Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1. Вып.10. 2009

УДК 514.12, 512.13, 512.815

О ТОЧНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ ГРУППЫ ДВИЖЕНИЙ ГАЛИЛЕЕВОЙ ПЛОСКОСТИ [1]

Д.Б. Ефимов, И.В. Костяков, В.В. Куратов

Определена алгебра Пименова с двумя образующими D_2 и приведены некоторые ее свойства. Рассмотрены некоторые точные двух- и трехмерные матричные D_2-представления группы движений плоскости Галилея. Дана их геометрическая интерпретация. Приведено также точное представление данной группы элементами алгебры Грассмана.

1. Введение. Представления групп являются мощным инструментом как для изучения структуры самих групп так и для исследования их приложений. Каждое представление интерпретирует группу как множество преобразований тех или иных объектов, тем самым позволяя взглянуть на нее с разных точек зрения. Особую роль играют точные представления, которые отражают все свойства исходной группы и сами с ней неразрывно ассоциируются. В данной работе мы опишем несколько точных матричных и одно гиперкомплексное представление группы движений галилеевой плоскости, которая возникает во многих как математических так и теоретико-физических вопросах (см., например, [7]).

Галилеевой плоскостью называется двумерное вещественное линейное пространство в котором задана билинейная форма (скалярное произведение)

$$(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}) = x_1 x_2, \ \mathbf{v}_1 = (x_1, y_1), \ \mathbf{v}_2 = (x_2, y_2).$$

В частности, расстояние d между точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ определяется здесь по правилу

$$d = \begin{cases} \sqrt{(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)} = |x_1 - x_2|, & x_1 \neq x_2; \\ |y_1 - y_2|, & x_1 = x_2. \end{cases} \tag{1}$$

[1]Работа частично поддержана грантом РФФИ — Беларусь 08-01-90010 и программой "Математические проблемы нелинейной динамики" Президиума РАН.

Галилеева плоскость является одним из девяти возможных двумерных пространств с постоянной кривизной [7]. Под *движением* галилеевой плоскости понимается ее преобразование, сохраняющее расстояние между точками и не меняющее ориентации. Известно, что любое такое движение можно представить в виде композиции сдвигов вдоль координатных осей и вращения вокруг начала координат (галилеева буста). В силу определения расстояния (1) вращения представляют из себя неравномерные сдвиги плоскости вдоль оси ординат. Множество движений галилеевой плоскости образует группу, относительно композиции движений. Будем обозначать ее через $G(2)$.

С точки зрения физики галилеева плоскость является простейшей моделью нерелятивистского пространства-времени. Одна из координат при этом интерпретируется как пространственная координата, а другая как время, а движения плоскости являются не чем иным как преобразованиями Галилея в совокупности с трансляциями системы отсчета. В силу своего относительно простого строения она является хорошей моделью для проверки и отработки более общих конструкций. Группа $G(2)$ не менее часто рассматривается и в рамках приложения в квантовой механике. В этом случае ее обычно называют *группой Гейзенберга*. Вышесказанным объясняется неизменный интерес к этой группе в теоретико-физической литературе, в том числе последних лет.

Работа построена следующим образом. Во втором разделе дается определение и приводятся несколько свойств вещественной алгебры Пименова с двумя образующими и ее подалгебры — алгебры дуальных чисел, на использовании которых основан дальнейший материал. В следующих двух разделах рассматриваются точные трехмерные и двумерные матричные представления группы $G(2)$. В последнем разделе расматривается представление группы $G(2)$ элементами алгебры Грассмана. В конце работы приводиться приложение, в котором для удобства собраны все рассматриваемые в данной работе точные представления группы движений галилеевой плоскости.

2. Алгебра Пименова и дуальные числа. Вещественную алгебру Пименова с двумя образующими $D_2(\mathbf{R})$ (или просто D_2) можно определить как ассоциативную алгебру с единицей и двумя нильпотентными индекса 2, коммутирующими друг с другом, образующими ι_1, ι_2 (дуальными единицами):

$$\iota_1^2 = \iota_2^2 = 0, \quad \iota_1\iota_2 = \iota_2\iota_1 \neq 0. \tag{2}$$

Таким образом, любой элемент алгебры D_2 однозначно представляется

в виде:

$$a = a_0 + a_1\iota_1 + a_2\iota_2 + a_3\iota_1\iota_2, \quad a_i \in \mathbf{R}. \tag{3}$$

По аналогии с комплексными числами величины a_0 и $a - a_0$ называются соответственно *вещественной* и *комплексной* частью элемента a. Для элементов алгебры D_2 естественным образом определяются операции сложения, умножения, умножения на скаляр, удовлетворяющие обычным для числовых систем свойствам коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности. Деление же в отличии от комплексных чисел определено частично, так как не у каждого элемента существует обратный. Точнее, обратный элемент для элемента (3) однозначно определяется по правилу

$$a^{-1} = \frac{1}{a_0^2}\left[a_0 - a_1\iota_1 - a_2\iota_2 + \left(2\frac{a_1a_2}{a_0} - a_3\right)\iota_1\iota_2\right].$$

Отсюда следует, что деление не определено на элементы, вещественная часть которых равна нулю ($a_0 = 0$). Для произвольного элемента (3) можно ввести операцию сопряжения по образующей ι_2:

$$\tilde{a} = a_0 + a_1\iota_1 - a_2\iota_2 - a_3\iota_1\iota_2.$$

Нетрудно проверить, что справедливо свойство $\widetilde{ac} = \tilde{a}\tilde{c}$, $a, c \in D_2$. В силу того, что во многом свойства элементов вида (3) совпадают со свойствами обычных комплексных чисел, их можно отнести к категории так называемых *гиперкомплексных чисел* [4].

Любую матрицу A над алгеброй Пименова D_2 однозначно можно представить в виде:

$$A = A_0 + \iota_1A_1 + \iota_2A_2 + \iota_1\iota_2A_3,$$

где A_i — матрицы такого же размера что и A с элементами из $\mathbf{R}$. Матрицы A_0 и $A - A_0$ называются соответсвенно *вещественной* и *мнимой* частью матрицы A. Множество квадратных $n \times n$ матриц с элементами из D_2 образует вещественную алгебру $M_n(D_2)$. В отличии от D_2 она не коммутативна. Обозначим через $M_n(\mathbf{R})$ множество $n \times n$ матриц с вещественными элементами. Тогда нетрудно показать, что справедливо следующее предложение.

Предложение 1. *Матрица $A = A_0 + \iota_1A_1 + \iota_2A_2 + \iota_1\iota_2A_3$ из $M_n(D_2)$ обратима тогда и только тогда, когда ее вещественная часть A_0 обратима в $M_n(\mathbf{R})$. При этом*

$$A^{-1} = A_0^{-1}\left[A_0 - \iota_1A_1 - \iota_2A_2 + \iota_1\iota_2\left(A_1A_0^{-1}A_2 + A_2A_0^{-1}A_1 - A_3\right)\right]A_0^{-1}.$$

Множество всех обратимых матриц из $M_n(D_2)$ образует группу по умножению $GL_n(D_2)$. Назовем матрицу из $M_n(D_2)$ *невырожденной* если ее определитель обратим в D_2, т.е. если он имеет ненулевую вещественную часть. Учитывая предыдущее предложение, а также то, что при перемножении элементов из D_2 вещественная часть произведения равна произведению вещественных частей, получаем следущее предложение.

Предложение 2. *Вещественная часть определителя матрицы A из $M_n(D_2)$ равна определителю вещественной части матрицы A:*

$$\operatorname{Re}\det A = \det \operatorname{Re} A.$$

Матрица A из $M_n(D_2)$ обратима тогда и только тогда когда она не вырождена.

Рассмотрим произвольную матрицу $A \in M_n(D_2)$. Обозначим через $\tilde{A}$ матрицу, которая получается из матрицы A применением операции сопряжения по ι_2 ко всем ее элементам. Введем для матриц из $M_n(D_2)$ операцию *дуального сопряжения* $\star$ по правилу:

$$A^\star \stackrel{def}{=} \tilde{A}^T.$$

Множество матриц из $GL_n(D_2)$ таких, что $A^\star = A^{-1}$ и $\det A = 1$ образует группу, которую по аналогии со специальной унитарной группой обозначим через $SU(D_2)$.

Функции от элементов из D_2 определяются с помощью их разложения в ряд Тейлора, в котором мнимая часть играет роль приращения [3]. Таким образом, учитывая свойства дуальных единиц, получаем

$$f(a) = f(a_0) + f'(a_0)(a_1\iota_1 + a_2\iota_2 + a_3\iota_1\iota_2) + f''(a_0)a_1a_2\iota_1\iota_2.$$

Например,

$$e^{a_1\iota_1+a_2\iota_2+a_3\iota_1\iota_2} = 1 + a_1\iota_1 + a_2\iota_2 + (a_3 + a_1a_2)\iota_1\iota_2.$$

Если в разложении (3) положить $a_2 = a_3 = 0$, то получим элементы вида

$$a = a_0 + \iota a_1, \quad \iota^2 = 0,$$

которые называются *дуальными числами* [3], [6]. Множество дуальных чисел образует подалгебру в алгебре Пименова D_2 и, следовательно, все вышесказанное очевидным образом переносится и на них.

3. Трехмерные точные представления группы $G(2)$. Одно из наиболее часто встречающихся матричных представлений данной группы имеет вид

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & \theta & 1 \end{pmatrix}, \quad a, b, \theta \in \mathbf{R}. \tag{4}$$

Здесь параметры a и b отвечают за сдвиги вдоль осей координат, параметр θ за вращение вокруг начала координат. Если каждой точке (x, y) галилеевой плоскости сопоставить вектор-столбец $(1, x, y)^T$, то преобразование (4) будет действовать на ней по правилу:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & \theta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x + a \\ y + \theta x + b \end{pmatrix}. \tag{5}$$

В кинематической интерпретации переменная x играет роль времени, переменная y — пространственной координаты, параметр θ определяет значение постоянной скорости движущейся инерциальной системы отсчета относительно неподвижной. Каждый элемент (4) можно однозначно представить в виде произведения

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \theta & 1 \end{pmatrix}$$

элементов однопараметрических подгрупп. Инфинитезимальные операторы данных однопараметрических подгрупп в единице

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

вместе с их коммутационными соотношениями

$$[A_1, A_2] = 0, \quad [A_2, A_3] = 0, \quad [A_3, A_1] = A_2 \tag{6}$$

образуют алгебру Ли $g(2)$ группы движений галилеевой плоскости.

Галилеева плоскость относится к семейству девяти возможных двумерных пространств с постоянной кривизной. Известно, что все эти пространства единым образом моделируются на связных компонентах единичных сфер в трехмерных пространствах $\mathbf{R}^3(j_1, j_2)$, состоящих из

векторов $v = (x, j_1 y, j_1 j_2 z)$, где $x, y, z \in \mathbf{R}$, а j_1, j_2 принимают значения $1, i, \iota_k$; $\iota_k^2 = 0$, $\iota_1\iota_2 = \iota_2\iota_1 \neq 0$, $k = 1, 2$ [5]. Соответственно, группы движений данных девяти двумерных пространств с постоянной кривизной локально изоморфны группам вращений $SO(3, j_1, j_2)$ пространств $\mathbf{R}^3(j_1, j_2)$ [2], [8]. В определенном базисе группы $SO(3, j_1, j_2)$ состоят из матриц вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & j_1 a_{12} & j_1 j_2 a_{13} \\ j_1 a_{21} & a_{22} & j_2 a_{23} \\ j_1 j_2 a_{31} & j_2 a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \ A^T A = A A^T = E, \ \det A = 1, \tag{7}$$

где $a_{ij} \in \mathbf{R}$. Галилеевой плоскости соответствуют значения параметров $j_1 = \iota_1$, $j_2 = \iota_2$. Нетрудно видеть, что общий элемент группы $SO(3, \iota_1, \iota_2)$ в определенной параметризации имеет вид

$$g = \begin{pmatrix} \sigma_1 & -\iota_1\sigma_1\sigma_2 a & -\iota_1\iota_2(\sigma_2 b - a\theta) \\ \iota_1 a & \sigma_2 & -\iota_2\sigma_1\theta \\ \iota_1\iota_2 b & \iota_2\theta & \sigma_1\sigma_2 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

где $\sigma_i = \pm 1$, $a, b, \theta \in \mathbf{R}$. Группа $SO(3, \iota_1, \iota_2)$ не односвязна, она состоит из четырех связных компонент, которым соответствуют четыре комбинации значений параметров σ_1, σ_2. Локально же, как уже было сказано выше, группа $SO(3, \iota_1, \iota_2)$ изоморфна группе движений галилеевой плоскости $G(2)$. А именно, если в формуле (8) положить $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$, то получим общий элемент группы $G(2)$:

$$g = \begin{pmatrix} 1 & -\iota_1 a & -\iota_1\iota_2(b - a\theta) \\ \iota_1 a & 1 & -\iota_2\theta \\ \iota_1\iota_2 b & \iota_2\theta & 1 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Действительно, каждый элемент (9) можно однозначно представить в виде произведения

$$g = \begin{pmatrix} 1 & -\iota_1 a & 0 \\ \iota_1 a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\iota_1\iota_2 b \\ 0 & 1 & 0 \\ \iota_1\iota_2 b & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\iota_2\theta \\ 0 & \iota_2\theta & 1 \end{pmatrix} \tag{10}$$

элементов однопараметрических подгрупп, соответствующих вращениям на конечный угол в координатных плоскостях пространства $\mathbf{R}^3(\iota_1, \iota_2)$. Инфинитезимальные операторы данных однопараметрических подгрупп в единице равны:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\iota_1 & 0 \\ \iota_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\iota_1\iota_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ \iota_1\iota_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\iota_2 \\ 0 & \iota_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Их коммутационные соотношения очевидно совпадают с коммутационными соотношениями (6).

Самой галилеевой плоскости сопоставляется связная компонента единичной сферы $x^2 + (\iota_1 y)^2 + (\iota_1\iota_2 z)^2 = 1$ или $x^2 = 1$ пространства $\mathbf{R}^3(\iota_1, \iota_2)$, т.е. в данном случае просто плоскость $x = 1$. Преобразования (9) действуют на ней по правилу:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\iota_1 a & -\iota_1\iota_2(b - a\theta) \\ \iota_1 a & 1 & -\iota_2\theta \\ \iota_1\iota_2 b & \iota_2\theta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \iota_1 y \\ \iota_1\iota_2 z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \iota_1(y + a) \\ \iota_1\iota_2(z + \theta y + b) \end{pmatrix}, \quad (11)$$

(ср. с (5)). Таким образом, формула (9) дает еще одно матричное представление группы $G(2)$ с помощью ортогональных матриц. Правда в данном случае приходится выходить за рамки поля вещественных чисел и рассматривать матрицы над алгеброй Пименова $D_2(\mathbf{R})$.

4. Двумерные точные представления группы $G(2)$. Рассмотренные выше матричные представления группы $G(2)$ являются трехмерными. Но у данной группы существуют и двумерные точные матричные представления. Рассмотрим некоторые из них. Справедливо следующее предложение.

Предложение 3. *Группа $G(2)$ изоморфна трехпараметрической подгруппе G матриц вида*

$$g = \begin{pmatrix} e^{\iota_2\varphi} & \iota_1(\beta + \iota_2\gamma) \\ -\iota_1(\beta - \iota_2\gamma) & e^{-\iota_2\varphi} \end{pmatrix}, \ \varphi, \beta, \gamma \in \mathbf{R}, \ \iota_k^2 = 0, \ \iota_1\iota_2 = \iota_2\iota_1 \quad (12)$$

группы дуально-унитарных матриц $SU(D_2)$.

Доказательство. Однопараметрические подгруппы группы G имеют вид:

$$g(a) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\iota_1 a}{2} \\ -\frac{\iota_1 a}{2} & 1 \end{pmatrix}, \ g(b) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\iota_1\iota_2 b}{2} \\ \frac{\iota_1\iota_2 b}{2} & 1 \end{pmatrix}, \ g(\theta) = \begin{pmatrix} e^{\frac{\iota_2\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{\iota_2\theta}{2}} \end{pmatrix}.$$

Их инфинитезимальные операторы в единице равны:

$$A_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \iota_1 \\ -\iota_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \iota_1\iota_2 \\ \iota_1\iota_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \iota_2 & 0 \\ 0 & -\iota_2 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что их коммутационные соотношения совпадают с коммутационными соотношениями (6) алгебры Ли группы $G(2)$. Нетрудно также проверить, что $g^\star = g^{-1}$ и $\det g = 1$ (см. раздел 2), т.е. $g \in SU(D_2)$. $\square$

Рассмотрим теперь действие данного представления на галилеевой плоскости. Оно тесно связано с действием предыдущего представления. А именно сопоставим каждой матрице (10) матрицу

$$u = \begin{pmatrix} e^{\frac{\iota_2\theta}{2}} & \iota_1\left[\frac{a}{2}+\iota_2\frac{b}{2}\right]e^{-\frac{\iota_2\theta}{2}} \\ -\iota_1\left[\frac{a}{2}-\iota_2\frac{b}{2}\right]e^{\frac{\iota_2\theta}{2}} & e^{-\frac{\iota_2\theta}{2}} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 1 & \iota_1\frac{a}{2} \\ -\iota_1\frac{a}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \iota_1\iota_2\frac{b}{2} \\ \iota_1\iota_2\frac{b}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{\frac{\iota_2\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{\iota_2\theta}{2}} \end{pmatrix}. \tag{13}$$

вида (12). Нетрудно проверить, что это сопоставление будет групповым изоморфизмом. По определению дуально-сопряженная матрица к матрице u имеет вид:

$$u^\star = \begin{pmatrix} e^{-\frac{\iota_2\theta}{2}} & -\iota_1\left[\frac{a}{2}+\iota_2\frac{b}{2}\right]e^{-\frac{\iota_2\theta}{2}} \\ \iota_1\left[\frac{a}{2}-\iota_2\frac{b}{2}\right]e^{\frac{\iota_2\theta}{2}} & e^{\frac{\iota_2\theta}{2}} \end{pmatrix}.$$

Сопоставим каждому вектор-столбцу $v = (1, \iota_1 y, \iota_1\iota_2 z)^T$ матрицу

$$h_v = \begin{pmatrix} 0 & \iota_1\left[\frac{y}{2}+\iota_2\frac{z}{2}\right]) \\ \iota_1\left[\frac{y}{2}-\iota_2\frac{z}{2}\right]) & 1 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Тогда вращению (11) соответствует следущее действие

$$uh_vu^\star = \begin{pmatrix} 0 & \iota_1\left[\frac{y'}{2}+\iota_2\frac{z'}{2}\right] \\ \iota_1\left[\frac{y'}{2}-\iota_2\frac{z'}{2}\right] & 1 \end{pmatrix} = h_{v'}, \tag{15}$$
$$y' = y + a, \quad z' = z + \theta y + b$$

данного представления в двумерном пространстве матриц (14).

Чтобы дать геометрическую интерпретацию данного соответствия, рассмотрим в пространстве $\mathbf{R}^3(\iota_1, \iota_2)$ стереографическую проекцию с полюсом в точке $P(-1, 0, 0)$. С помощью лучей, выходящих из полюса, она будет сопоставлять каждой точке $A(1, \iota_1 y, \iota_1\iota_2 z)$ связной компоненты единичной сферы $x^2 = 1$ точку $B(\iota_1\frac{y}{2}, \iota_1\iota_2\frac{z}{2})$ плоскости $x = 0$ (рис. 1). В свою очередь точке B однозначно можно сопоставить гиперкомплексные числа

$$\xi = \iota_1\left(\frac{y}{2}+\iota_2\frac{z}{2}\right), \qquad \widetilde{\xi} = \iota_1\left(\frac{y}{2}-\iota_2\frac{z}{2}\right). \tag{16}$$

Рассмотрим вращение связной компоненты единичной сферы (15). Точке сферы $A'(1, \iota_1 y', \iota_1\iota_2 z')$, в которую переходит при вращении точка

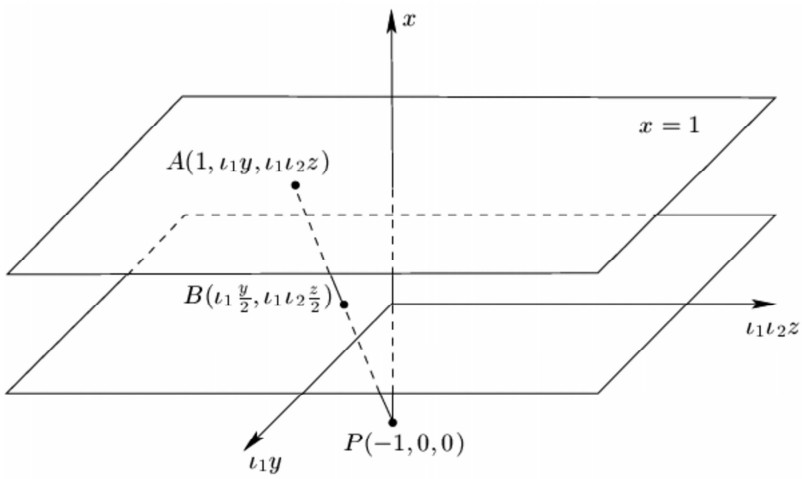

Рис. 1: Стереографическая проекция в пространстве $\mathbf{R}^3(\iota_1, \iota_2)$

$A(1, \iota_1 y, \iota_1\iota_2 z)$ при стереографической проекции будет соответствовать точка $B'(\iota_1 \frac{y'}{2}, \iota_1\iota_2 \frac{z'}{2})$, а ей в свою очередь по правилу (16) будут соответствовать гиперкомплексные числа

$$\eta = \iota_1 \left(\frac{y'}{2} + \iota_2 \frac{z'}{2} \right), \qquad \widetilde{\eta} = \iota_1 \left(\frac{y'}{2} - \iota_2 \frac{z'}{2} \right).$$

Нетрудно показать, что гиперкомплексные числа ξ, η, $\widetilde{\xi}$ и $\widetilde{\eta}$ связаны друг с другом следующими соотношениями:

$$\eta = \frac{e^{\frac{\iota_2\theta}{2}} \xi + \iota_1 \left(\frac{a}{2} + \iota_2 \frac{b}{2} \right) e^{-\frac{\iota_2\theta}{2}}}{-\iota_1 \left(\frac{a}{2} - \iota_2 \frac{b}{2} \right) e^{\frac{\iota_2\theta}{2}} \xi + e^{-\frac{\iota_2\theta}{2}}}, \quad \widetilde{\eta} = \frac{e^{-\frac{\iota_2\theta}{2}} \widetilde{\xi} + \iota_1 \left(\frac{a}{2} - \iota_2 \frac{b}{2} \right) e^{\frac{\iota_2\theta}{2}}}{-\iota_1 \left(\frac{a}{2} + \iota_2 \frac{b}{2} \right) e^{-\frac{\iota_2\theta}{2}} \widetilde{\xi} + e^{\frac{\iota_2\theta}{2}}}. \quad (17)$$

Если на плоскости $x = 0$ пространства $\mathbf{R}^3(\iota_1, \iota_2)$ ввести однородные координаты $(\iota_1 [y_1 + \iota_2 z_1], y_2 + \iota_2 z_2)^T$, $y_1, y_2, z_1, z_2 \in \mathbf{R}$, $y_2 \neq 0$ такие, что $\xi \sim (\iota_1 \xi_1, \xi_2)^T$, $\eta \sim (\iota_1 \eta_1, \eta_2)^T$, т.е. $\xi = \frac{\iota_1 \xi_1}{\xi_2}$, $\eta = \frac{\iota_1 \eta_1}{\eta_2}$, то равенства (17) можно переписать в виде:

$$\begin{pmatrix} \iota_1 \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\frac{\iota_2\theta}{2}} & \iota_1 \left[\frac{a}{2} + \iota_2 \frac{b}{2} \right] e^{-\frac{\iota_2\theta}{2}} \\ -\iota_1 \left[\frac{a}{2} - \iota_2 \frac{b}{2} \right] e^{\frac{\iota_2\theta}{2}} & e^{-\frac{\iota_2\theta}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \iota_1 \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \iota_1 \widetilde{\eta}_1 \\ \widetilde{\eta}_2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \iota_1 \widetilde{\xi}_1 \\ \widetilde{\xi}_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} e^{-\frac{\iota_2\theta}{2}} & -\iota_1 \left[\frac{a}{2} + \iota_2 \frac{b}{2} \right] e^{-\frac{\iota_2\theta}{2}} \\ \iota_1 \left[\frac{a}{2} - \iota_2 \frac{b}{2} \right] e^{\frac{\iota_2\theta}{2}} & e^{\frac{\iota_2\theta}{2}} \end{pmatrix},$$

или кратко

$$\eta = u\xi, \qquad \eta^\star = \xi^\star u^\star. \tag{18}$$

Нормируем теперь однородные координаты так, чтобы $y_2 + \iota_2 z_2 = 1$. Тогда, нетрудно видеть, что

$$\xi\xi^\star = \begin{pmatrix} 0 & \iota_1\left[\frac{y}{2} + \iota_2\frac{z}{2}\right] \\ \iota_1\left[\frac{y}{2} - \iota_2\frac{z}{2}\right] & 1 \end{pmatrix} = h_v, \quad \eta\eta^\star = h_{v'}.$$

Отсюда следует, что перемножив равенства (18), мы получим равенство (15). Таким образом, вращению (15) связной компоненты единицы единичной сферы пространства $\mathbf{R}^3(\iota_1, \iota_2)$ соответствует дробно-линейные преобразования специального вида (17) плоскости $x = 0$, в которую она отображается при стереографической проекции, причем это соответствие является гомоморфизмом.

В работе [9] также подробно рассматриваются двумерные пространства постоянной кривизны и их группы движений. Принятый здесь подход аналогичен подходу в работе [5], но несколько от него отличается. В результате, среди прочего, здесь получено еще одно точное двумерное представление группы движений галилеевой плоскости. А именно показано, что группа $G(2)$ изоморфна трехпараметрической группе G матриц вида

$$g = \begin{pmatrix} e^{\iota\varphi} & \zeta + \iota\eta \\ 0 & e^{-\iota\varphi} \end{pmatrix}, \quad \varphi, \zeta, \eta \in \mathbf{R},\ \iota^2 = 0. \tag{19}$$

Если каждой матрице (9) сопоставить матрицу

$$w = \begin{pmatrix} e^{\frac{\iota\theta}{2}} & \frac{a+\iota b}{2}e^{-\frac{\iota\theta}{2}} \\ 0 & e^{-\frac{\iota\theta}{2}} \end{pmatrix}$$

вида (19), а каждому вектор-столбцу $v = (1, \iota_1 y, \iota_1\iota_2 z)^T$ матрицу

$$p_v = \begin{pmatrix} -1 & y + \iota z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{20}$$

то вращению (11) соответствует следущее действие данного представления в двумерном пространстве матриц (20):

$$wp_vw^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & y' + \iota z' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = p_{v'}; \quad y' = y + a,\ z' = z + \theta y + b.$$

В заключении данного раздела приведем еще одно удобное двумерное представление группы $G(2)$. Каждому элементу (4) группы $G(2)$ сопоставим трехпараметрическую матрицу

$$g = \begin{pmatrix} e^{\iota\theta} & a+\iota b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\iota\theta & a+\iota b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \iota^2 = 0. \tag{21}$$

Нетрудно показать, что данное сопоставление является групповым изоморфизмом. Если сопоставить каждой точке галилеевой плоскости с координатами (x, y) вектор-столбец $(x+\iota y, 1)^T$, то преобразование (21) будет действовать на ней по правилу:

$$\begin{pmatrix} e^{\iota\theta} & a+\iota b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x+\iota y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+a+\iota(y+\theta x+b) \\ 1 \end{pmatrix},$$

которое является движением галилеевой плоскости, совпадающим с движением (5).

5. Гиперкомплексное представление группы $G(2)$. В заключении приведем еще одно, так называемое *гиперкомплексное* представление группы $G(2)$. Рассмотрим грассманову алгебру $\Lambda(\mathbf{R}^2)$, т.е. ассоциативную вещественную алгебру с единицей и с двумя образующими e_1, e_2, удовлетворяющими соотношениям

$$e_1^2 = e_2^2 = 0, \; e_1 e_2 = -e_2 e_1. \tag{22}$$

Общий элемент алгебры $\Lambda(\mathbf{R}^2)$ можно представить в виде

$$q = \alpha_0 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_1 e_2, \tag{23}$$

где $\alpha_i \in \mathbf{R}$. Введем сопряжение и норму в $\Lambda(\mathbf{R}^2)$ по правилу:

$$q = \alpha_0 - \alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2 - \alpha_3 e_1 e_2, \quad |q|^2 = qq = \alpha_0^2.$$

Множество элементов алгебры $\Lambda(\mathbf{R}^2)$ единичной нормы с $\alpha_0 = 1$ обозначим через $\Lambda^1(\mathbf{R}^2)$. Нетрудно видеть, что оно образует группу по умножению. Имеет место следующий интересный факт:

Предложение 4. *Группа Галилея $G(2)$ изоморфна группе элементов алгебры Грассмана $\Lambda(\mathbf{R}^2)$, скалярная часть которых равна* 1:

$$G(2) \cong \Lambda^1(\mathbf{R}^2).$$

Доказательство. Общий элемент (12) группы $G(2)$ можно однозначно представить в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} e^{\iota_2\varphi} & \iota_1(\beta+\iota_2\gamma) \\ -\iota_1(\beta-\iota_2\gamma) & e^{-\iota_2\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \varphi \begin{pmatrix} \iota_2 & 0 \\ 0 & -\iota_2 \end{pmatrix} + \\ + \beta \begin{pmatrix} 0 & \iota_1 \\ -\iota_1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & \iota_1\iota_2 \\ \iota_1\iota_2 & 0 \end{pmatrix} = E + \varphi E_1 + \beta E_2 + \gamma E_1 E_2. \tag{24}$$

Нетрудно видеть, что матрицы E_1, E_2 удовлетворяют соотношениям (22), причем коэффициент перед E равен 1. Это и доказывает изоморфизм $G(2)$ и $\Lambda^1(\mathbf{R}^2)$. □

Рассмотрим одно из действий группы $G(2)$ в данном представлении. Для этого возьмем вещественную алгебру Клиффорда $Cl_3(\mathbf{R})$ с тремя образующими e_1, e_2, e_3, удовлетворяющими соотношениям

$$e_i e_j + e_j e_i = 0,\ i \neq j;\quad e_1^2 = e_2^2 = 0,\quad e_3^2 = 1. \tag{25}$$

Этой алгебре можно дать матричную интерпретацию, если в качестве образующих рассмотреть матрицы E_1, E_2 и

$$E_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что группа $\Lambda^1(\mathbf{R}^2)$ является подгруппой мультипликативной группы алгебры $Cl_3(\mathbf{R})$. Заметим теперь, что при действии (15) каждому вектор-столбцу $v = (1, \iota_1 y, \iota_1\iota_2 z)^T$ вместо матрицы (14) можно однозначно сопоставить матрицу

$$\begin{pmatrix} -1 & \iota_1(y+\iota_2 z) \\ \iota_1(y-\iota_2 z) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & \iota_1 \\ \iota_1 & 0 \end{pmatrix} + \\ + z \begin{pmatrix} 0 & \iota_1\iota_2 \\ -\iota_1\iota_2 & 0 \end{pmatrix} = (E + yE_2 + zE_1E_2)\, E_3. \tag{26}$$

Из этого разложения видно, что множество матриц (26) является подпространством алгебры $Cl_3(\mathbf{R})$. Допустим теперь, что элементу u группы $G(2)$ по правилу (24) соответствует элемент q группы $\Lambda^1(\mathbf{R}^2)$. Тогда нетрудно видеть, что элементу $u^\star$ будет соответствовать элемент $\bar{q}$ и вращение (15) можно записать в следующем клиффордовом виде:

$$q q_v \bar{q} = q_{v'},$$

где q_v и $q_{v'}$ элементы алгебры $Cl_3(\mathbf{R})$, которые по правилу (26) соответствуют матрицам h_v и $h_{v'}$.

Приложение

Точные матричные и гиперкомплексные представления группы движений галилеевой плоскости $G(2)$

1) Стандартное представление:

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & \theta & 1 \end{pmatrix}, \quad a, b, \theta \in \mathbf{R}.$$

2) Представление ортогональными матрицами над алгеброй $D_2(\mathbf{R})$:

$$g = \begin{pmatrix} 1 & -\iota_1 a & -\iota_1\iota_2(b - a\theta) \\ \iota_1 a & 1 & -\iota_2\theta \\ \iota_1\iota_2 b & \iota_2\theta & 1 \end{pmatrix}, \ a, b, \theta \in \mathbf{R}, \ \iota_k^2 = 0, \ \iota_1\iota_2 = \iota_2\iota_1.$$

3) Представление унимодулярными матрицами над алгеброй $D_2(\mathbf{R})$:

$$g = \begin{pmatrix} e^{\iota_2\varphi} & \iota_1(\beta + \iota_2\gamma) \\ -\iota_1(\beta - \iota_2\gamma) & e^{-\iota_2\varphi} \end{pmatrix}, \quad \varphi, \beta, \gamma \in \mathbf{R}, \ \iota_k^2 = 0, \ \iota_1\iota_2 = \iota_2\iota_1.$$

4) Двумерное представление унимодулярными матрицами с дуальными элементами:

$$g = \begin{pmatrix} e^{\iota\varphi} & \zeta + \iota\eta \\ 0 & e^{-\iota\varphi} \end{pmatrix}, \quad \varphi, \zeta, \eta \in \mathbf{R}, \ \iota^2 = 0.$$

5) Двумерное представление с дуальными элементами:

$$g = \begin{pmatrix} e^{\iota\theta} & a + \iota b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a, b, \theta \in \mathbf{R}, \ \iota^2 = 0.$$

6) Представление элементами алгебры Грассмана:

$$g = 1 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_1 e_2, \quad \alpha_i \in \mathbf{R}, \quad e_1^2 = e_2^2 = 0, \quad e_1 e_2 = -e_2 e_1.$$

Литература

1. **Виленкин Н.Я.** Специальные функции и теория представлений групп. М.: Наука, 1965. 588 с.

2. **Громов Н.А.** Контракции и аналитические продолжения групп. Единый подход. Сыктывкар, 1990. 220 с.

3. **Диментберг Ф.М.** Винтовое исчисление и его приложения в механике. М.: Наука, 1965. 200 с.

4. **Кантор И.Л., Солодовников А.С.** Гиперкомплексные числа. М.: Наука, 1973. 144 с.

5. **Пименов Р.И.** Единая аксиоматика пространств с максимальной группой движений // *Литовский математический сборник.* 1965. Т.5. №3. С. 457 – 486.

6. **Яглом И.М.** Комплексные числа и их применение в геометрии. М.: Физматгиз, 1963. 192 с.

7. **Яглом И.М.** Принцип относительности Галилея и неевклидова геометрия. М.: Наука, 1969. 304 с.

8. **Gromov N.A., Kostyakov I.V., Kuratov V.V.** FRT quantization theory for the nonsemisimple Cayley-Klein groups // *(q-alg/9711024).* 1997. 15 P.

9. **McRae A.** Clifford algebras and possible kinematics // *Symmetry, integrability and geometry: methods and applications.* 2007. V.3. 29 P.

Summary

Efimov D.B., Kostyakov I.V., Kuratov V.V. On exact representations for the group motions of Galilean plane

The Pimenov algebra with two generators D_2 is defined and some of its properties are shown. Some exact two- and three-dimensional matrix D_2-representations for the group motions of Galilean plane (the Galilean group) are considered. A geometric interpretation of them is giving. We consider also a exact representation of the Galilean group by elements of Grassmann algebra.

Отдел математики КНЦ УРО РАН *Поступила 23.03.2009*