

УДК 512.55

СТРОЕНИЕ ПОЛУТЕЛ¹

E. M. Вечтомов

Работа представляет собой обзор по алгебраической теории полуателей.

Введение

Теория полуателей – перспективное направление современной алгебры, которое можно рассматривать и как составную часть теории полуколец, и как теорию групп с дополнительной бинарной операцией.

Полуателем называется алгебраическая структура, являющаяся одновременно мультиликативной группой и аддитивной коммутативной полугруппой, причем умножение дистрибутивно относительно сложения с обеих сторон. Мультиликативно коммутативные полуатели называются *полуполями*. Полуатели с добавленным нулем – это в точности полукольца с делением, не являющиеся кольцами. Исходные понятия теории полуателей рассматриваются в пункте 1 нашего обзора.

Примеры полуколец были явно указаны еще Дедекином [69] и Гильбертом [76] в конце XIX-го столетия. Исторически первым примером является, конечно, натуральный ряд \mathbb{N} с добавленным нулем относительно обычных операций сложения и умножения. Понятие полукольца было определено Вандивером в 1934 году [87]. Развитие теории полуколец началось в 50-е годы XX века. Благодаря запросам компьютеризации полукольца активно исследуются последние 20–25 лет. Современная теория полуколец находит применения в компьютерной алгебре и дискретной математике [73, 75], в идемпотентном анализе и теории оптимального управления [33, 79]. Полукольцам посвящены труды [12, 56, 59, 71–75]. Большая библиография по теории полуколец приведена в книгах Глазека [71] и Толана [72, 73].

¹Аналитический научный обзор, поддержанный Российским Фондом Фундаментальных Исследований, грант № 08-01-11000-ано.

В 60-е годы XX века стали изучаться полутела. Им посвящены первые работы Вейнера [89–92], доказавшего в 1962 году, что класс идемпотентных полутел совпадает с классом решеточно упорядоченных групп. Заметной вехой в становлении теории полутел стала работа С. В. Полина 1974 года [37]. В ней введен естественный (разностный) порядок на полутелях, описаны простые полуполя, доказана коммутативность аддитивно сократимых простых полутел. В статье [78] 1990 года Хатчинс и Вейнерт изучили общие свойства ядер полутел. Важные свойства решеток конгруэнций (ядер) полутел установил А. Н. Семенов [43]. Отметим также следующие работы [2, 3, 11, 13, 18, 21–25, 32, 38–42, 44, 51–54, 56, 77, 83].

В связи с развитием идемпотентного анализа В. П. Масловым и его учениками исследовались вопросы линейной алгебры и теории уравнений над идемпотентными полуполями [28, 31, 47, 63, 79, др.].

Полутела изучались в кандидатских диссертациях последних лет [4, 40, 50]. А. В. Ряттель [40] исследовала алгебраические расширения идемпотентных полуполей и линейно упорядоченные полутела. И. И. Богданов [4] занимался условиями коммутативности и аддитивной структурой полутел. О. В. Старостина [50] уточнила взаимосвязи абелево-регулярных положительных полукольца (*arg*-полукольца) и полутел их обратимых элементов. Структурным свойствам полутел посвящены пункты 2 и 3.

С функциональной алгеброй связаны диссертации [7, 36, 45, 59, 62]. Полукольца непрерывных функций со значениями в некоторых топологических полутелях изучала В. И. Варанкина [7], а полуполя непрерывных положительных функций на топологических пространствах рассматривали И. А. Семенова [45], М. Н. Подлевских [36], Д. В. Широков [62]. В. В. Чермных [59] изучал полукольца сечений пучков полукольц. Начало систематическому изучению полукольц и полуполей непрерывных функций положила статья [8] 1998 года. Новые результаты, полученные в этом направлении, мы укажем в пункте 4.

Аддитивно идемпотентные полутела представляют собой решеточно упорядоченные группы. Каждое полутело имеет кольцо разностей, возможно, тривиальное. Аддитивно сократимые полутела вкладывают в свои кольца разностей. Поэтому изучение полутел допускает методы теории колец. Значение полуполей и полутел в теории полукольц подобно значению полей и тел в теории колец.

Наряду с кольцами и дистрибутивными решетками полутела с нулем образуют важнейший класс полукольц, играющий существенную роль в структурной теории полукольц. Изучались различные сочетания этих

трех классов полуколоц. Подполукольца прямых произведений ограниченной дистрибутивной решетки и кольца охарактеризованы в [72]. Полукольцевые объединения кольца и полуутела описаны М. А. Лукиным в [32].² Симбиозом дистрибутивных решеток и полуутел служат *агрополукольца*, теория []

2.2. Ядра

Приведем одну внутреннюю характеристику ядер полуатома.

2.2.1. Подмножество A полуатома U будет ядром в U тогда и только тогда, когда A – нормальная подгруппа мультиликативной группы U со свойством: если $u, v \in U, u + v = 1, a, b \in A$, то $ax + by \in A$.

Эту и другие характеристики ядер полуатомов можно найти в [72, 78].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Ядро A полуатома является подполутелом $\Leftrightarrow 2 = 1 + 1 \in A$.

2.2.2. Главные ядра. Ядро полуатома U , порожденное элементом u , назовем *главным ядром* и обозначим (u) . Это наименьшее ядро в U , содержащее u , оно соответствует главной конгруэнции $\rho(u, 1)$. Главное ядро (2) полуатома U служит наименьшим ядерным подполутелом в U .

ТЕОРЕМА. [53] Пусть a – такой элемент полуатома U , что элемент $a + 1$ коммутирует со всеми элементами полуатома. Тогда

$$(a + 1) = \{u \in U : \exists n \in \mathbb{N} \quad (a + 1)^{-n} \leq u \leq (a + 1)^n\},$$

где \leq – естественный порядок на полуатоме U (см. пункт 3.5.1).

СЛЕДСТВИЕ. Для любого полуатома U имеет место равенство $(2) = \{u \in U : \exists n \in \mathbb{N} \quad 2^{-n} \leq u \leq 2^n\}$.

2.2.3. Полутела с образующей [22]. Множество всех ядер (конгруэнций) полуатома U обозначим $\text{Con}U$. Ядро A полуатома U назовем *конечнопорожденным*, если $A = (u_1) \cdot \dots \cdot (u_n)$ для конечного числа элементов $u_1, \dots, u_n \in U$. Полутело вида $U = (u)$ назовем *полутелом с образующей* u . Понятие образующей полуатома обобщает понятие сильной единицы в теории решеточно упорядоченных групп.

ТЕОРЕМА. Всякое полуатомо, конечнопорожденное как ядро, является полуатомом с образующей.

Если $U = (u_1) \cdot \dots \cdot (u_n)$, то $U = (u)$ при $u = u_1 + u_1^{-1} + \dots + u_n + u_n^{-1}$. Для доказательства применяется следующая лемма:

ЛЕММА. В любом полуатоме верно квазитождество $a + b + c = a \Rightarrow a + b = a$.

2.2.4. Значение полуатомов с образующей обосновывается следующим результатом.

Теорема. [22] Любое полуутело вкладывается – в качестве наибольшего собственного ядра – в зероидное полуутело с образующей.

2.2.5. Полуутело U с образующей 2 называется *ограниченным*.

Теорема. [52] Полуутело ограничено тогда и только тогда, когда все его факторполуутела сократимы.

Следствие. Ограниченные полуутела сократимы.

В качестве следствия отметим также, что сужение любой конгруэнции ρ полуутела U на ядерное подполуутело $[1]_\rho \cdot (2)$ будет сократимой конгруэнцией.

Класс ограниченных полуутел замкнут относительно гомоморфных образов и конечных прямых произведений.

2.2.6. Подполуутело (2) любого полуутела является ограниченным полуутелом.

2.2.7. Имеет место:

Теорема. [53] Ядра подполуполя (2) любого полуполя U являются ядрами и самого полуполя U .

2.2.8. Напомним, что решетка A называется *ретрактом* решетки B , если существуют такие их гомоморфизмы $i : A \rightarrow B$ и $\pi : B \rightarrow A$, что $\pi \circ i = 1_A$.

Следствие. Решетка $\text{Con}(2)$ ядер подполуполя (2) любого полуполя U служит ретрактом решетки $\text{Con}U$.

2.3. Решетка ядер полуутела

Относительно включения \subseteq множество всех конгруэнций на произвольном полуутеле U и множество $\text{Con}U$ его ядер являются изоморфными решетками. Сопоставляя каждой конгруэнции ρ на U ядро $[1]_\rho$, получаем канонический изоморфизм между этими решетками. Поскольку конгруэнции на полуутеле перестановочны, то точной верхней границей \vee двух конгруэнций служит их композиция. Для любых двух ядер A и B полуутела U в решетке $\text{Con}U$ имеем $A \wedge B = A \cap B$ и $A \vee B = AB = BA$. Для произвольного непустого множества ядер $\{A_i : i \in I\}$ в $\text{Con}U$ получаем: $\inf(A_i) = \cap A_i$, $\sup(A_i)$ есть объединение произведений $\prod\{A_i : i \in J\}$ по всевозможным конечным множествам индексов $J \subseteq I$.

2.3.1. Собственное ядро P полуутела U называется *неприводимым*, если $A \cap B \subseteq P$ влечет $A \subseteq P$ или $B \subseteq P$ для любых $A, B \in \text{Con}U$.

Теорема. Каждое собственное ядро любого полутела содержитится в некотором его неприводимом ядре.

Следствие. [22] Максимальные ядра любого полутела неприводимы.

Обозначим через $\text{Sp}(U)$ ($\text{Max}U$) множество всех неприводимых (максимальных) ядер полутела U . Мы видим, что $\text{Max}U \subseteq \text{Sp}(U) \neq \emptyset$ для любого нетривиального полутела U . Возможно, что $\text{Max}U = \emptyset$.

2.3.2. Ядро A полутела U называется *дополняемым*, если существует такое ядро B в U , что $AB = U$ и $A \cap B = \{1\}$.

Теорема. [50, 22] Решетка $\text{Con}U$ ядер любого полутела U является модулярной алгебраической решеткой, в которой множество $\text{B}(U)$ всех дополняемых ядер образует булеву подрешетку.

Следствие. [43] Любое ядро полутела имеет не более одного дополнения.

2.3.3. Полутело U называется *дистрибутивным* (простым, неразложимым), если решетка $\text{Con}U$ дистрибутивна (соответственно: является цепью, двухэлементна, имеет ровно два дополняемых элемента). Полутело U называется *редуцированным*, если в нем выполняется квазитождество $a^2 + b^2 = ab + ba \Rightarrow a = b$. *Псевдодополнением* ядра $A \in \text{Con}U$ называется наибольшее ядро A^* в полутиле U , дающее $\{1\}$ в пересечении с A . Для произвольного неприводимого ядра P полутила U положим $O_P = \{u \in U : \exists v \in U \setminus P \quad (u) \cap (v) = \{1\}\}$.

Теорема. [22] Если полутило U дистрибутивно или является редуцированным и ограниченным, то $\text{Con}U$ – решетка с псевдодополнениями, а множества O_P , $P \in \text{Sp}(U)$, суть ядра в U .

2.3.4. Несколько неожиданным является результат А. Н. Семенова:

Теорема. [43] Конечность решетки $\text{Con}U$ влечет дистрибутивность полутила U .

Доказательство этой теоремы вытекает из следующего утверждения:

Предложение. [43] Если решетка $\text{Con}U$ ядер полутила U содержит диамант M_3 , то она содержит и "счетный" диамант M_∞ .

3. Структурные свойства полуател

Рассмотрим важнейшие свойства полуател.

3.1. О мультипликативной группе полуатела

3.1.1. Вызывает интерес мультипликативное строение полуател.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. [12] *Если ρ – конгруэнция на полуателе U , $a, b \in U$, $ab = ba$ и $a^n \rho b^n$ для некоторого натурального числа n , то $a \rho b$.*

Отсюда вытекают простые, но важные факты:

3.1.2. Отличные от 1 элементы любого полуатела имеют бесконечный мультипликативный порядок.

Поэтому всякое конечное полуатело U тривиально: $U = \{1\}$.

3.1.3. В полуателях корни n -й степени, $n \in \mathbb{N}$, извлекаются однозначно.

Заметим, что не коммутирующие между собой элементы полуатела могут иметь равные n -е степени для некоторых натуральных показателей n . Так, в факторполуателе U/A свободного полуатела U со свободными образующими x и y по главному ядру $A = (x^{-2}y^2)$ элементы $xA \neq yA$ имеют равные квадраты $x^2A = y^2A$.

3.1.4. Приведем одно достаточное условие коммутативности произвольного полуатела.

ТЕОРЕМА. [4] *Если для любого элемента a полуатела U найдется свой натуральный показатель n , что элемент a^n централен, то U коммутативно.*

3.2. Об аддитивной структуре полуател

3.2.1. Следующий результат служит основой элементарного анализа абстрактных полуател.

ТЕОРЕМА. [72] *Всякое полуатело либо идемпотентно, либо содержит копию полуателя \mathbb{Q}^+ в качестве подполуатела.*

3.2.2. Назовем полуатело U расширением полуатела A с помощью полуатела B , если A изоморфно некоторому ядерному подполуателю K полуатела U , факторполуатело U/K по которому изоморфно B . Из 2.2.6 вытекают:

ТЕОРЕМА. *Любое полуатело U служит расширением ограниченного полуатела с помощью идемпотентного полуатела.*

3.2.3. *Всякое простое полуатело либо ограничено, либо идемпотентно.*

3.3. Кольцо разностей

Кольцом разностей полутела U называется универсальный объект категории всевозможных пар (R, f) , где R – кольцо и $f : U \rightarrow R$ – такой гомоморфизм, что $R = f(U) - f(U)$.

3.3.1. Следующее утверждение хорошо известно для полуколец [72].

Теорема. *Каждое полутело имеет кольцо разностей – единственное с точностью до изоморфизма.*

Кольцо разностей $(R(U), h)$ строится обычным образом. На множестве пар $U \times U$ вводится отношение эквивалентности \sim : $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a + d + u = b + c + u$ для подходящего элемента $u \in U$ ($a, b, c, d \in U$). В фактормножестве $R(U) = (U \times U)/\sim$ над классами эквивалентности производятся операции сложения $[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d]$ и умножения $[a, b] \cdot [c, d] = [ac + bd, ad + bc]$. (Класс $[a, b]$ моделирует разность $a - b$.) Получаем кольцо $R(U)$ и канонический гомоморфизм $h : U \rightarrow R(U)$, $h(a) = [a + b, b] = [a + 1, 1]$ для любого $a \in U$.

3.3.2. Кольцо разностей служит важным методом изучения полутел.

Предложение. [55] Для полутела U справедливы следующие утверждения:

- 1) U изоморфно вкладывается в свое кольцо разностей $R(U) \Leftrightarrow h$ – вложение $\Leftrightarrow U$ изоморфно вкладывается в некоторое кольцо $\Leftrightarrow U$ сократимо;
- 2) $R(U) = \{0\} \Leftrightarrow h$ – наложение $\Leftrightarrow U$ зероидно.

Заключаем, что неизоморфные полутела могут иметь одно и то же кольцо разностей. Рассмотрим простейший такой пример с сократимыми полуполями. В поле $R = \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ возьмем подполуполя $P_1 = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}, a - b\sqrt{2} > 0\}$ и $P_2 = R^+ \cap P_1 = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}, a + b\sqrt{2} > 0, a - b\sqrt{2} > 0\}$. Поле R служит кольцом разностей каждого из ограниченных полуполей R^+ , P_1 и P_2 . Полуполя R^+ и P_1 изоморфны, а полуполе R^+ не изоморфно своему подполуполю P_2 .

3.4. Соответствия между ядрами полутела U и идеалами его кольца разностей $R = R(U)$

Обозначим через $\text{Id}R$ решетку всех идеалов кольца R . Для произвольного полутела U рассмотрим отображения:

$$\gamma : \text{Id}R \rightarrow \text{Con}U, \quad \gamma(I) = h^{-1}(I + 1) \text{ для идеалов } I \text{ кольца } R;$$

$$\delta : \text{Con}U \rightarrow \text{Id}R, \quad \delta(A) = (h(A) - 1)U \text{ для ядер } A \text{ полутела } U.$$

3.4.1. Соответствия γ и δ позволяют в ряде случаев сводить изучение свойств полуател к кольцам.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. [8] *Отображение δ – решеточный эпиморфизм, а отображение γ сохраняет \sqcap , причем $\delta \circ \gamma = 1_{\text{Id}_R}$ – тождественное отображение.*

3.4.2. Следующий важный результат принадлежит А. В. Чераневой.

ТЕОРЕМА. *Полуатело U ограниченное $\Leftrightarrow \gamma$ (равносильно, δ) – изоморфизм \Leftrightarrow все конгруэнции на U идеальны.*

Данная теорема вытекает из предложения пункта 2.1.5 и теоремы пункта 2.2.5.

3.5. Порядки на полуателях

Полуатело U с заданным на нем отношением порядка \leq называется *упорядоченным полуателом*, если этот порядок согласован с операциями на U : $a \leq b$ влечет $a + c \leq b + c$, $ac \leq bc$ и $ca \leq cb$ для всех $a, b, c \in U$.

3.5.1. Естественный порядок. На произвольном полуателе U вводится "разностное" отношение \leq : $a \leq b$ означает, что $a = b$ или $a + c = b$ для некоторого элемента $c \in U$. Бинарное отношение \leq является отношением порядка, называемым естественным порядком на полуателе U (следует из леммы 2.2.3). На идемпотентных полуателях $a \leq b$ означает $a + b = b$.

ТЕОРЕМА. [37, 73] *Если U – полуатело, то $\langle U, +, \cdot, \leq \rangle$ – упорядоченное полуатело.*

3.5.2. Сформулируем критерий упорядочиваемости полуполя.

ТЕОРЕМА. [44] *Полуполе U линейно упорядочиваемо тогда и только тогда, когда естественный порядок на факторполуполе $U/S(U)$ линеен.*

Рассмотрим теперь некоторые результаты о линейно упорядоченных полуателях, полученные А. В. Ряттель [38, 40].

3.5.3. Линейно упорядоченное полуатело называется: *аддитивно архimedовым* (*мультипликативно архimedовым*), если для любых его элементов a ($A > 1$) и b существует такое натуральное число n , что $na > b$ ($a^n b$); *непрерывным*, если любое его ограниченное сверху непустое подмножество обладает точной верхней гранью.

ТЕОРЕМА. *Всякое мультипликативно архимедово линейно упорядоченное полуутело изоморфно некоторому подполуполю полу поля \mathbb{R}^+ или полу поля \mathbb{R}^\vee .*

СЛЕДСТВИЕ. *Любое нетривиальное непрерывное линейно упорядоченное полуутело изоморфно либо \mathbb{R}^+ , либо \mathbb{R}^\vee , либо $\langle \mathbb{Z}, \max, + \rangle$.*

3.5.4. Полутело U назовем *вычитаемым*, если для любых его элементов a и b найдется элемент $c \in U$, для которого $a+c = b$ или $a+b = c$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Любое вычитаемое мультипликативно архимедово линейно упорядоченное полуутело – простое.*

Заметим, что вычитаемость идемпотентного полуутела U равносильна линейности естественного порядка не нем: $a+b = b$ или $a+b = a$ для всех $a, b \in U$.

3.5.5. Пример. Сократимое полуполе $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ с лексикографическим порядком является аддитивно архимедовым, но не мультипликативно архимедовым линейно упорядоченным полу полем.

3.5.6. Пример. Полуполе $\mathbb{Q}^+ \times \langle \mathbb{Z}, \max, + \rangle$ с лексикографическим порядком является аддитивно архимедовым неплотным линейно упорядоченным полу полем. В нем между элементами $(1, 0)$ и $(1, 1)$ нет других элементов.

3.5.7. Пример. Пусть на множестве $U = \langle \mathbb{Z}, \max, + \rangle \times \mathbb{Q}^+$ задано покоординатное умножение, а сложение определено формулой:

$$(k, p) + (m, q) = \begin{cases} (m, q) + (k, p) = (m, q) & \text{при } k < m, \\ (k, p + q) & \text{при } k = m. \end{cases}$$

Получаем неидемпотентное зероидное полуполе U . Относительно лексикографического порядка U будет линейно упорядоченным полу полем, не являющимся аддитивно архимедовым.

3.6. Простые полуутела

В [37] С. В. Полин описал простые полу поля, доказал коммутативность сократимых простых полуутел и указал пример некоммутативного идемпотентного простого полуутела. Простые полуутела ограничены (стало быть, сократимы) или идемпотентны (3.2.3).

3.6.1. Следующая теорема С. В. Полина является одним из первых структурных результатов теории полуутел.

ТЕОРЕМА. *Простые сократимые полуутела изоморфны подполуполям поля \mathbb{R}^+ . При этом подполуполе P поля \mathbb{R}^+ просто $\Leftrightarrow P - P$ есть подполе поля \mathbb{R} и*

$$(\forall p \in P)(\exists q_1, q_2 \in \mathbb{Q}^+)(q_1 < p < q_2 \quad \& \quad p - q_1, q_2 - p \in P).$$

В частности, любое вычитаемое подполуполе в \mathbb{R}^+ простое.

СЛЕДСТВИЕ. *Если ограниченное полуугело U полуупросто, то есть $\text{Max}U = \{1\}$, то U – полууполе.*

3.6.2. Дополнением теоремы 3.6.1 является:

ТЕОРЕМА. *Простые идемпотентные полууполя – это с точностью до изоморфизма подполуполя полууполя \mathbb{R}^\vee .*

3.6.3. Еще одним дополнением теоремы 3.6.1 служит

ТЕОРЕМА. [44] *Линейная упорядочиваемость простого полуугела влечет его коммутативность.*

3.6.4. Переформулируем известное утверждение о решеточно упорядоченных группах.

ТЕОРЕМА. [30] *Любое идемпотентное полуугело изоморфно вкладывается в простое идемпотентное полуугело.*

3.7. Идемпотентные полууполя

Они совпадают с решеточно упорядоченными абелевыми группами (пример 1.3.2). Поскольку абелевы группы без кручения линейно упорядочиваются [30], то любая абелева группа без кручения является мультиплекативной группой вычитаемого идемпотентного полууполя. В [18, 40] разработан фрагмент теории алгебраических расширений идемпотентных полууполей.

3.7.1. Важнейшие свойства идемпотентных полууполей U :

- 1) $(a_1 + \dots + a_k)^n = a_1^n + \dots + a_k^n$ для всех $k, n \in \mathbb{N}$ и $a_1, \dots, a_k \in U$ [28].
- 2) В U неравенство Коши приобретает вид $a_1 \cdot \dots \cdot a_n \leq a_1^n + \dots + a_n^n$ [28].
- 3) Для любых $a_1, \dots, a_k \in U$ и $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ отображение $x \rightarrow a_1x^{n_1} + \dots + a_kx^{n_k}$ является автоморфизмом полууполя U [18].
- 4) U является подпрямым произведением вычитаемых идемпотентных полууполей [1, в терминах решеточно упорядоченных групп].

3.7.2. Полуполе U назовем: *делимым*, если его мультиплекативная группа делима; *алгебраически замкнутым*, если любое уравнение $f = 1$, $f \in U[x]$ – многочлен без свободного члена, имеет решение в U .

ТЕОРЕМА. [63] *Любое делимое идемпотентное полууполе алгебраически замкнуто.*

3.7.3. Расширение полуполей $P \supseteq U$ называется *алгебраическим*, когда каждый элемент из P служит корнем некоторого уравнения вида $f = 1$ над U . *Алгебраическое замыкание* полуполя U – это алгебраически замкнутое полуполе, являющееся алгебраическим расширением U .

Теорема. [18] *Всякое идемпотентное полуполе U обладает единственным – с точностью до изоморфизма над U – алгебраическим замыканием.*

Заметим, что существование (но не единственность) алгебраического замыкания произвольного полуполя доказана И. И. Богдановым [2, 4].

3.7.4. Следующий результат открывает тему исследования многообразий полуателей:

Теорема. [30] *Многообразие всех идемпотентных полуполей является наименьшим собственным многообразием идемпотентных полуателей.*

Теорема остается верной и для решетки всех многообразий полуателей.

3.8. Однопорожденные полуатели

Они изоморфны факторполуполям полуателя рациональных дробей $\mathbb{Q}^+(x)$.

3.8.1. Простейшими из них являются *циклические* полуатели – полуатели с циклической мультиплекативной группой.

Теорема. [12] *Любое нетривиальное циклическое полуатело изоморфно идемпотентному полуателю $\langle \{2^k : k \in \mathbb{Z}\}, \max, \cdot \rangle \cong \langle \mathbb{Z}, \max, + \rangle$.*

3.8.2. В [39, 40] описаны однопорожденные полуатели со свойствами идемпотентности и сократимости.

3.9. Дистрибутивные полуатели

Класс дистрибутивных полуателей достаточно широк. Ему принадлежат все идемпотентные полуатели, полуатела с конечным множеством конгруэнций (теорема 2.3.4), цепные полуатели. Цепным полуателем будет, например, полуателе $({}^*\mathbb{R})^+$ положительных элементов нестандартного расширения поля \mathbb{R} ; в этом полуателе нет максимальных ядер. Заметим, что в цепных полуателях все собственные ядра неприводимы. Собственные ядра дистрибутивных полуателей являются пересечениями неприводимых ядер.

3.9.1. Полуатело, все главные ядра (все ядра) которого дополняемы, назовем *бирегулярным* (*булевым*).

Теорема. [22] Любое бирегулярное полуутело дистрибутивно, каждое его неприводимое ядро P максимально и совпадает с O_P .

Нетрудно показать, что конечнопорожденные ядра бирегулярных полуутел являются главными ядрами.

3.9.2. Дистрибутивное полуутело U назовем: *слабо риккартовым*, если из $(a) \cap (b) = \{1\}$ следует $(a)^*(b)^* = U$ для любых $a, b \in U$; *риккартовым*, если для любого $a \in U$ ядро $(a)^*$ дополняемо в $\text{Con}U$; *бэрзовским*, если псевдодополнение любого ядра в U дополняемо. Некоторые общие свойства дистрибутивных, слабо риккартовых и риккартовых полуутел получены в [22], например:

Предложение. *Дистрибутивное полуутело U слабо риккартово тогда и только тогда, когда для любого неприводимого ядра P в U ядро O_P псевдонеприводимо: если $A \cap B = \{1\}$ при $A, B \in \text{Con}U$, то $A \subseteq P$ или $B \subseteq P$.*

Заметим, что бирегулярные полуутела являются риккартовыми, а они, в свою очередь, слабо риккартовы.

3.9.3. Класс дистрибутивных полуутел замкнут относительно взятия гомоморфных образов и конечных прямых произведений. Последнее вытекает из следующего результата А. Н. Семенова [43]:

Теорема. *Решетка ядер прямого произведения конечного числа полуутел изоморфна прямому произведению решеток ядер сомножителей.*

3.9.4. Из утверждений 2.2.7, 2.2.8, 3.4.1 и 3.4.2 вытекают:

Теорема. [54] *Если полуутело U имеет дистрибутивное ядерное подполутело, то само U дистрибутивно.*

Следствие. [54] *Дистрибутивность любого полу поля равносильна дистрибутивности его подполя (2).*

3.10. Редуцированные ограниченные полуутела⁵

Пусть U – произвольное редуцированное ограниченное полуутело. Можно считать, что U вложено в свое кольцо разностей $R = R(U) : U - U = R$, являющееся *редуцированным* кольцом, то есть кольцом без ненулевых нильпотентных элементов. Как указано в теореме 3.4.2,

⁵ См. [94].

отображения $\gamma : \text{Id}R \rightarrow \text{Con}U$ и $\delta : \text{Con}U \rightarrow \text{Id}R$ устанавливают изоморфизм решеток $\text{Id}R$ и $\text{Con}U$, где $\gamma(I) = (I + 1) \cap U$ для всех $I \in \text{Id}R$ и $\delta(A) = (A - 1)U$ для всех $A \in \text{Con}U$.

3.10.1. Для любого неприводимого идеала P редуцированного кольца T с единицей равносильны следующие условия:

- 1) P – минимальный неприводимый идеал;
- 2) P – минимальный первичный идеал;
- 3) $P = O_P$.

3.10.2. Изоморфизмы δ и γ сохраняют неприводимость и конечную порожденность ядер и идеалов – элементов решеток $\text{Con}U$ и $\text{Id}R$ соответственно. Заметим, что конечнопорожденные ядра (идеалы) полутела U (кольца R) суть в точности компактные элементы алгебраической решетки $\text{Con}U$ ($\text{Id}R$) [1].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Неприводимые спектры полутела U и его кольца разностей R канонически гомеоморфны: $\text{Sp}(U) \approx \text{Sp}(R)$.

3.10.3. Многие свойства редуцированных ограниченных полутел выражаются на языке их колец разностей.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Для любых $A, B \in \text{Con}U$, $I, J \in \text{Id}R$, $u, v \in U$ выполняются следующие соотношения:

$$A \cap B = \{1\} \Leftrightarrow \delta(A) \cap \delta(B) = \{0\} = 0 \Leftrightarrow \delta(A) \cdot \delta(B) = 0; \quad (1)$$

$$I^* = \text{Ann}I = \{r \in R : rI = \{0\}\} \text{ и } \delta(A^*) = \text{Ann}\delta(A); \quad (2)$$

$$\text{Ann}(I + J) = \text{Ann}I \cap \text{Ann}J \text{ и } (AB)^* = A^* \cap B^*; \quad (3)$$

$$\delta((u)) = R(u - 1)R -- \text{главный идеал кольца } R; \quad (4)$$

$$(u) \cap (v) = \{1\} \Leftrightarrow (u - 1)(v - 1) = 0 \Leftrightarrow uv + 1 = u + v; \quad (5)$$

$$\delta(O_P) = O_{\delta(P)}; \quad (6)$$

$$\cap\{O_P : P \in \text{Sp}(U)\} = \{1\}. \quad (7)$$

Из предыдущих предложений выводятся следующие утверждения:

3.10.4. Если каждое конечнопорожденное ядро полутела U является главным ядром, то и все конечнопорожденные идеалы его кольца разностей – главные.

3.10.5. Минимальность неприводимого ядра P полутела U эквивалентна равенству $P = O_P$.

3.10.6. Для любого неприводимого ядра P полутела U факторкольцо $R/O_{\delta(P)}$ служит кольцом разностей факторполутела U/O_P , полутельо U/O_P редуцировано, ограничено и $O_{P/O_P} = \{1\}$.

3.10.7. Полутело U является подпрямым произведением семейства редуцированных ограниченных полутел U/O_P ($P \in \mathrm{Sp}(U)$).

4. Полуполя непрерывных положительных функций

Подробнее рассмотрим сравнительно новый объект функциональной алгебры – полуполе $U(X)$ и $U^\vee(X)$ непрерывных положительных функций, заданных на произвольном топологическом пространстве X . Классическим объектом функциональной алгебры является кольцо $C(X)$ всех непрерывных вещественных функций на X [9, 70]. Кольцо $C(X)$ служит кольцом разностей полуполя $U(X)$. Систематическому изучению полуcoleц $C^+(X)$ и $C^\vee(X)$ непрерывных неотрицательных функций на X посвящены диссертации [7, 36, 45, 62]. Исследование полуполей $U(X)$ и $U^\vee(X)$ начато в [11], продолжено в [8, 35, 41, 46, 61, 66]. Отметим некоторые новые результаты (частично содержащиеся в [26, 60]), полученные после выхода в свет обзора [14].⁶

4.1. Продолжение конгруэнций⁷

Дадим решение задачи о продолжаемости конгруэнций полуполя $U(X)$ (полуполя $U^\vee(X)$) на полукольцо $C^+(X)$ (полукольцо $C^\vee(X)$).

4.1.1. $\mathrm{Con}U^\vee(X) \subseteq \mathrm{Con}U(X)$.

4.1.2. Отображение ограничения конгруэнций полукольца $C^+(X)$ ($C^\vee(X)$) на полуполе $U(X)$ ($U^\vee(X)$) является гомоморфизмом решеток.

4.1.3. Для произвольного ядра K полуполя $U^\vee(X)$ введем на полукольце $C^\vee(X)$ бинарное отношение $\rho(K)$: $f\rho(K)g$ означает, что $gk \leq f \leq gm$ для подходящих $k, m \in K$ ($f, g \in C^\vee(X)$).

ТЕОРЕМА. Для любого ядра K полуполя $U^\vee(X)$ отношение $\rho(K)$ является наименьшей среди конгруэнций ρ на полукольце $C^\vee(X)$ со свойством $K \subseteq [1]_\rho$, более того, $[1]_{\rho(K)} = K$.

4.1.4. По каждому ядру K полуполя $U(X)$ зададим на полукольце $C^+(X)$ бинарное отношение $\sigma(K)$ следующим образом: $\sigma(K)g \Leftrightarrow f_1u_1 + \dots + f_nu_n = g_1v_1 + \dots + g_mv_m$, $f = f_1 + \dots + f_n$ и $g = g_1 + \dots + g_m$ для некоторых $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_m \in K$ и $f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_m \in C^+(X)$.

ТЕОРЕМА. Для любого ядра K полуполя $U(X)$ отношение $\sigma(K)$ является наименьшей конгруэнцией на полукольце $C^+(X)$, склеивающей ядро K , причем $[1]_{\sigma(K)} = K$.

⁶Полные версии в [101, 103, 107].

⁷См. [103].

4.1.5. Из утверждений 4.1.2 и 4.1.3 получаем:

Теорема. Решетка $\text{Con}U^\vee(X)$ является ретрактом решетки $\text{Con}C^\vee(X)$, а решетка $\text{Con}U(X)$ есть гомоморфный образ решетки $\text{Con}C^+(X)$.

4.1.6. Как и для полуполей $U(X)$ [46] справедлива

Теорема. Максимальные ядра полуpolloя $U^\vee(X)$ совпадают с ядрами $\gamma(M) = (M + 1) \cap U(X)$ для идеалов M кольца $C(X)$, таких, что $C(X)/M \cong \mathbb{R}$.

4.2. Ядра полуpolloй $U(X)$ и $U^\vee(X)$ ⁸

В этом пункте дается характеристикация ряда свойств произвольного топологического пространства X в терминах ядер полуpolloй непрерывных положительных функций над X .

Напомним необходимые топологические понятия [64, 70]. *Нуль-множеством* на пространстве X называется прообраз 0 некоторой функции из $C(X)$. Топологическое пространство X называется: *псевдокомпактным*, если все функции из $C(X)$ ограниченные; *F-пространством*, если конечнопорожденные идеалы кольца $C(X)$ главные; *P-пространством*, если кольцо $C(X)$ регулярно по Нейману; *базисно несвязным* (*экстремально несвязным*), если внутренности нульмножеств (замкнутых множеств) пространства X замкнуты; *тихоновским*, когда оно вполне регулярно и хаусдорфово.

4.2.1. Характеризация псевдокомпактных пространств.

Теорема. Эквивалентны следующие условия:

- 1) $U(X)$ (равносильно, $U^\vee(X)$) – полуполе с образующей;
- 2) $U(X)$ – ограниченное полуполе;
- 3) все конгруэнции на $U(X)$ идеальные;
- 4) любое собственное ядро полуpolloя $U(X)$ (равносильно, полуpolloя $U^\vee(X)$) содержится в некотором его максимальном ядре;
- 5) пространство X псевдокомпактно.

Отметим, что эквивалентность 2) \Leftrightarrow 3) есть частный случай теоремы 3.4.2.

4.2.2. Характеризация F-пространств.

Теорема. Равносильны следующие утверждения:

- 1) $\text{Con}U(X) = \text{Con}U^\vee(X);$

⁸См. [101, 102].

- 2) полутие $U(X)$ дистрибутивно;
- 3) $\text{Con}C^+(X) \subseteq \text{Con}C^\vee(X)$;
- 4) полутие $U(X)$ (равносильно, $U^\vee(X)$) слабо риккартоно;
- 5) конечнопорожденные ядра полутия $U(X)$ – главные;
- 6) пересечение любых двух главных ядер в $U(X)$ – главное ядро;
- 7) $(u \vee u^{-1}) = (u)$ для всех $u \in U$;
- 8) X – F -пространство.

Заметим, что для идемпотентных полутий, в частности для $U^\vee(X)$, утверждения 2), 5) и 6) являются теоремами.

4.2.3. Характеризации P -пространств.

Теорема. Равносильны следующие условия:

- 1) $\text{Con}C^+(X) = \text{Con}C^\vee(X)$;
- 2) $\text{Con}C^\vee(X) \subseteq \text{Con}C^+(X)$;
- 3) X – P -пространство.

4.2.4. Критерий базисной несвязности топологического пространства.

Теорема. Полутие $U(X)$ (равносильно, $U^\vee(X)$) риккартоно тогда и только тогда, когда пространство X базисно несвязно.

4.2.5. Критерий экстремальной несвязности топологического пространства.

Теорема. Полутие $U(X)$ (равносильно, $U^\vee(X)$) является бэрвским тогда и только тогда, когда пространство X экстремально несвязно.

4.2.6. Характеризации конечных пространств.

Теорема. Для любого тихоновского пространства X эквивалентны следующие утверждения:

- 1) полутие $U(X)$ (равносильно, $U^\vee(X)$) булево;
- 2) полутие $U(X)$ (равносильно, $U^\vee(X)$) бирегулярно;
- 3) для каждого $u \in U$ справедливо равенство $((u + u^{-1})/2) = (u)$;
- 4) X конечно.

5. Пучки полутел⁹

Приведем начальные понятия и факты о пучках полутел [21–24].

5.1. Определение пучка

Пучком полутел называется тройка $\langle X, \Pi, p \rangle$, удовлетворяющая следующим условиям:

- 1) X и Π – топологические пространства, называемые соответственно *базисным* и *накрывающим* пространствами пучка;
- 2) $p : \Pi \rightarrow X$ – локальный гомеоморфизм;
- 3) для каждой точки $x \in X$ множество $U_x = p^{-1}(x)$ является полулем, называемым *слоем* пучка в точке x ;
- 4) операции полутела непрерывны в Π ;
- 5) отображение, переводящее каждую точку $x \in X$ в единицу $1_x \in U_x$, непрерывно.

Тогда

$$\Pi = \bigcup^\bullet U_x,$$

и мы говорим, что Π – пучок полутел U_x над пространством X . Сечением пучка Π над $Y \subseteq X$ называется любое непрерывное отображение $s : Y \rightarrow \Pi$, удовлетворяющее условию $p \circ s = 1_Y$. Сечения над X будем называть просто *сечениями* пучка Π .

Множество $\Gamma = \Gamma(X, \Pi)$ всех сечений пучка Π с поточечно определенными операциями сложения и умножения сечений будет полулем. Пучок Π полутел U_x называется *факторным*, если для любых точки $x \in X$ и элемента $u \in U_x$ существует сечение $s \in \Gamma$, проходящее через $u : s(x) = u$.

Для произвольной точки $x \in X$ определим отображение "вычисления"

$$\pi_x : \Gamma \rightarrow U_x, \pi_x(s) = s(x) \text{ при всех } s \in \Gamma.$$

Очевидно, π_x есть гомоморфизм полутела сечений Γ в полутоле U_x и прообраз $\pi_x^{-1}(A_x)$ любого ядра A_x слоя U_x является ядром в Γ .

Для точки $x \in X$ и множества $Y \subseteq X$ через Γ^x и Γ^Y обозначим следующие ядра полутела сечений Γ :

$$\Gamma^x = \{s \in \Gamma : s(x) = 1 = 1_x \in U_x\} \text{ и}$$

$$\Gamma^Y = \{s \in \Gamma : s = 1 \text{ на } Y\} = \cap\{\Gamma^x : x \in Y\}.$$

⁹См. дополнительно [99].

5.2. Пучки полуутел над нульмерными пространствами

Рассмотрим свойства произвольного пучка Π полуутел U_x над нульмерным пространством X . Т₀-пространство называется нульмерным, если открыто-замкнутые множества образуют в нем базу топологии.

5.2.1. *Пучок Π – факторный.*

5.2.2. *Для различных точек $x, y \in X$ имеет место равенство $\Gamma^x \cdot \Gamma^y = \Gamma$.*

5.2.3. *Если a – элемент ядра A полуутела сечений $\Gamma(X, \Pi)$ пучка Π и W – открыто-замкнутое подмножество в X , то сечение*

$$b = \begin{cases} a \text{ на } W, \\ 1 \text{ на } X \setminus W \end{cases}$$

также принадлежит ядру A .

При доказательстве этого важного в техническом плане утверждения существенно используется техника *арг-полуколец* [23].

5.2.4. *Если $A \in \text{Con}\Gamma$, то $\pi_x(A) \in \text{Con}U_x$.*

5.2.5. *$\pi_x(AB) = \pi_x(A) \cdot \pi_x(B)$, $\pi_x(A \cap B) = \pi_x(A) \cap \pi_x(B)$ для всех $A, B \in \text{Con}\Gamma$.*

5.2.6. Можно дать пучковую характеристизацию целого ряда свойств полуутел.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. [23] *Полуутело $\Gamma(X, \Pi)$ сечений пучка Π полуутел U_x над нульмерным пространством X коммутативно (идемпотентно, сократимо, редуцированно) \Leftrightarrow все слои U_x коммутативны (идемпотентны, сократимы, редуцированы).*

5.2.7. Следующий важный результат показывает, что в случае нульмерного компакта X любое ядро A полуутела $\Gamma(X, \Pi)$ однозначно определяется своими проекциями $\pi_x(A)$.

ТЕОРЕМА. [23] *Пусть A, B – произвольные ядра полуутела сечений $\Gamma(X, \Pi)$ пучка полуутел над нульмерным компактом X . Тогда $A = B$ в том и только в том случае, когда $\pi_x(A) = \pi_x(B)$ для всех $x \in X$.*

В случае конечного дискретного пространства $X = \{1, \dots, n\}$ имеем $\Gamma(X, \Pi) = U_1 \times \dots \times U_n$. Поэтому следствием теоремы 5.2.7 служит теорема 3.9.3:

$$\text{Con}(U_1 \times \dots \times U_n) \cong \text{Con}U_1 \times \dots \times \text{Con}U_n.$$

5.3. Неприводимый и максимальный спектры полутела

Пространство $\text{Sp}(U)$ всех неприводимых ядер полутела U , рассматриваемое со стоуновской топологией, назовем *неприводимым спектром* полутела U . Его подпространство $\text{Max}U$, состоящее из всех максимальных ядер, называется *максимальным спектром* полутела U . В теории пучковых представлений неприводимый спектр полутела заменяет понятие первичного спектра кольца.

Множества $D(A) = \{P \in \text{Sp}(U) : A \not\subseteq P\}$, $A \in \text{Con}U$, объявляются открытыми в стоуновской топологии. Для элемента $u \in U$ полагаем $D(u) = D((u))$. Ясно, что $D(1) = \emptyset$, $D(U) = \text{Sp}(U)$ и $D(\prod A_i) = \cup D(A_i)$ для любого семейства ядер A_i полутела U . Для $A, B \in \text{Con}U$ выполняется равенство $D(A \cap B) = D(A) \cap D(B)$. Тем самым, множества $D(A)$ действительно дают топологию на множестве $\text{Sp}(U)$. Множества $D(u)$, $u \in U$, образуют базу стоуновской топологии на $\text{Sp}(U)$. Аналогично вводится топология на множестве $\text{Max}U$. Получаем T_0 -пространство $\text{Sp}(U)$ и T_1 -пространство $\text{Max}U$.

С учетом теоремы 2.3.1 на основании [22] получаем:

Теорема. Для любого нетривиального полутела U эквивалентны следующие утверждения:

- 1) U – полутело с образующей;
- 2) неприводимый спектр $\text{Sp}(U)$ компактен;
- 3) максимальный спектр $\text{Max}U$ компактен и каждое собственное ядро полутела U содержится в некотором его максимальном ядре.

Сформулированные утверждения показывают, что полутела с образующей служат определенным аналогом колец с единицей.

5.4. Компактные пучки

Пучок Π полутел U_x над топологическим пространством X называется *компактным*, если: X – компакт; Π – факторный пучок; $\Gamma^x \cdot \Gamma^y = \Gamma$ для любых точек $x \neq y$ из X , где $\Gamma = \Gamma(X, \Pi)$.

5.4.1. Свойства компактных пучков Π полутел:

1. Для любых замкнутого множества Y в X , точки $x \in X \setminus Y$ и неприводимого ядра P полутела U_x существует такое сечение $s \in \Gamma^Y$, что $s(x) \notin P$.
2. Всякий пучок полутел над нульмерным компактом компактен.
3. Если в полутиле сечений Γ все собственные ядра лежат в максимальных ядрах, то $\Gamma^Y \cdot \Gamma^Z = \Gamma$ для любых непересекающихся замкнутых множеств Y и Z пространства X (Γ -нормальность пучка Π).

5.4.2. Доказательство указанного свойства З опирается на следующий принципиальный результат, являющийся аналогом классической теоремы Гельфанд-Колмогорова о строении максимальных идеалов колец $C(X)$:

Теорема. [23] *Максимальные ядра полутела сечений $\Gamma(\Pi, X)$ всякого компактного пучка Π полутел U_x суть в точности ядра вида*

$$\pi_x^{-1}(P) = \{s \in I : s(x) \in P\}$$

по всем точкам $x \in X$ и всем максимальным ядрам P полутел U_x , причем различным парам (x, P) отвечают различные ядра $\pi_x^{-1}(P)$. Если к тому же пространство X нульмерно, то это верно и для неприводимых ядер.

5.4.3. Полутело называется *гельфандовым*, если для любых его максимальных ядер $M \neq N$ найдутся такие $u \in M \setminus N$ и $v \in N \setminus M$, что $(u) \cap (v) = \{1\}$.

Предложение. *Максимальные спектры гельфандовых полутел хаусдорфовы, а каждое их неприводимое ядро может содержаться только в одном максимальном ядре.*

5.4.4. Дистрибутивное полутело U с образующей назовем: *сильно гельфандовым*, если для любых различных $M, N \in \text{Max}U$ найдется дополняемое ядро в U , содержащееся в M , но не в N ; *локальным*, если U обладает единственным максимальным ядром. Полуполе $U(X)$ на любом нульмерном компакте X сильно гельфандово.

Теорема. [23] *Для полутела сечений $\Gamma = \Gamma(X, \Pi)$ любого компактного пучка Π локальных полутел U_x справедливы следующие утверждения:*

- 1) Γ гельфандово;
- 2) сильная гельфандовость Γ влечет нульмерность X ;
- 3) если Γ – полутело с образующей, то $\text{Max}\Gamma \approx X$;
- 4) если Γ обладает образующей, то из нульмерности X вытекает сильная гельфандовость Γ .

5.4.5. Дополним предложение 5.2.6.

Теорема. [23] *Полутело $\Gamma(X, \Pi)$ сечений пучка Π полутел U_x над нульмерным компактом X дистрибутивно (ограниченно, зероидно) \Leftrightarrow все слои U_x дистрибутивны (ограничены, зероидны).*

5.5. Аналог пучка Ламбека для полутел

Этот пучок строится для полутела U по открытому семейству его ядер O_P , $P \in \text{Sp}(U)$. Семейство ядер K_x полутела U , занумерованных точками x топологического пространства X , называется *открытым*, если для любого $a \in U$ множество $\{x \in X : a \in K_x\}$ открыто в X . Поэтому в рассматриваемых здесь полуках множества O_P должны быть ядрами. Заметим, что по теореме 2.3.3 требуемым свойством обладают дистрибутивные полуки и редуцированные ограниченные полуки.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Если множества O_P , $P \in \text{Sp}(U)$, являются ядрами полутела U , то существует факторный пучок $L(U)$ полутела U/O_P над неприводимым спектром $\text{Sp}(U)$.*

Структурный пучок $L(U)$ – аналог пучка Ламбека для колец [82].

5.6. Аналог пучка Пирса для полутел

Для любого полутела U возьмем булеву алгебру $B(U)$ всех дополняемых ядер в U и рассмотрим пространство $M(U)$ всех ее максимальных идеалов со стоуновской топологией, то есть максимальный спектр $\text{Max } B(U)$. Если M – максимальный идеал булевой алгебры $B(U)$, то $\vee M = \sup M$ в $\text{Con } U$ – это ядро полутела U , являющееся объединением ядер из M . Ядро вида $\vee M$ является p -ядром, то есть оно не лежит ни в каком неравном ему собственном дополняемом ядре полутела.

5.6.1. При доказательстве следующей теоремы существенно используются структурная теорема и функциональное представление *агр*-полукольца с булевой решеткой идемпотентов [17].

ТЕОРЕМА. [24] *Дизъюнктное объединение факторполутел $U/\vee M$ по p -ядрам $\vee M$ для всех $M \in M(U)$ образует компактный пучок $P(U)$ над нульмерным компактом $M(U)$.*

Пучок $P(U)$ служит некоторым аналогом пучка Пирса для колец [85].

СЛЕДСТВИЕ. *Для любого полутела U семейство ядер $\vee M$ по всем $M \in M(U)$ открыто.*

5.6.2. Возможно равенство $\vee M = U$, тогда слой $U/\vee M$ тривиален. В следующем случае соответствующий слой будет нетривиальным. Пусть A – максимальное ядро полутела U , тогда $M = \{B \in B(U) : B \subseteq A\} \in M(U)$ и $M_A = \vee M \subseteq A$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Если $\text{Max } U \neq \emptyset$, то отображение $\varphi : \text{Max } U \rightarrow M(U)$, сопоставляющее каждому максимальному ядру A в U ядро M_A , непрерывно.*

6. Функциональные представления полуутел¹⁰

Изложим основные результаты о пучковых представлениях полуутел. *Функциональным (пучковым) представлением* полуутела U называется любой гомоморфизм $\alpha : U \rightarrow \Gamma(X, \Pi)$ полуутела U в полуутело сечений некоторого пучка Π полуутел. Представление α называется *точным, полным, изоморфным*, если отображение α соответственно инъективно, сюръективно, биективно.

Для открытого семейства K ядер K_x полуутела U возьмем соответствующий пучок $K(U)$ факторполутел U/K_x над пространством X и естественное отображение $\hat{\gamma} : U \rightarrow \Gamma(X, K(U))$, определяемое формулой:

$$\hat{a} = aK_x \text{ для всех } a \in U \text{ и } x \in X.$$

Получаем *структурное* пучковое представление $\hat{\gamma}$ полуутела U .

6.1. Представление Ламбека [21, 23]

Представлением Ламбека полуутела U назовем структурное функциональное представление полуутела U в пучке $L(U)$; при этом $K = (O_P)$, $P \in \text{Sp}(U)$.

6.1.1. Полутело имеет точное представление Ламбека, если все его множества вида O_P суть ядра и каждое ядро обладает псевододополнением. Это утверждение применимо к дистрибутивным полуутелам и к редуцированным ограниченным полуутелам.

6.1.2. Пучковая характеристизация сильно гельфандовых полуутел.

ТЕОРЕМА. Полутело U с образующей сильно гельфандово $\Leftrightarrow U \cong \Gamma(X, \Pi)$ для подходящего пучка Π локальных полуутел над нульмерным компактом X .

Для сильно гельфандова полуутела U годится пучок $L(U)$ над $\text{Max}U$.

6.1.3. Если U – редуцированное ограниченное полуутело, являющееся максимальным подполутелом своего кольца разностей, то $U \cong \Gamma(\text{Sp}(U), L(U))$.

6.2. Представление Пирса [24]

Это структурное представление полуутела U в пучке $P(U)$, здесь $K = (\vee M)$, $M \in \text{M}(U)$.

6.2.1. На основе теоремы 5.6.1 получаем:

ТЕОРЕМА. Представление Пирса всякого полуутела изоморфно.

¹⁰Подробности в [97, 99, 100].

СЛЕДСТВИЕ. Если множество дополняемых ядер полутела U конечно, то U изоморфно прямому произведению конечного числа неразложимых полутел.

6.2.2. Условие совпадения представлений Пирса и Ламбека.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если полутело U сильно гельфандово, то $M(U) = \text{Max}U$, $P(U) = L(U)$ и представления Пирса и Ламбека для U совпадают.

Возникает вопрос: имеет ли место для сильно гельфандовых полутел вариант двойственности Малви [84] для гельфандовых колец?

6.3. Бирегулярные полутела

Они похожи по своим свойствам на бирегулярные кольца (отсюда и название). Любое бирегулярное полутело U дистрибутивно, пространство $\text{Max}U$ совпадает с $\text{Sp}(U)$ и является булевым, собственные ядра в U суть пересечения максимальных ядер, $O_P = P$ и U/O_P – простое полутело для каждого $P \in \text{Sp}(U)$. Напомним, что нульмерные локально компактные пространства называются *булевыми*.

Применим к бирегулярным полутелам U пучковые представления Пирса и Ламбека. Начнем с представления Пирса. При любом $M \in M(U)$ либо $\vee M = U$, либо ядро $\vee M$ максимальное. Отображение из предложения 5.6.2 является гомеоморфным вложением $\text{Max}U$ в $M(U)$. Отождествим $\text{Max}U$ с плотным подпространством $\varphi(\text{Max}U)$ пространства $M(U)$.

6.3.1. $M(U)$ есть компактификация булева пространства $\text{Max}U$ для любого бирегулярного полутела U .

6.3.2. Пучковое описание бирегулярных полутел.

ТЕОРЕМА. [24] Произвольное полутело бирегулярно \Leftrightarrow оно изоморфно полутелу $\Gamma(X, \Pi)$ всех сечений некоторого пучка Π простых и тривиальных полутел над нульмерным компактом X .

Для бирегулярного полутела U можно взять $X = M(U)$ и $\Pi = P(U)$.

6.3.3. Для бирегулярного полутела U с образующей пучок $P(U)$ хаусдорфов, то есть его накрывающее пространство хаусдорфово.

ТЕОРЕМА. [21] Полутело с образующей бирегулярно \Leftrightarrow оно изоморфно полутелу всех сечений некоторого (равносильно, некоторого хаусдорфова) пучка простых полутел над нульмерным компактом.

6.3.4. Разложимость бирегулярных полутел.

Теорема. [21] Любое бирегулярное полуутело разлагается в прямое произведение однозначно определенных бирегулярного идемпотентного полуутела и бирегулярного ограниченного полууполя.

На основе теорем 6.3.2 и 6.3.3 получаются следующие результаты:

6.3.5. Критерий булевости полуутела.¹¹

Теорема. Булевость произвольного бирегулярного полуутела U эквивалентна дискретности его максимального спектра $\text{Max}U$. При этом $M(U)$ слежест с тоун-чеховской компактификацией дискретного пространства $\text{Max}U : M(U) \approx \beta\text{Max}U$.

Следствие. Бирегулярное полуутело с образующей булево \Leftrightarrow оно изоморфно прямому произведению конечного числа простых полуутел.

6.3.6. Характеризация бэротовости.

Теорема. Для того чтобы бирегулярное полуутело с образующей было бэровым, необходимо и достаточно, чтобы его максимальный спектр был экстремально несвязным пространством.

6.3.7. Рассмотрим теперь пучок Ламбека $L(U)$ бирегулярного полуутела U . Базисные множества $D(a) = \{P \in \text{Sp}(U) : a \notin P\}$, $a \in U$, спектра $\text{Sp}(U) = \text{Max}U$ компактны и открыто-замкнуты. Напомним, что носителем сечения $s \in \Gamma(X, \Pi)$ называется замкнутое подмножество $\text{supps} = \{x \in X : s(x) \neq 1\}$ в X . Обозначим через $\Gamma_{00}(X, \Pi)$ множество всевозможных сечений s пучка Π с компактным носителем supps . Множество $\Gamma_{00}(\text{Max}U, L(U))$ является ядерным подполутелом полуутела $\Gamma(\text{Max}U, L(U))$ всех сечений хаусдорфова пучка $L(U)$ простых полуутел U/P над булевым пространством $\text{Max}U$. Имеем $\text{supp}\hat{a} = D(a)$ для всех $a \in U$. Равенство $\Gamma_{00}(\text{Max}U, L(U)) = \Gamma(\text{Max}U, L(U))$ эквивалентно наличию образующей у полуутела U . Если U не имеет образующей, то $\text{Max}U$ не компактно, значит, не компактно и множество $\text{Max}U \setminus D(2) = \{P \in \text{Max}U : U/P - \text{идемпотентное полуутело}\}$. В этом случае почти все слои пучка Ламбека идемпотентны и факторполутело $\Gamma(\text{Max}U, L(U)) / \Gamma_{00}(\text{Max}U, L(U))$ нетривиально и идемпотентно.

Имеет место аналог теоремы Даунса-Гофмана [67]:

Теорема. Полутело U бирегулярно $\Leftrightarrow U \cong \Gamma_{00}(X, \Pi)$ для некоторого (хаусдорфова) пучка Π простых полуутел над булевым пространством X .

¹¹См. также [95].

В доказательство \Rightarrow применяется представление Ламбека.

ЗАМЕЧАНИЕ. Категория всех бирегулярных полуатомов и их гомоморфизмы двойственна категории всевозможных хаусдорфовых пучков простых полуатомов над булевыми пространствами с гомоморфизмами пучков в качестве морфизмов. В терминах этих категорий можно характеризовать те или иные свойства бирегулярных полуатомов и булевых пространств.

Заключение: проблемы и перспективы

Мы видим, что теория полуатомов прошла начальный этап своего развития – становление. Появились свои специфические, оригинальные идеи и методы исследования полуатомов: метод соответствий между ядрами полуатома и идеалами его кольца разностей, метод главных ядер, техника *арг-полуколец*, расширения полуатомов, понятия строгого уравнения и его дифференциала, рассмотрение 0-компонент неприводимых ядер, пучковые представления и др. Анализируя накопленный материал о полуатомах, можно выделить некоторые, как нам представляется, перспективные направления дальнейших исследований.

Во-первых, систематическое **изучение полуатомов**, включающее в себя следующие темы. *Описание конечнопорожденных полуатомов*. Это нетривиальная, но реальная задача, решение которой поможет лучше разобраться в устройстве полуатомов.

Классификация числовых полуатомов – подполуполей поля комплексных чисел. Она тесно связанная с теорией многочленов и расширений сократимых полуатомов, начало которой положено в [78] и диссертации И. И. Богданова [4]. Естественно поставить вопросы: когда числовое кольцо служит кольцом разностей полуатома? Что представляет собой множество таких полуатомов?

Во-вторых, **построение общей теории полуатомов**. *Выяснение строения свободных полуатомов*. Понимание строения свободных полуатомов с двумя и более свободными образующими позволит строить полуатомы с различными наперед заданными свойствами.

Проблема абстрактной характеристизации решеток ConU ядер полуатомов. В частности, всякая ли конечная дистрибутивная решетка изоморфна решетке вида ConU (U – полуатомо)? Заметим, что эта проблема решается положительно и для решеток U [27], и для групп U [86], но далеко не любая конечная дистрибутивная решетка служит решеткой ядер идемпотентного полуатома [1]. Булевы и алгебраические цепи также изоморфны решеткам ядер полуатомов.

Полумодули над полуателами: линейная алгебра, гомологические вопросы. Свойства полумодулей над полуателом мало похожи на свойства векторных пространств. Вызывает интерес круг вопросов об описании свойств полуател в терминах категорий полумодулей над ними. Заметим, что теорией матриц над полукольцами занимается А. Э. Гутерман (МГУ). Гомологические свойства полукольца изучаются более десяти лет. Назовем новые работы С. Н. Ильина (Казанский университет) [29] и Е. Кацова (США) [80]. Полумодули над идемпотентными полуателями изучаются в школе академика В. П. Маслова (скажем, в [28, 47]). В [15] показано, что всякий полумодуль над полуателом с нулем является расширением сократимого полумодуля с помощью идемпотентного полумодуля.

Изучение многообразий и квазимногообразий полуател. Как устроена решетка многообразий (квазимногообразий) всевозможных полуател? полуателей? Мы отмечали, что многообразие идемпотентных полуателей служит наименьшим ненулевым элементом (единственным атомом) решетки всех многообразий полуател.

В-третьих, функциональное представление полуател. *Построение новых структурных пучков полуател.* Получение характеризаций различных свойств полуател в терминах структурных пучков. Установление связей пучков полуател с вопросами логики и теории моделей; их применение в теории полуател. Функциональный подход инициирует и стимулирует структурный анализ отдельных классов полуател: дистрибутивных, гельфандовых, бирегулярных, риккартовых, ограниченных, идемпотентных и др. На этом пути можно ждать новых результатов и в теории решеточно упорядоченных групп.

Наконец, представляется интересным и важным исследование **конечных алгебраических объектов, близких к полуателам** (конечные полуатела тривиальны). Например, описание конечных "полуател" с некоммутативным сложением. Решение такой задачи найдет применение в теории кодирования, криптографии.

Дальнейшие исследования по структурной теории полуател, безусловно, будут способствовать развитию общей теории полукольца, обогащению абстрактной алгебры и расширению ее приложений.

Литература

1. Биркгоф Г. Теория решеток. М.: Наука, 1984.

2. **Богданов И. И.** Алгебраические расширения полуполей // *Успехи математических наук. 2004. Т. 59. Вып. 1. С. 181–182.*
3. **Богданов И. И.** Об аддитивной структуре полутел // *Вестник Моск. ун-та. Сер.1, Математика. Механика. 2004. № 1. С. 48–50.*
4. **Богданов И. И.** Полиномиальные соотношения в полукольцах. Дис. ... канд. физ.-матем. наук. Москва: МГУ, 2004.
5. **Бредон Г.** Теория пучков. М.: Наука, 1988.
6. **Варанкина В. И.** Максимальные идеалы в полукольцах непрерывных функций // *Фундаментальная и прикладная математика. 1995. Т. 1. № 4. С. 923–937.*
7. **Варанкина В. И.** Максимальные идеалы и делимость в полукольцах непрерывных функций. Дис. ... канд. физ.-матем. наук. Киров: Вятский гос. пед. ун-т, 1996.
8. **Варанкина В. И., Вечтомов Е. М., Семенова И. А.** Полукольца непрерывных неотрицательных функций: делимость, идеалы, конгруэнции // *Фундаментальная и прикладная математика. 1998. Т. 4. № 2. С. 493–510.*
9. **Вечтомов Е. М.** Кольца непрерывных функций на топологических пространствах. Избранные темы. М.: Моск. пед. гос. ун-т, 1992.
10. **Вечтомов Е. М.** Функциональные представления колец. М.: Моск. пед. гос. ун-т, 1993.
11. **Вечтомов Е. М.** О конгруэнциях на полутилах // *Материалы международной конференции "Проблемы алгебры и кибернетики", посвященной памяти академика С. А. Чунухина. Гомель, 1995. С. 38–39.*
12. **Вечтомов Е. М.** Введение в полукольца. Киров: Вятский гос. пед. ун-т, 2000.
13. **Вечтомов Е. М.** О свойствах полутила // *Математический вестник педвузов Волго-Вятского региона. 2001. Вып. 3. С. 11–20.*
14. **Вечтомов Е. М.** Полукольца непрерывных отображений // *Вестник ВятГГУ. 2004. № 10. С. 57–64 (при поддержке гранта РФФИ 03-01-07005).*

15. **Вечтомов Е. М.** О трех радикалах для полумодулей // *Вестник ВятГГУ. 2005. № 13. С. 148–151.*
16. **Вечтомов Е. М.** Функциональные представления полуутел // *Международная алгебраическая конференция, посвященная 100-летию со дня рождения А. Г. Куроша. Тезисы докладов. М: МГУ, 2008. С. 58-60.*
17. **Вечтомов Е. М., Михалев А. В., Чермных В. В.** Абелево-регулярные положительные полукольца // *Труды семинара им. И. Г. Петровского. 1997. Т. 20. С. 282–309.*
18. **Вечтомов Е. М., Ряттель А. В.** Аддитивно идемпотентные полуполя // *Вестник ВятГГУ. 2002. № 7. С. 96–102.*
19. **Вечтомов Е. М., Старостина О. В.** Структура абелево-регулярных положительных полуколец // *Успехи математических наук. 2007. Т. 62. Вып. 1. С. 199–200.*
20. **Вечтомов Е. М., Старостина О. В.** Обобщенные абелево-регулярные положительные полукольца // *Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2007. Вып. 7. С. 3–16.*
21. **Вечтомов Е. М., Черанева А. В.** К теории полуутел // *Успехи математических наук. 2008. Т. 63. Вып. 2. С. 161–162.*
22. **Вечтомов Е. М., Черанева А. В.** Неприводимые ядра полуутел // *Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. 2008. Вып. 10. С. 25–31.*
23. **Вечтомов Е. М., Черанева А. В.** Пучки полуутел над нульмерным компактом // *Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. 2008. Вып. 10. С. 32–44.*
24. **Вечтомов Е. М., Черанева А. В.** Аналог пучкового представления Пирса для полуутел // *Современная математика и математическое образование, проблемы истории и философии математики. Международная научная конференция. Тамбов, 2008. С. 24–27.*
25. **Вечтомов Е. М., Черанева А. В.** О свойствах полуутел // *Международная алгебраическая конференция, посвященная 100-летию со дня рождения А. Г. Куроша. Тезисы докладов. М: МГУ, 2008. С. 56–57.*

26. Вечтомов Е. М., Чупраков Д. В. Конгруэнции на полукольцах непрерывных функций и F -пространства // *Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2008. Вып. 8. С. 15–26.*
27. Гретцер Г. Общая теория решеток. М.: Мир, 1982.
28. Дудников П. И., Самборский С. Н. Эндоморфизмы полумодулей над полукольцами с идемпотентной операцией // *Известия РАН. Серия математическая. 1991. Т. 55. № 1. С. 93–109.*
29. Ильин С. Н. О применимости к полукольцам двух теорем теории колец и модулей // *Математические заметки. 2008. Т. 83. Вып. 4. С. 536–544.*
30. Копытов В. М. Репеточно упорядоченные группы. М.: Наука, 1984.
31. Литвинов Г. Л., Маслов В. П., Шпиз Г. Б. Линейные функционалы на идемпотентных пространствах. Алгебраический подход // *Доклады РАН. 1998. Т. 363. № 3. С. 298–300.*
32. Лукин. М. А. Дизъюнктное полукольцевое объединение кольца и полутела // *Чебышевский сборник. 2005. Т. 6. Вып. 4(16). С. 126–135.*
33. Маслов В. П., Колокольцов В. Н. Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении. М.: Наука, 1994.
34. Общая алгебра / Под общ. ред. Л. А. Скорнякова. В 2-х т. М.: Наука, Т. 1, 1990; Т. 2, 1991.
35. Подлевских М. Н. Замкнутые конгруэнции на полукольцах непрерывных функций // *Фундаментальная и прикладная математика. 1999. Т. 5. № 3. С. 947–952.*
36. Подлевских М. Н. Полукольца непрерывных функций с топологией поточечной сходимости. Дис. ... канд. физ.-матем. наук. Киров: Вятский гос. пед. ун-т, 1999.
37. Полин С. В. Простые полутела и полуполя // *Сибирский математический журнал. 1974. Т. 15. № 1. С. 90–101.*

38. **Ряттель А. В.** О линейно упорядоченных полуутелях // *Вестник Вятского гос. пед. ун-та. 2000. № 3-4. С. 178–182.*
39. **Ряттель А. В.** Однопорожденные полукольца с делением // *Математический вестник педвузов Волго-Вятского региона. 2002. № 4. С. 39–45.*
40. **Ряттель А. В.** Положительно упорядоченные полуутела. Дис. ... канд. физ.-матем. наук. Киров: ВятГГУ, 2002.
41. **Семенов А. Н.** О подалгебрах полуколец непрерывных функций // *Математический вестник педвузов Волго-Вятского региона. 1998. Вып. 1. С. 83–90.*
42. **Семенов А. Н.** О строении полуутел // *Вестник ВятГГУ. 2003. № 8. С. 105–107.*
43. **Семенов А. Н.** О решетке конгруэнции полуутел // *Вестник ВятГГУ. 2003. № 9. С. 92–95.*
44. **Семенов А. Н.** Порядки на полуполях // *Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. 2004. Вып. 6. С. 77–92.*
45. **Семенова И. А.** Конгруэнции на полукольцах непрерывных функций. Дис. ... канд. физ.-матем. наук. Киров: Вятский гос. пед. ун-т, 1998.
46. **Семенова И. А.** Максимальные конгруэнции на полууполе непрерывных положительных функций // *Фундаментальная и прикладная математика. 2000. Т. 6. № 1. С. 305–310.*
47. **Сергеев С. Н.** Идемпотентные аналоги теорем отделимости и образующие идемпотентных полумодулей. Автореферат дис. ... канд. физ.-матем. наук. - М.: МГУ, 2008.
48. **Старостина О. В.** Строение абелево-регулярных положительных полуколец // *Чебышевский сборник. 2005. Т. 6. Вып. 4 (16). С. 142–151.*
49. **Старостина О. В.** Функциональное представление абелево-регулярных положительных полуколец // *Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. 2007. Вып. 9. С. 70–75.*

50. Старостина О. В. Абелево-регулярные положительные полукольца. Дис. ... канд. физ.-матем. наук. - Киров: ВятГГУ, 2007.
51. Черанева А. В. О сократимых конгруэнциях на полуутелах // Вестник ВятГГУ. Информатика. Математика. Язык. 2005. Вып. 3. С. 160–163.
52. Черанева А. В. О конгруэнциях на полуутелах // Чебышевский сборник. 2005. Т. 6. Вып. 4(16). С. 164–171.
53. Черанева А. В. О главном ядре, порожденном 2 // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. 2006. Вып. 8. С. 120–125.
54. Черанева А. В. О дистрибутивности полуутел // Современные методы физико-математических наук. Труды международной конференции. Т. 1. Орел, 2006. С. 198–200.
55. Черанева А. В. Кольцо разностей полуутела // Вестник ВятГГУ. Информатика. Математика. Язык. 2007. Вып. 4. С. 205–207.
56. Чермных В. В. Полукольца. Киров: Вятский гос. пед. ун-т, 1997.
57. Чермных В. В. (Ополноте пучковых представлений полуколец // Фундаментальная и прикладная математика 1996. Т. 2, № 1. С. 267–277.
58. Чермных В. В. Полукольца сечений пучков // Вестник ВятГГУ. 2005. № 13. С. 151–158 (при поддержке гранта РФФИ 03-01-07005).
59. Чермных В. В. Функциональные представления полуколец и полумодулей. Дис. ... докт. физ.-матем. наук. Киров: ВятГГУ, 2007.
60. Чупраков Д. В. О главных ядрах полуполей непрерывных функций // Современная математика и математическое образование, проблемы истории и философии математики. Международная научная конференция. Тамбов, 2008. С. 33–36.
61. Широков Д. В. Условия дистрибутивности решетки конгруэнции полуполя непрерывных положительных функций // Вестник ВятГГУ. 2003. № 8. С. 137–140.
62. Широков Д. В. Идеалы в полукольцах непрерывных функций. Дис. ... канд. физ.-матем. наук. Киров: ВятГГУ, 2005.

63. Шпиз Г. Б. Решение алгебраических уравнений в идемпотентных полуполях // Успехи математических наук. 2000. Т. 55. Вып. 5. С. 185–186.
64. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986.
65. Applications of sheaves. Lect. Notes Math. № 753. Springer-Verlag, 1979.
66. Artamonova I. I., Chermnykh V. V., Mikhalev A. V., Varankina V. I., Vechtomov E. M. Semirings: sheaves and continuous functions // Semigroups with applications, including semigroup rings. Sankt-Peterburg. 1999. P. 23–58.
67. Dauns J., Hofmann K. H. The representation of biregular rings by sheaves // Math. Z. 1966. V. 91. № 2. P. 103–123.
68. Davey B. A. Sheaf spaces and sheaves of universal algebras // Math. Z. 1973. V. 134. № 4. P. 275–290.
69. Dedekind R. Über die Theorie ganzen algebraischen Zahlen. Supplement XI to P. G. Lejeune Dirichlet: Vorlesungen Über Zahlentheorie, 4 Anfl., Druck und Verlag. Braunschweig, 1894.
70. Gillman L., Jerison M. Rings of continuous functions. N.Y.: Springer-Verlag, 1976.
71. Glazek K. A Guide to the Literature on Semirings and Their Applications in Mathematics and Information Sciences: With Complete Bibliography. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht-Boston-London, 2002.
72. Golan J. S. The theory of semirings with applications in mathematics and theoretical computer science Pitman monographs and surveys in pure and applied mathematics. V. 54. 1991.
73. Golan J. S. Semirings and Their Applications. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht-Boston-London, 1999.
74. Hebsch U., Weinert H. J. Semirings and semifields // in M. Hazewinkel (ed.): Handbook of Algebra, vol. I. North-Holland, Amsterdam. 1996. P. 425–462.

75. **Hebisch U., Weinert H. J.** Semirings. Algebraic theory and applications in computer science. World Scientific Publishing. Singapore, 1998.
76. **Hilbert D.** Über den Zahlbergriff // *Jahresber. Deutsch. Math. Verein*, 1899. V. 8. P. 180–184.
77. **Hutchins H.** Division semirings with $1+1=1$ // Semigroup forum. 1981. V. 22(2). P. 181–188.
78. **Hutchins H. C., Weinert H. J.** Homomorphisms and kernel of semifields // *Periodica Mathematica*. 1990. V. 21(2). P. 113–152.
79. **Idempotent Analysis.** Adv. Sov. Math. V. 13. Eds. V.P. Maslov, S.N. Samborskii. Providence, R.I.: AMS, 1992.
80. **Katsov Y.** Toward homological characterization of semirings: Serre's conjecture and Bass's perfectness in a semiring context // *Algebra Universalis*. 2004. V. 52. P. 197–214.
81. **Keimel K.** The representation of lattice ordered groups and rings by sections in sheaves. Lect. Notes Math. № 248. Springer-Verlag, 1971.
82. **Lambek J.** On representation of modules by sheaves of factor modules // *Can. Math. Bull.* 1971. V. 14. № 3. P. 359–368.
83. **Mitchell S., Sinutoke P.** The theory of semifields // *Kyungpook Math. J.* 1982. V. 22. P. 325–347.
84. **Mulvey C. J.** A generalization of Gelfand duality // *J. Algebra*. 1979. V. 56. № 2. 499–505.
85. **Pierce R. S.** Modules over commutative regular rings // *Mem. Amer. Math. Soc.* 1967. P. 1–112.
86. **Silcock H. L.** Generalized products and the lattice of normal subgroups of a group // *Algebra Universalis*. 1977. V. 7. P. 361–372.
87. **Vandiver H. S.** Note on a simple type of algebra in which cancellation law of addition does not hold // *Bull. Amer. Math. Soc.* 1934. V. 40. P. 914–920.
88. **Vechtomov E. M.** Rings and sheaves // *J. Math. Sciences (USA)*. 1995. V. 74. № 1. P. 749–798.

89. Weinert H. J. Über Halbring und Halbkörper. I // *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* 1962. V. 13. № 3–4. S. 365–378.
90. Weinert H. J. Über Halbring und Halbkörper. II // *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* 1963. V. 14. № 1–2. S. 209–227.
91. Weinert H. J. Über Halbring und Halbkörper. III // *Acta Math. Acad. Scient. Hung.* 1964. V. 15. № 1–2. S. 177–194.
92. Weinert H. J. Ein Struktursatz für idempotente Halbkörper // *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* 1964. V. 15. № 3–4. S. 289–295.
93. Weinert H. J., Wiegandt R. R. A Kurosh-Amitsur radical theory for proper semifields // *Comm. Algebra.* 1992. V. 20. № 8. P. 2419–2458.

Дополнительная литература

94. Вечтомов Е. М. О пучковом представлении редуцированных ограниченных полуател // *Информатика. Математика. Язык. Вып. 5. Киров, 2008.* С. 158–161.
95. Вечтомов Е. М. Бирегулярные полуатела // *Тезисы докладов Международной научно-образовательной конференции. М.: РУДН, 2009.* С. 257–260.
96. Вечтомов Е. М. Булевы полуатела // *Материалы Всероссийской конференции, посвященной 100-летию со дня рождения Николая Адриановича Фролова. - Сыктывкар: Сыктывкар: Сыктывкар, 2009.* С. 88–91.
97. Вечтомов Е. М. Теорема Даунса-Гофмана для бирегулярных полуател // *Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. 2009. Вып. 11.* С. 49–64.
98. Вечтомов Е. М., Лукин М. А. Полукольца, являющиеся объединением кольца и полуатела // *Успехи математических наук. 2008. Т. 63. Вып. 6.* С. 159–160.
99. Вечтомов Е. М., Черанева А. В. Полуатела и их свойства // *Фундаментальная и прикладная математика. 2008. Т. 14. № 5.* С. 3–54.
100. Вечтомов Е. М., Черанева А. В. Полуатела с образующей // *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2009. Вып. 3.* С. 25–33.

101. Вечтомов Е.М., Чупраков Д.В. Главные ядра полуполей непрерывных положительных функций // *Фундаментальная и прикладная математика. 2008. Т. 14. № 4. С. 87–107.*
102. Вечтомов Е. М., Чупраков Д. В. Псевдодополнения в решетке конгруэнций полуколец непрерывных функций // *Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2009. Вып. 9. С. 3–17.*
103. Вечтомов Е. М., Чупраков Д. В. О продолжении конгруэнций на полукольцах непрерывных функций // *Математические заметки. 2009. Т. 85. Вып. 6. С. 803–816.*
104. Лукин М. А. О полукольцевых объединениях кольца и полутела // *Известия вузов. Математика. 2008. № 12. С. 76–80.*
105. Лукин М. А. Полукольцевые объединения кольца и полутела. Дис. ... канд. физ.-матем. наук. – Киров: ВятГГУ, 2009.
106. Черанева А. В. Ядра и пучки полутел. Дис. ... канд. физ.-матем. наук. - Киров: ВятГГУ, 2008.
107. Чупраков Д. В. Условия дистрибутивности решеток конгруэнций полуколец непрерывных функций // *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2009. Вып. 3. С. 128–134.*
108. Чупраков Д. В. Конгруэнции на полукольцах и полуполях непрерывных числовых функций. Дис. ... канд. физ.-матем. наук. - Киров: ВятГГУ, 2009.
109. Vechtomov E. M. Semifields with distributive lattice of congruencies // *7-th International Algebraic Conference in Ukraine: abstracts of talks (18-23 August, 2009, Kharkov)/ ed. G.N. Zholtkevich. - Kiev, 2009. P. 146–147.*

Summary

Vechtomov E. M. Structure of semifields

This work is an analytic scientific review over the theory of semifields, sponsored by grant RFBR № 08-01-11000-ано.

Вятский государственный
гуманитарный университет

Поступила 15.10.2009