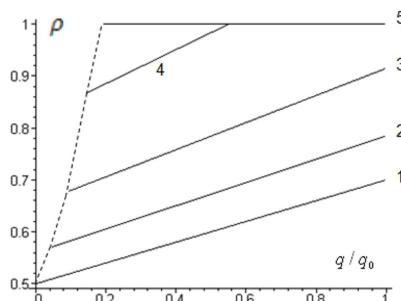


Рис. 2. Массово-временное распределение плотности $\rho = \rho(q, t)$ в камере;
 $t(c) : 1(0), 2(10.8221), 3(22.9992), 4(36.5696), 5(52.6211)$

Массово-временное распределение скоростей элементарных масс в камере в ходе течения представлено на рис.3. По мере приближения плунжера к отверстию в калибр скорости выдавливаемых масс приближаются к скорости движения плунжера V_0 .

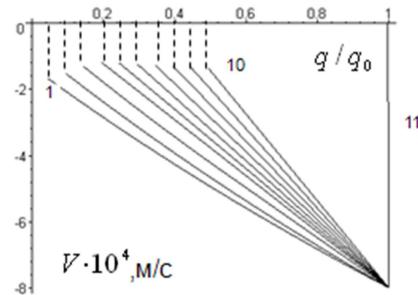


Рис. 3. Массово-временное распределение скорости $V = V(q, t)$ в камере;
 $t(c) : 1(0), 2(10.8221), 3(22.9992), 4(36.5696), \dots, 11(145.6038)$

Динамика степени структуризации в камере однородна, пунктиром показано изменение в калибре.

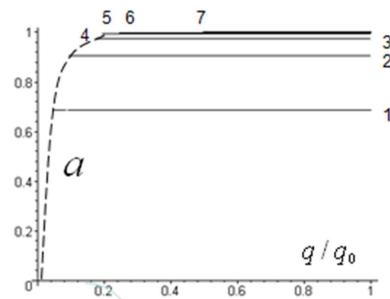


Рис. 4. Изменение степени структуризации в камере и в калибре

Результаты численных расчетов, представленных в [1-4], основаны на замене уравнения движения Навье-Стокса (2) на уравнение равновесия: число Рейнольдса текущей среды мало. Таким образом, в указанных работах изначально предполагалась однородность (независимость от массовой координаты) напряжения. Полученные результаты, выполненные с рассмотрением уравнения движения (2), подтверждают правильность такого приближения: приведенные на рис. 5 указывают на

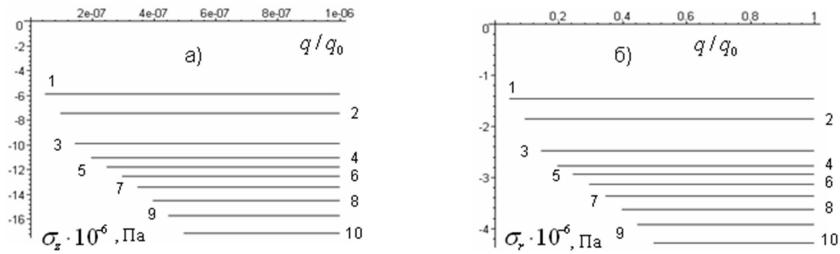


Рис. 5а,б. Изменение напряжения в камере

однородность компонент тензора напряжений, их независимость от мас-
совой координаты, то есть $\sigma_{zz} = \sigma_{zz}(t)$, $\sigma_{rr} = \sigma_{rr}(t)$, $\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\varphi\varphi}(t)$.

Значения параметров задачи: $V_0 = 0.0008$ м/с – скорость на плунжере в начальный момент времени, $q_0 = 0.04$ м – полная относительная масса; $r_0 = 0.2$ м – радиус основания цилиндрической камеры; $r_1 = 0.04$ м – радиус основания калибра; $\rho_1 = 1500$ кг/м³ – плотность несжимаемой основы материала, $\rho_0 = 0.5$ кг/м³, $\rho_m = 0.7$ кг/м³ – начальные значения плотности на отверстии и плунжере соответственно; $m = 1/3$ – порядок степенной зависимости; $D = 0.0001$ м³/с – коэффициент диффузии; $p = 0.02$ Па⁻¹ – константа, характеризующая интенсивность процесса деформации связей; $\mu_0 = 2 \cdot 10^8$ Па·с – начальная вязкость структуры; $k_o = k_v = -0.02$ – коэффициент пропорциональности экспоненциальной зависимости объемной и сдвиговой вязкости соответственно; $k_1 = 0.02$ с⁻¹ – коэффициент пропорциональности в законе сопротивления отверстия; $k_2 = 0.1$ с⁻¹ – константа скорости восстановления структуры; $\chi = k_0/k_2 = 10^{-6}$ – отношение констант скоростей разрушения и образования структуры.

Литература

1. Беляева Н. А., Столин А. М., Стельмах Л. С. Кинетика уплотнения и структуризации в твердофазной экструзии вязкоупругой среды // Инженерная физика. 2007. № 5. С. 34–41.
2. Беляева Н. А. Математические модели деформируемых структурированных материалов. Монография. // Сыктывкар: Изд-во СыктГУ, 2008. 116 с.
3. Беляева Н. А., Столин А. М., Пугачев Д. В., Стельмах Л. С. Неустойчивые режимы деформирования при твердофазной экструзии вязкоупругих структурированных систем // ДАН, 2008. Т. 420. № 6. С. 777–780.

4. Беляева Н. А., Столин А. М., Стельмах Л. С. Динамика твердофазной плунжерной экструзии вязкоупругого структурированного материала // Теоретические основы химической технологии. 2008. № 5. С. 579–589.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 736 с.
6. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1983. 616 с.

Summary

Belyaeva N.A., Nikonova N.N. Structural model of extrusion with usage of the generalised model of Newton

The mathematical model of Solid-Phase is presented extrusion of a porous viscoelastic material with a condition of constancy of speed plunger the press. The results confirming rightfulness of replacement of the equation of movement on the equation of equilibrium are received. For the description of considered stream Lagrangian (mass) coordinates are used.

Сыктывкарский университет

Поступила 15.04.2009