

*Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1. Вып.10. 2009*

УДК 530.24

**МАССИВНЫЕ ПОЛЯ ЯНГА-МИЛЛСА,
ТРАНСЛЯЦИОННЫЕ И НЕПОЛУПРОСТЫЕ
КАЛИБРОВОЧНЫЕ СИММЕТРИИ¹**

И.В. Костяков, В.В. Куратов

Калибровочные поля полуупростых групп внутренних симметрий не имеют массы и требуют специальных методов, ее обеспечивающих. Массовые механизмы обычно содержат преобразования сдвига, характерные для неполупростых групп. Мы показываем, что при локализации неполупростых внутренних симметрий калибровочные поля, соответствующие генераторам трансляции, оказываются массивными. Предложены нелинейные обобщения некоторых моделей, обладающих локальной трансляционной симметрией, также приводящие к массивным калибровочным полям. Так, локальная галилеева симметрия, реализованная на специальной паре скалярных полей, приводит к массивной электродинамике, а локализация группы Евклида приводит к массивной неабелевой теории без полей материи. Получена простая интерпретация механизма Штюкельберга.

1. Введение

Сначала мы опишем основные понятия и свойства калибровочных теорий [1]. Остановимся на понятии массы и мотивируем изучение трансляционных и неполупростых калибровочных теорий.

1.1. Калибровочные поля

Принцип локальной калибровочной инвариантности является основным динамическим принципом современной физики и позволяет описывать фундаментальные взаимодействия природы. Пусть поле

¹Работа частично поддержана грантом РФФИ — Беларусь 08-01-90010 и программой "Математические проблемы нелинейной динамики" Президиума РАН.

материи $\varphi(x)$ — есть N -вектор, преобразующийся под действием некоторой группы G матриц $N \times N$ внутренних симметрий

$$\varphi(x) \rightarrow g\varphi(x) = e^{T_k \alpha_k} \varphi(x), \quad (1)$$

где T_k — генераторы группы G , а α_k — групповые параметры. Производная $\partial = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ преобразуется аналогично

$$\partial\varphi \rightarrow \partial(e^{T_k \alpha_k} \varphi(x)) = e^{T_k \alpha_k} \partial\varphi(x). \quad (2)$$

Пусть теперь $\alpha_k = \alpha_k(x)$:

$$\varphi(x) \rightarrow g(x)\varphi(x) = e^{T_k \alpha_k(x)} \varphi(x), \quad (3)$$

но

$$\partial\varphi(x) \rightarrow \partial(g(x)\varphi(x)) = g(x)\partial\varphi(x) + \varphi(x)\partial g(x) \quad (4)$$

и для „правильного“ преобразования производной необходимо ее удлинить введением векторного калибровочного поля Янга–Миллса

$A = A_\mu^k T_k$ [2] со значением в алгебре Ли группы G и преобразующегося по формуле

$$A \rightarrow gAg^{-1} - \partial g \cdot g^{-1}. \quad (5)$$

Тогда ковариантная производная преобразуется мультипликативно

$$\nabla\varphi = (\partial - A)\varphi \rightarrow g\nabla\varphi, \quad (6)$$

кривизна, или тензор F поля Янга–Миллса определяется

$$F\varphi = [\nabla, \nabla]\varphi = [\partial - A, \partial - A]\varphi, \quad (7)$$

а его лагранжиан

$$L_{YM} = -\frac{1}{4}Tr F^2. \quad (8)$$

Теория, описывающая поля материи, калибровочные поля и их взаимодействие, задается лагранжианом

$$L = \frac{1}{2}\nabla\varphi^*\nabla\varphi + V(\varphi) - \frac{1}{4}Tr F^2. \quad (9)$$

Если $G = SO(2) \approx U(1)$ — группа двумерных вращений, то (7) есть тензор напряженности, а (8) — лагранжиан электромагнитного поля. Стандартной модели объединенного электрослабого взаимодействия соответствует группа $SU(2) \times U(1)$.

Массовый член $\frac{m^2}{2}A^2$ не инвариантен относительно преобразований (5), вследствии чего калибровочное поле безмассово. Из четырех известных взаимодействий, электромагнитные и гравитационные, являются дальнодействующими, а значит безмассовыми. Для слабого и сильного взаимодействия необходимо искать способы приобретения массы.

1.2. Масса и неполупростые группы

Свободные полевые уравнения или кинематики полей, определяются их трансформационными свойствами при преобразованиях Пуанкаре $ISO(3,1)$ группы движений пространства-времени Минковского. Известно, что представления простой группы $SO(5)$ характеризуются двумя „спинами“ (j_1, j_2) принимающими целые и полуцелые значения. Поля, соответствующие элементарным частицам, преобразуются по представлениям неполупростой группы Пуанкаре $ISO(3,1)$, характеризуемым спином и непрерывным параметром M - массой (j, M) . Можно считать, что предельный переход к неполупростой группе или контракция $SO(5) \rightarrow ISO(3,1)$ индуцирует переход $(j_1, j_2) \rightarrow (j, M)$ и генерирует массу частицы из второго спина на кинематическом уровне.

Оказывается, на динамическом уровне существует подобное явление. Если взаимодействия вводятся принципом калибровочной инвариантности, то переход от простой калибровочной группы к неполупростой, содержащей преобразования трансляций также может генерировать массу калибровоного поля. Массивность поля соответствующего преобразованиям трансляции обсуждалась в [3] при построении лагранжиана калибровочных полей для неполупростых калибровочных групп. В нашем случае массивный член возникает из слагаемых, описывающих взаимодействие калибровочного поля с полем материи.

Рассмотрим локальное преобразование трансляции

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi(x) + \alpha(x), \quad (10)$$

тогда ковариантная производная определяется как

$$\nabla\varphi = \partial\varphi - A, \quad (11)$$

преобразования калибровочного поля

$$A \rightarrow A + \partial\alpha, \quad (12)$$

и лагранжиан имеет вид

$$L = \frac{1}{2}(\partial\varphi - A)^2. \quad (13)$$

Квадратичный по A член можно интерпретировать как массивный. Отметим, что не только кинематическая группа $ISO(3,1)$, но и механизмы Хиггса и Штюкельберга также содержат важные для генерации массы глобальные или локальные преобразования сдвига. Неполупростые

симметрии редко являются объектами исследования, однако некоторые их необычные свойства все чаще привлекают внимание. Особенности неполупростых калибровочных теорий рассматривались в работах [4–7]. В [8] изучалась связь спонтанного нарушения симметрии и переходов от полуупростых к неполупростым симметриям. Кроме того, активно развивается телепараллельная гравитация [9], являющаяся по сути калибровочной теорией сдвигов. Отметим работу [10], где изучалась взаимосвязь механизма Штюкельберга, калибровочной симметрии и преобразований трансляции. Неполупростые симметрии возникают также при компактификации в теориях типа Калуцы–Клейна [17].

2. Модели

Здесь мы приводим хорошо известные глобально и локально инвариантные теории на примере абелевых фазовых $U(1)$ и галилеевых $\Gamma(1)$ преобразований и неабелевой $O(3)$ модели, записанных в радиальных координатах, подходящих для изучения трансляционных массовых механизмов. Мы вводим лагранжианы, параметризуемые функцией $V(\rho)$ и являющиеся нелинейными обобщениями известных теорий.

2.1. Глобальные теории

Глобальная $U(1)$ симметрия реализуется фазовым преобразованием комплексного поля ψ или поворотом в пространстве (φ_1, φ_2) пары скалярных полей

$$\psi = \varphi_1 + i\varphi_2, \quad (14)$$

$$\psi \rightarrow e^{i\alpha}\psi = \begin{cases} \varphi_1 \rightarrow \varphi_1 \cos \alpha + \varphi_2 \sin \alpha \\ \varphi_2 \rightarrow \varphi_1 \sin \alpha - \varphi_2 \cos \alpha, \end{cases} \quad (15)$$

с лагранжианом

$$L = \frac{1}{2}\partial\psi^*\partial\psi = \frac{1}{2}(\partial\varphi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial\varphi_2)^2. \quad (16)$$

Запишем теперь все формулы в радиальных переменных

$$\psi = \rho e^{i\varphi}, \quad (17)$$

$$\psi \rightarrow e^{i\alpha}\psi = \begin{cases} \rho \rightarrow \rho \\ \varphi \rightarrow \varphi + \alpha, \end{cases} \quad (18)$$

$$L = \frac{1}{2}(\partial\rho)^2 + \frac{1}{2}\rho^2(\partial\varphi)^2. \quad (19)$$

Отметим, что наиболее общий $U(1)$ -инвариантный лагранжиан имеет вид

$$L = \frac{1}{2}\partial\rho^2 + \frac{1}{2}V(\rho)\rho^2(\partial\varphi)^2 - U(\rho), \quad (20)$$

и соответствует неевклидовой метрике в пространстве полей (φ_1, φ_2) .

Глобальная $\Gamma(1)$ симметрия также реализуется фазовым преобразованием, либо поворотом в пространстве (φ_1, φ_2) , которые теперь выглядят как преобразование Галилея за счет замены комплексной единицы $i^2 = -1$ на дуальную $\iota^2 = 0$

$$\psi = \varphi_1 + \iota\varphi_2, \quad (21)$$

$$\psi \rightarrow e^{\iota\alpha}\psi = \begin{cases} \varphi_1 \rightarrow \varphi_1 \\ \varphi_2 \rightarrow \varphi_2 + \alpha\varphi_1. \end{cases} \quad (22)$$

Галилеево-инвариантный лагранжиан выберем в виде

$$L = \frac{1}{2}(\partial\varphi_1)^2 + \frac{1}{2}V(\varphi_1)\varphi_1^2 \left(\partial \left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1} \right) \right)^2 - U(\varphi_1). \quad (23)$$

Если опять перейти в радиальные координаты

$$\psi = \rho e^{\iota\varphi} = \rho + \iota\rho\varphi, \quad (24)$$

то после замены

$$\varphi_1 = \rho, \quad \frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \varphi, \quad (25)$$

получим преобразования трансляций

$$\psi \rightarrow e^{\iota\alpha}\psi = \begin{cases} \rho \rightarrow \rho \\ \varphi \rightarrow \varphi + \alpha, \end{cases} \quad (26)$$

не меняющие лагранжиан

$$L = \frac{1}{2}(\partial\rho)^2 + \frac{1}{2}V(\rho)\rho^2(\partial\varphi)^2 - U(\rho). \quad (27)$$

Схожесть формул для обеих групп не случайна, а преобразования (25) можно считать заменой переменных, приводящих $U(1)$ в $\Gamma(1)$ и обратно. Единственное отличие групп - это компактность $U(1)$, где $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, в то время как в группе $\Gamma(1)$ $-\infty \leq \alpha \leq +\infty$.

$O(3)$ инвариантная теория задается лагранжианом

$$L = \frac{1}{2}(\partial\vec{\varphi} \cdot \partial\vec{\varphi}) = \frac{1}{2}(\partial\varphi_i \cdot \partial\varphi_i), \quad (28)$$

где вектор $\vec{\varphi}^t = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ преобразуется ортогональной матрицей g , $\varphi \rightarrow g\varphi$, $g^t g = 1$. Переайдем к радиальным переменным в изопространстве $\vec{\varphi} = \rho\vec{\sigma}$. Если $\vec{e}_3^t = (0, 0, 1)$, а единичный вектор поля $\vec{\sigma}$ связан с элементом группы вращений $\Omega = \Omega(\theta, \varphi)$ равенством $\vec{\sigma} = \Omega\vec{e}_3$, то

$$\partial\varphi = \Omega(\partial\rho + \rho\Omega^{-1}\partial\Omega) = \Omega(\partial\rho + \rho\Lambda),$$

где

$$\Lambda = \Omega^{-1}\partial\Omega,$$

Лагранжиан в радиальных координатах имеет вид

$$L = \frac{1}{2}(\partial\rho)^2 + \frac{1}{2}\rho^2\Lambda^2.$$

$O(3)$ инвариантностью будет обладать и обобщенный лагранжиан вида

$$L = \frac{1}{2}(\partial\rho)^2 + \frac{1}{2}V(\rho)\rho^2\Lambda^2.$$

2.2. Локальные теории

Локализация обоих $U(1)$, $\Gamma(1)$ лагранжианов при выборе $V(\rho^2) = 1$ дает скалярную электродинамику

$$\psi \rightarrow e^{i\alpha(x)}\psi = \begin{cases} \rho \rightarrow \rho \\ \varphi \rightarrow \varphi + \alpha(x), \end{cases} \quad (29)$$

$$\partial\psi \rightarrow D\psi = (\partial - A)\psi = \begin{cases} \partial\rho \rightarrow \partial\rho \\ \partial\varphi \rightarrow D\varphi = \partial\varphi - A, \end{cases} \quad (30)$$

$$A \rightarrow A + \partial\alpha, \quad (31)$$

$$L = \frac{1}{2}(\partial\rho)^2 + \frac{1}{2}\rho^2(\partial\varphi - A)^2 - \frac{1}{4}F^2, \quad (32)$$

Теория компактна в $U(1)$ случае и некомпактна для $\Gamma(1)$ группы [11]. В радиальных переменных обе модели есть калибровочные теории локализованных преобразований сдвига полей материи. Пусть $B = A - \partial\varphi$, тогда $F^A = [\partial - A, \partial - A] = F^B = [\partial - B, \partial - B]$ и имеем теорию заряженного скалярного поля, взаимодействующего с электромагнитным полем

$$L = \frac{1}{2}(\partial\rho)^2 + \frac{1}{2}\rho^2B^2 - \frac{1}{4}F^2. \quad (33)$$

Локальная $O(3)$ теория в декартовых координатах выглядит

$$L = \frac{1}{2}(\nabla\vec{\varphi}\nabla\vec{\varphi}) + L_{YM},$$

где $\nabla = \partial - A$, $A = A_\mu^\alpha T^\alpha$, где T^α — генераторы алгебры $O(3)$.

В радиальных координатах обобщенный лагранжиан выглядит

$$L = \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^t(\nabla\varphi) = \frac{1}{2}(\partial\rho)^2 + \frac{1}{2}V(\rho)\rho^2(B_2^2 + B_3^2) - \frac{1}{4}F^2. \quad (34)$$

3. Масса

Все известные массивные механизмы достаточно просты, но используют некоторые дополнительные структуры. Вводятся новые скалярные поля (Штюкельберг), к этим полям добавляется специально подобранный потенциал самодействия (Хиггс), или накладываются ограничения (Громов). Мы кратко изложим их.

3.1. Механизм Штюкельберга

70 лет назад Штюкельберг [12] заметил, что если к лагранжиану электромагнитного поля добавить скалярное поле φ , взаимодействующее с 4-потенциалом A

$$L = -\frac{1}{4}F^2 + \frac{1}{2}m^2(\partial\varphi - A)^2, \quad (35)$$

то при преобразованиях

$$A \rightarrow A + \partial\alpha(x), \quad (36)$$

$$\varphi \rightarrow \varphi + \alpha(x), \quad (37)$$

сохраняется калибровочная инвариантность, т.е. в теории есть локализованная сдвиговая симметрия. Далее можно выбрать калибровку $\varphi = 0$, или перейти к новой переменной $B = A - \partial\varphi$, после чего получим

$$L = -\frac{1}{4}F^2 + \frac{1}{2}m^2B^2 \quad (38)$$

массивное электромагнитное поле. Калибровочное поле B преобразовывается тождественно $B \rightarrow B$. Само поле φ исчезло, обеспечив массу полю B . Формулы (36)–(38) идентичны (10)–(13), поэтому механизм Штюкельберга можно интерпретировать как теорию локальной трансляционной симметрии скалярного поля.

3.2. Механизм Хиггса

Мы остановимся на простейшем абелевом варианте этого механизма. Подробности и неабелевы обобщения можно узнать в [13]. Рассмотрим $U(1)$ -локально-инвариантную теорию в радиальных координатах

$$L = \frac{1}{2}(\nabla\psi)^2 - \frac{F^2}{4} - U(|\psi|) = \frac{1}{2}(\partial\rho)^2 + \frac{\rho^2}{2}(\partial\varphi - A)^2 - \frac{F^2}{4} - U(\rho), \quad (39)$$

и пусть имеется минимум в самодействии при $\rho = \rho_0$

$$\min U(\rho) = U(\rho_0). \quad (40)$$

Тогда, естественно рассматривать колебания поля ρ около вакуумного значения ρ_0 . Переходя к переменной R преобразованием сдвига

$$R = \rho - \rho_0 \quad (41)$$

и вводя поле B

$$B = A - \partial\varphi \quad (42)$$

так, что $F^A = F^B$, имеем лагранжиан

$$L = \frac{1}{2}(\partial R)^2 + \frac{1}{2}(R + \rho_0)^2 B^2 - U(R + \rho_0) - \frac{1}{4}F^2 \quad (43)$$

с квадратичным массовым членом $\frac{1}{2}\rho_0^2 B^2$.

3.3. Механизм Громова

Недавно [14] был предложен еще более простой способ возникновения массы у калибровочного поля. Если в формуле (39) считать

$$\rho = \text{const} = m, \quad (44)$$

что эквивалентно наложению связи $|\psi|^2 = m^2$, то имеем

$$L = \frac{m^2}{2}(\partial\varphi - A)^2 - \frac{1}{4}F^2 \quad (45)$$

и после упоминавшейся уже замены

$$B = A - \partial\varphi \quad (46)$$

получаем

$$L = \frac{m^2}{2}B^2 - \frac{1}{4}F^2. \quad (47)$$

Наиболее достоверным благодаря аналогиям в физике твердого тела считается механизм Хиггса, но неясно происхождение минимума в потенциале. Кроме того, частица поля φ , бозон Хиггса, пока не обнаружен. Механизмы Штюкельберга и Громова формально выглядят одинаково, но имеют разные интерпретации.

Необходимо отметить работу [15], где предложен нестандартный подход к проблеме массы калибровочных полей.

4. Новые массивные механизмы

Здесь описаны два способа приобретения массы. Массивные члены в лагранжианах можно получать как специальным выбором функции $V(\rho)$ в обобщенных моделях, описанных ранее, так и прямым построением неполупростых калибровочных теорий.

4.1. Массивная электродинамика

Второе слагаемое в (33) описывает взаимодействие поля материи ρ с калибровочным полем B . Однако этот член можно превратить в массивный. Возьмем лагранжиан (27) с $V(\rho)\rho^2 = 1$. Отметим, что это не накладывает на ρ никаких условий, просто разный выбор функций F' , соответствует разным галлилеево инвариантным лагранжианам

$$L = \frac{1}{2}(\partial\rho)^2 + \frac{1}{2}(\partial\varphi - A)^2 - \frac{1}{4}F^2. \quad (48)$$

Калибровка $\varphi = 0$ или же замена (42) дает

$$L = \frac{1}{2}(\partial\rho)^2 + \frac{1}{2}A^2 - \frac{1}{4}F^2. \quad (49)$$

Поле ρ не взаимодействует с A , поэтому полученное массивное электромагнитное поле имеет лишь фиктивное взаимодействие с φ , убирающееся калибровочным преобразованием.

Сравнивая формулы, видим, что механизм Штюкельберга можно интерпретировать еще и как построение калибровочного поля с группой Галилея. При этом оно оказывается массивным. Поле ρ , которое в случае механизма Хиггса взаимодействует с A , и поэтому должно быть наблюдаемым, теперь свободное, а значит ненаблюдаемое. Если исходить из $U(1)$ локального лагранжиана (20), то выбор $V(\rho)\rho^2 = 1$ соответствует неевклидовой метрике в пространстве полей.

4.2. Массивная $O(3)$ модель

Рассмотрим $O(3)$ локально инвариантную модель. Выберем радиальное представление для $\vec{\varphi}$, как и в глобальном случае. Пусть $\vec{e}_3^t = (0, 0, 1)$, а единичный вектор поля $\vec{\sigma}$ связан с элементом группы вращений $\Omega = \Omega(\theta, \varphi)$ равенством $\vec{\sigma} = \Omega \vec{e}_3$. Тогда

$$\begin{aligned}\vec{\varphi} &= \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} = \rho \vec{\sigma} = \rho \Omega \vec{e}_3 = \rho \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Ковариантная производная приводится к виду

$$D\vec{\varphi} = (\partial + A) \rho \Omega \vec{e}_3 = \Omega (\partial \rho + \rho (\Omega^{-1} \partial \Omega + \Omega^{-1} A \Omega)) \vec{e}_3. \quad (50)$$

Обозначая

$$B = \Omega^{-1} \partial \Omega + \Omega^{-1} A \Omega,$$

запишем лагранжиан

$$L = \frac{1}{2} (D\vec{\varphi})^t D\vec{\varphi} = \frac{1}{2} (\partial \rho)^2 + \frac{1}{2} \rho^2 (B_2^2 + B_3^2) + L_{YM}.$$

Обобщение как обычно выглядит

$$L = \frac{1}{2} (\partial \rho)^2 + \frac{1}{2} V(\rho) \rho^2 (B_2^2 + B_3^2) + L_{YM}$$

и позволяет при специальном выборе $V(\rho) \rho^2 = 1$ получать массивные калибровочные поля. Здесь L_{YM} — стандартный лагранжиан (8).

4.3. Евклидово калибровочное поле

Рассмотрим теперь неабелеву неполупростую калибровочную группу Евклида. Предположение о неполупростом характере групп внутренних симметрий изучали в [16]. Добавим к преобразованиям вращения (15) сдвиги

$$\psi \rightarrow e^{i\alpha} \psi + t = \begin{cases} \varphi_1 \cos \alpha + \varphi_2 \sin \alpha + t_1 \\ -\varphi_1 \sin \alpha + \varphi_2 \cos \alpha + t_2. \end{cases}$$

Получим трехпараметрическую группу Евклида $E(2)$, группу движений метрики Евклида и группу инвариантности лагранжиана (16). Локализация этой симметрии приводит к двум массивным полям A_1, A_2 , соответствующих сдвигам и безмассовому полю вращений A_0 . Глобальное $E(2)$ преобразование

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & t_1 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

с генераторами

$$T_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

и производной

$$\partial\Phi = \begin{pmatrix} \partial & 0 & 0 \\ 0 & \partial & 0 \\ 0 & 0 & \partial \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \partial(g\Phi) = g\partial\Phi,$$

определяет вид простейшего $E(2)$ -глобально-инвариантного лагранжиана

$$L = \frac{1}{2} (\partial\Phi)^t (\partial\Phi).$$

Локальный вариант, как обычно, требует удлинения производной с учетом вида генераторов группы

$$\begin{aligned} \nabla\Phi &= \begin{pmatrix} \partial & -A_0 & -A_1 \\ A_0 & \partial & -A_2 \\ 0 & 0 & \partial \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \\ &\rightarrow \nabla'(g\Phi) = (\partial + A')g\Phi = (\partial g + A'g + g\partial)\Phi = \\ &= g(g^{-1}\partial g + g^{-1}A'g + \partial)\Phi = g\nabla\Phi. \end{aligned}$$

откуда следует преобразование (5) для калибровочных полей. Лагранжиан есть

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} (\nabla\Phi)^t (\nabla\Phi) = \\ &= \frac{1}{2} (\partial\varphi_1 - A_0\varphi_2 + A_1)^2 + \frac{1}{2} (\partial\varphi_2 + A_0\varphi_1 + A_2)^2 + \tilde{L}_{YM}(F^A). \end{aligned} \quad (51)$$

Присутствие слагаемых квадратичных по A сигнализирует о массивности „трансляционных“ компонент калибровочных полей. Здесь \tilde{L}_{YM} уже не определяется формулой (8).

Приведем еще формулы преобразования полей A :

$$\begin{aligned} A_0 &\rightarrow A_0 + \partial\alpha, \\ A_1 &\rightarrow A_1 \cos\alpha + A_2 \sin\alpha - A_0 t_2 - t_2 \partial\alpha + \partial t_1, \\ A_2 &\rightarrow -A_1 \sin\alpha + A_2 \cos\alpha + A_0 t_1 + t_1 \partial\alpha + \partial t_2. \end{aligned}$$

Если выбрать новые переменные используя калибровочные преобразования при $\alpha = 0$, $t_1 = \varphi_1$, $t_2 = \varphi_2$

$$\begin{aligned} B_1 &= A_1 - A_0 \varphi_2 + \partial\varphi_1, \\ B_2 &= A_2 + A_0 \varphi_1 + \partial\varphi_2, \end{aligned}$$

имеем лагранжиан

$$L = \frac{1}{2} (B_1^2 + B_2^2) + \tilde{L}_{YM}(F^B), \quad (52)$$

где две степени свободы φ_1, φ_2 обратились в поперечные компоненты полей B_1, B_2 придав им массу.

5. Выводы

Предложены массивные обобщения калибровочных теорий с полупростыми группами симметрии. Локализация неполупростых внутренних симметрий также приводит к массивности трансляционных компонент калибровочных полей. В обоих случаях не требуется введение дополнительных полей. Возможность использования описанных механизмов в реалистичных моделях требует дополнительных исследований. Отдельной задачей стоит написание лагранжианов для неполупростых полей Янга-Миллса из-за отсутствия невырожденной билинейной формы Киллинга на неполупростых алгебрах.

Литература

1. Славнов А.А., Фаддеев Л.Д. Введение в квантовую теорию калибровочных полей. // Главная редакция физико-математической литературы изд. „Наука“, М. 1978. 249с.
2. Yang C.N. and Mills R.L. Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance// Physical Review. №96. 1954. Pp. 191-195.
3. Demichev A.P., Nelipa N.F. Methods of construction of gauge-invariant lagrangians for arbitrary Lie groups. // Progress of Theoretical Physics. V.76, №3. 1986. Pp.715-725.
4. Tseytlin A.A. On gauge theories for non-semisimple groups // Nuclear Physics B. V.450. № 1-2. 1995. Pp. 231-250.
5. Nappi C.R., Witten E. Wess-Zumino-Witten model based on a non-semisimple group.// Physical Review Letters. V.71. 1993. Pp. 3751-3753.
6. Nuyts J., Wu T.T. Yang-Mills theory for nonsemisimple group.// Physical Review D. V.67. №2. 02014. 2003. 9 p.
7. Ferrari F. Chern-Simons field theories with nonsemisimple gauge group of symmetry.// Journal of Mathematical Physics. V.44. №1. 2003. Pp. 138-145.
8. Andrianopoli L., Ferrara S., Lledo M.A., Macio O. Integration of massive states as contraction of nonlinear σ models.// Journal of Mathematical Physics. V.46. 072307. 2005. 33 p.
9. Andrade V.C., Guillen L.C.T. and Pereira J.G. Teleparallel gravity: an overview.//arXiv:gr-qc/0011087.
10. Scaria T. Translational groups of gauge transformations.// Physical Review D. V.68. 105013. 2003. 12p. ArXiv:hep-th/0302130.
11. Поляков А.М. Калибровочные поля и струны. // Ижевск: Издательский дом „Удмуртский университет“, 1999. 312 с.
12. Stueckelberg E.C. Helv. Phys. Acta. V.11. 1938. Pp.226,229.
13. Higgs P.W. Broken symmetry and the masses of gauge bosons. // Physical Review Letters. V.13. 1964. p.508. Englert, Brout R. Broken symmetry and the masses of gauge vector mesons.// Physical

Review Letters. V.13. 1964. p.321. **Пескин М., Шредер Д.** Введение в квантовую теорию поля. // Ижевск: НИЦ „Регулярная и хаотическая динамика“. 2001. 784с.

14. **Громов Н.А.** Сферическое пространство позволяет обойтись без хиггсовского бозона.// – Сыктывкар, 2007, – 20с. (Научные доклады Коми НЦ УрО РАН. Вып.493). Higgsless Electroweak Theory following from the Spherical Geometry. ArXiv:0705.4575 [hep-th]. Калибровочные теории с калибровочными группами Кэли-Клейна $SO(2; j)$ и $SO(3; j)$ // Алгебра, геометрия и дифференциальные уравнения - Сыктывкар, 2007. - С.3-18. (Труды Коми НЦ УрО РАН). ArXiv:hep-th/0611092, hep-th/0611079.
15. **Faddeev L.D.** An alternative interpretation of the Weinberg–Salam model.// ArXiv:0811.3311 [hep-th]. **Chernodub M.N., Faddeev L.D., Niemi A.J.** Non-Abelian Supercurrents and de Sitter Ground State in Electroweak Theory. //ArXiv:0804.1544 [hep-th].
16. **Sogami I.S** A non-semisimple hidden symmetry for flavor physics// Progress of theoretical physics. V.114. №4. 2005/ Pp. 873–887.
17. **Philip Candelas, Eugene Perevalov, Govindan Pajesh** hep-th/9703148.

Summary

Kostyakov I.V., Kuratov V.V. Massive Yang-Mills fields, translation and nonsemisimple gauge symmetry.

Gauge fields of semisimple groups of internal symmetries are massless and require special techniques for their mass. Massive mechanisms usually contain translational transformations specific to nonsemisimple groups. We show that under the localization nonsemisimple internal symmetry gauge fields corresponding to generators of translation, are massive. In addition, we introduce nonlinear generalizations of well-known models, with local translational symmetry and as a result, the massive gauge fields. Thus, the local Galilean symmetry is realized on a special pair of scalar fields, leading to massive electrodynamics, and the localization of the Euclidean group leads to massive non-Abelian theory without matter fields. We propose a simple interpretation of the Stueckelberg mechanism .