Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1.Вып.1.1995

УДК 517.583

О ПОЛНЫХ И МИНИМАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ ЭКСПОНЕНТ В $L^p(\mathbb{R})$

Т.А.Сальникова

Описан некоторый класс последовательностей комплексных чисел Λ таких, что соответствующие системы экспонент

$$\exp\{i\lambda_n t - t^2/2\}, \quad \lambda_n \in \Lambda$$

полны и минимальны в пространствах $L^p(\mathbb{R})$, $p > 1$.

В статье Залика и Саад [1] получен результат об одновременной полноте и минимальности системы

$$(e^{i\lambda_n t} \cdot e^{-t^2/2}), \quad \lambda_n \in S \tag{1}$$

в пространстве $L^2(\mathbb{R})$. Именно, пусть

$$\lambda_n = (2\pi)^{1/2} \cdot (1+i) \cdot (n-1)^{1/2}, \ n = 2, 3, 4, \dots;$$

$$\lambda_n = -\lambda_{-n}, \ n = -2, -3, -4, \dots;$$

$$S_0 = \{\lambda_n, \ n = \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots\}$$

и a – не равное нулю комплексное число такое, что ни a, ни $-ia$ не входят в S_0. Пусть $\lambda_1 = a$, $\lambda_{-1} = -a$. Обозначим

$$S = \{\lambda_n, \ n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\} \cup \{i\lambda_n, \ n = \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots\}.$$

Тогда система (1) полна и минимальна в $L^2(\mathbb{R})$.

В настоящей работе изучается вопрос о полноте и минимальности в пространствах $L^p(\mathbb{R})$, $p > 1$ системы

$$(e^{i\lambda_n t} \cdot e^{-t^2/2}), \quad \lambda_n \in \Lambda, \tag{2}$$

© Т.А.Сальникова, 1995.

где $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$, а $\Lambda_1 = \{\pm(1+i)(2\pi)^{1/2}(n+\alpha)^{1/2},\ n \in \mathbb{N},\ \alpha \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}\alpha > -1\} \cup \{0\}$ и $\Lambda_2 = i\Lambda_1$. Под $z^{1/2}$ понимается следующая однозначная ветвь:

$$z^{1/2} = |z|^{1/2}\exp((i/2)\arg z),\ -\pi < \arg \leqslant \pi.$$

Отметим, что в последовательности Λ присутствует двукратная точка 0. На самом деле, замена этой точки двумя другими точками a и $-a$ не меняет полноты и минимальности рассматриваемой системы. Таким образом, система (1) есть частный случай системы (2) при $\alpha = 0$. Сформулируем полученные результаты.

Теорема 1. *При* $\operatorname{Re}\alpha \leqslant \dfrac{1}{4p}$, $p \geqslant 2$ *система (2) полна в пространстве* $L^p(\mathbb{R})$.

Теорема 2. *При* $\operatorname{Re}\alpha > \dfrac{1}{4p}$, $1 < p \leqslant 2$ *система (2) неполна в пространстве* $L^p(\mathbb{R})$.

Теорема 3. *При* $\operatorname{Re}\alpha > \dfrac{1}{4p} - \dfrac{1}{4}$, $1 < p \leqslant 2$ *система (2) минимальна в пространстве* $L^p(\mathbb{R})$.

Теорема 4. *При* $\operatorname{Re}\alpha \leqslant \dfrac{1}{4p} - \dfrac{1}{4}$, $p \geqslant 2$ *система (2) не является минимальной в пространстве* $L^p(\mathbb{R})$.

Таким образом, случай $p = 2$ исследован полностью. При $p = 2$ теоремы 1-4 дают

Следствие. *Система (2)*

1) полна в $L^2(\mathbb{R})$ *тогда и только тогда, когда* $\operatorname{Re}\alpha \leqslant \dfrac{1}{8}$,

2) минимальна в $L^2(\mathbb{R})$ *тогда и только тогда, когда* $\operatorname{Re}\alpha > -\dfrac{1}{8}$.

В частности, система (2) полна и минимальна в $L^2(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда $-\dfrac{1}{8} < \operatorname{Re}\alpha \leqslant \dfrac{1}{8}$.

Для доказательства теорем нам потребуются следующие вспомогательные утверждения.

Теорема А [1]. *Пусть* $f(z)$ *– целая функция, обладающая свойством*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-py^2/2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+iy)|^q dx\right)^{p/q} dy < \infty, \quad 2 \leqslant p < \infty.$$

Тогда для преобразования Фурье

$$\hat{f}(t) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{itx} dx$$

функции $f(z)$ *справедливо включение* $e^{t^2/2}\hat{f}(t) \in L^p(\mathbb{R})$.

Лемма 1. *Пусть* $F(z)$ *– целая функция экспоненциального типа, удовлетворяющая условиям:*

$$F(n + \alpha \cdot \mathrm{sign} n) = 0, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \alpha \in \mathbb{C};$$

$$|F(z)| \leqslant \varepsilon(r) e^{\pi r}, \quad \varepsilon(r) = 0(r^{\mu}), \quad r = |z| \geqslant R_0.$$

Тогда
1) если $\mu + 2\mathrm{Re}\alpha \geqslant 0$, *то* $F(z) = P(z) L_\alpha(z)$, *где* $P(z)$ *– многочлен степени* $\leqslant \mu + 2\mathrm{Re}\alpha$ *и*

$$L_\alpha(z) = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{(n+\alpha)^2}\right);$$

2) если $\mu + 2\mathrm{Re}\alpha < 0$, *то* $F(z) \equiv 0$.

Лемма 1 обобщает утверждение из книги Р.П.Боаса [2, с. 156], относящееся к случаю $\alpha = 0$, когда $\pi L_0(z) = \sin \pi z$.

Всюду в дальнейшем $p > 1$, $q > 1$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Лемма 2. *Пусть* $h(z) = e^{-z^2/4} L_\alpha(\dfrac{z^2}{4\pi i})$, $z = x + iy$, $2 \leqslant p < \infty$.
Тогда
а) при $\mathrm{Re}\alpha > \dfrac{1}{4q}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-py^2/2} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |h(x+iy)|^q dx\right]^{p/q} dy < \infty;$$

б) при $\mathrm{Re}\alpha > -\dfrac{1}{4p}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-py^2/2} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{h(x+iy)}{1+|z|}\right|^q dx\right]^{p/q} dy < \infty.$$

В связи с ограничением объема доказательства лемм опускаем.

Доказательство теоремы 1. Предположим противное, т.е. что при $p \geqslant 2$ и $\mathrm{Re}\alpha \leqslant \dfrac{1}{4p}$ система (2) неполна в $L^p(\mathbb{R})$. Тогда существует нетривиальный линейный функционал на $L^p(\mathbb{R})$, который на всех функциях системы (2) обращается в нуль, что по теореме Рисса эквивалентно существованию функции $r(t)$ такой, что

$$r(t) \in L^q(\mathbb{R}), \quad r(t) \not\equiv 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda_n t - t^2/2} \cdot r(t)dt = 0, \quad \lambda_n \in \Lambda.$$

Рассмотрим функцию

$$H(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{izt - t^2/2} \cdot r(t)dt.$$

Ясно, что $H(z)$ – целая функция, причем $H(z)$ обращается в нуль во всех точках последовательности Λ. Так как

$$|H(z)|^p \leqslant K_1 e^{py^2/2}, \text{ то } |H(z)| \leqslant K_2 e^{y^2/2} \text{ и}$$

$$|H((2\pi)^{1/2} \cdot (1+i) \cdot z)| \leqslant K_2 e^{\pi(x+y)^2}.$$

Рассмотрим целую функцию

$$G(z) = e^{i\pi z^2} H((2\pi)^{1/2} \cdot (1+i)z).$$

Используя предыдущую оценку, получаем

$$|G(z)| \leqslant K_2 e^{\pi|z|^2}. \tag{3}$$

Поскольку $H(\Lambda) = 0$, то

$$G(0) = 0, \; G((n+\alpha)^{1/2}) = G(i(n+\alpha)^{1/2}) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{4}$$

Пусть $r(t)$ – четная функция. Тогда $G(z)$ – четная целая функция, и она может быть разложена в ряд Тейлора по четным степеням z. Т.е. существует целая функция $F(z)$ такая, что $G(z) = F(z^2)$. Из (3), (4) следует, что

$$|F(z)| \leqslant K_2 e^{\pi|z|},$$

$$F(n + \alpha \cdot \mathrm{sign} n) = 0, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Отсюда по лемме 1 вытекает, что $F(z) = c_1 L_\alpha(z)$, если $\mathrm{Re}\alpha \geqslant 0$ и $F(z) \equiv 0$, если $\mathrm{Re}\alpha < 0$. Значит, если $\mathrm{Re}\alpha < 0$, то последовательно заключаем, что $G(z) \equiv 0$, $H(z) \equiv 0$ и $r(t) \equiv 0$. Но $r(t) \not\equiv 0$. Противоречие. Итак, остается рассмотреть случай $\mathrm{Re}\alpha \geqslant 0$. Тогда

$$F(z) = c_1 L_\alpha(z), \quad G(z) = c_1 L_\alpha(z^2), \quad H(z) = c_2 e^{-z^2/4} L_\alpha\left(\frac{z^2}{4\pi i}\right).$$

Благодаря оценке [3]

$$|L_\alpha(iy)| \asymp e^{\pi|y|}|y|^{-2\mathrm{Re}\alpha}, \quad y \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

на действительной оси

$$|H(x)| \asymp e^{-x^2/4} e^{x^2/4} |x|^{-4\mathrm{Re}\alpha} = |x|^{-4\mathrm{Re}\alpha}. \tag{6}$$

Но $H(x)$ является преобразованием Фурье функции $e^{-t^2/2} r(t)$, которая принадлежит $L^q(\mathbb{R})$, $1 < q \leqslant 2$. Следовательно, по теореме Хаусдорфа-Юнга $H(x)$ принадлежит $L^p(\mathbb{R})$, $p \geqslant 2$. Что возможно с учетом (6) только при $\mathrm{Re}\alpha > \dfrac{1}{4p}$, а это противоречит условию. Итак, в случае четности функции $r(t)$ теорема 1 доказана.

Пусть $r(t)$ – нечетная функция. Тогда $G(z)$ – нечетная целая функция, т.к. она обращается в нуль в точке $z = 0$ с кратностью не меньшей двух, то функция $\dfrac{G(z)}{z}$ также целая, и, следовательно, ее можно разложить в ряд Тейлора по четным степеням z. Т.е. существует $F_1(z)$ – целая функция такая, что $\dfrac{G(z)}{z} = F_1(z)$. Из (3), (4) следует, что

$$|F_1(z)| \leqslant K_2 e^{\pi|z|}|z|^{-1/2}, \quad F_1(n + \alpha \mathrm{sign} n) = 0, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Это означает, что для функции $F_1(z)$ выполнены условия леммы 1 с $\mu = -\dfrac{1}{2}$. Т.к. $\mathrm{Re}\alpha \leqslant \dfrac{1}{4p} \leqslant \dfrac{1}{8}$, то $\mu + 2\mathrm{Re}\alpha < 0$, и по лемме 1 $G(z) \equiv 0$. Отсюда снова $H(z) \equiv 0$, $r(t) \equiv 0$. Противоречие.

Если же $r(t)$ – функция общего вида, то рассмотрим функцию $r_1(t) = r(t) + r(-t)$. Функция $r_1(t)$ является четной и $r_1(t) \not\equiv 0$.

Тогда имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{izt - t^2/2} \cdot r_1(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{izt - t^2/2} \cdot r(t)dt + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-izt - t^2/2} \cdot r(t)dt.$$

В силу определения Λ, оба слагаемых правой части обращаются в нуль на последовательности Λ. Значит и левая часть обращается в нуль на последовательности Λ. Таким образом, все свелось к случаю четной функции $r_1(t)$, рассмотренному выше. Теорема 1 доказана полностью.

Доказательство теоремы 2. Нам удобнее доказывать неполноту системы (2) в $L^q(\mathbb{R})$, $1 < q \leqslant 2$ при $\mathrm{Re}\alpha > \dfrac{1}{4q}$.

Рассмотрим целую функцию

$$h(z) = e^{-z^2/4} L_\alpha(\frac{z^2}{4\pi i}).$$

Тогда $h(\lambda_n) = 0$ при $\lambda_n \in \Lambda$.

Так как $\mathrm{Re}\alpha > \dfrac{1}{4q}$, то по лемме 2

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-py^2/2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |h(x+iy)|^q dx \right)^{p/q} dy < +\infty. \qquad (7)$$

Пусть

$$\mu(x) = \mathrm{l.i.m.}^p_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} h(t) e^{-itx} dt.$$

Из сходимости интеграла (7) по теореме А следует, что

$$\mu(x) e^{x^2/2} \in L^p(\mathbb{R}), \quad p \geqslant 2. \qquad (8)$$

Но $\mu(x) = \mu(x) \cdot e^{x^2/2} \cdot e^{-x^2/2}$.
По неравенству Гельдера

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\mu(x)| dx \leqslant \|\mu(x) e^{x^2/2}\|_{L^p} \cdot \|e^{-x^2/2}\|_{L^q}.$$

Т.е. $\mu(x) \in L^1(\mathbb{R})$. Тогда для $h(t)$ справедливо представление

$$h(t) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(x) \cdot e^{itx} dx.$$

Таким образом,

$$h(t) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx - x^2/2} r(x) dx,$$

где $r(x) = \mu(x)e^{x^2/2}$ и $r(x) \in L^p(\mathbb{R})$, $p \geqslant 2$ (см. (8)).
Т.к. $h(\lambda_n) = 0$, то нами построена нетривиальная функция $r(x)$, $r(x) \in L^p(\mathbb{R})$, аннулирующая систему (2). Следовательно, система (2) неполна в $L^q(\mathbb{R})$, $1 < q \leqslant 2$ при $\mathrm{Re}\alpha > \dfrac{1}{4q}$.

Доказательство теоремы 3. Здесь снова удобнее доказывать минимальность системы (2) в $L^q(\mathbb{R})$, $1 < q \leqslant 2$ при $\mathrm{Re}\alpha > \dfrac{1}{4q} - \dfrac{1}{4}$.

Рассмотрим целую функцию

$$h(z) = e^{-z^2/4} L_\alpha\left(\frac{z^2}{4\pi i}\right).$$

Заметим, что $h(\lambda_n) = 0$ при $\lambda_n \in \Lambda$. Пусть

$$G_k(z) = \begin{cases} \dfrac{h(z)}{(z-\lambda_k)h'(\lambda_k)}, & z \neq \lambda_k \\ 1, & z = \lambda_k. \end{cases}$$

Тогда $G_k(z)$ – целая функция.
Так как

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |G_k(x+iy)|^q dx \leqslant K \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{h(x+iy)}{1+|z|} \right|^q dx,$$

то из сходимости интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-py^2/2} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{h(x+iy)}{1+|z|} \right|^q dx \right]^{p/q} dy,$$

имеющей место по лемме 2, следует сходимость интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-py^2/2} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |G_k(x+iy)|^q dx \right]^{p/q} dy.$$

Пусть

$$g_k(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} G_k(t) dt,$$

тогда по теореме А функция $e^{t^2/2} g_k(t) \in L^p(\mathbb{R})$, $p \geqslant 2$.
Так как

$$(2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda_n t} \cdot e^{-t^2/2} \cdot e^{t^2/2} g_k(t) dt = G_k(\lambda_n) = \delta_{n,k},$$

то для системы (2) построена биортогональная система функций

$$\{e^{t^2/2}g_k(t)\} \in L^p(\mathbb{R}).$$

Т.е. система (2) минимальна в $L^q(\mathbb{R})$, $1 < q \leqslant 2$ при $\mathrm{Re}\alpha > \dfrac{1}{4q} - \dfrac{1}{4}$.

Доказательство теоремы 4. Предположим противное. Пусть система (2) минимальна в $L^p(\mathbb{R})$, $p \geqslant 2$ при $\mathrm{Re}\alpha \leqslant \dfrac{1}{4p} - \dfrac{1}{4}$. Тогда существует биортогональная система $\{r_k(t)\}_{-\infty}^{+\infty}$, $r_k(t) \in L^q(\mathbb{R})$ такая, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda_n t - t^2/2} \cdot r_k(t)dt = \delta_{n,k} = \begin{cases} 0, & n \neq k \\ 1, & n = k. \end{cases}$$

Рассмотрим

$$H(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{izt - t^2/2} \cdot r_0(t)dt, \quad r_0(t) \in L^q(\mathbb{R}).$$

Начиная с этого момента, доказательство идет в полной аналогии с доказательством теоремы 1.

Литература

1. **Zalik R.,Abuabara Saad T.** Some theorems concerning holomorphic Fourier transforms//*J. Math. Anal. and Appl.* 1987. V.126. P.483–493.

2. **Boas R.P.** Entire functions. N.Y.: Acad. press, 1954.

3. **Седлецкий А.М.** Биортогональные разложения функций в ряды экспонент на интервалах вещественной оси//*УМН.* 1982. Т.37.№5. С.51–95.

Summary

Salnikova T.A On complete and minimal systems of exponents.

The sequence of complex numbers Λ that corresponding systems of functions $\exp\{i\lambda_n t - t^2/2\}$, $\lambda_n \in \Lambda$ are complete and minimal in spaces $L^p(\mathbb{R})$, $p > 1$ is described.

Московский энергетический институт

Поступила 26.05.93