Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1.Вып.1.1995

УДК 517.583

О РОСТЕ НА МНИМОЙ ОСИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ МЕРЫ КАНТОРА-ЛЕБЕГА

А.А.Рябинин

В работе получена асимптотика преобразования Фурье сингулярной меры, функцией распределения которой является функция Лебега.

1. Введение. Основной результат. На интервале $[-a, a]$ рассмотрим совершенное множество канторовского типа E с постоянным отношением разбиения ξ, $0 < \xi < \frac{1}{2}$ ([1]). Зададим на $[-a, a]$ сингулярную меру μ, сосредоточенную на E, функция распределения которой есть функция Лебега $F_L(t)$ [1]. Такие меры называются мерами Кантора-Лебега. При $\xi = \frac{1}{3}$ E является классическим канторовским множеством, а $F_L(t)$ есть "канторовская лестница" ([5]).

Нас интересует асимптотика на мнимой оси преобразования Фурье меры μ :

$$\hat{\mu}(z) = \int_{-a}^{a} e^{izt} d\mu. \qquad (1)$$

Хорошо известно ([3], [4]), что $\hat{\mu}(z)$ – целая функция экспоненциального типа с индикатором $h_{\hat{\mu}}(\theta) = a|\sin\theta|$. Цель настоящей работы получить точную асимптотику $\hat{\mu}(z)$ на мнимой оси, которая имеет вид:

$$\hat{\mu}(iy) \asymp |y|^{-\gamma} \cdot e^{a|y|}, \quad \gamma = |\log_\xi 2|. \qquad (2)$$

2. Оценка снизу $\hat{\mu}(iy)$. Вычисляя интеграл (1) по схеме вычисления интеграла Лебега от экспоненты по мере μ (см., например,

[6], зад. 230(б), где разобран случай $\xi = \frac{1}{3}$), приходим к представлению $\hat{\mu}(z)$ в виде бесконечного произведения:

$$\hat{\mu}(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \cos a(1-\xi)\xi^{k-1}z. \tag{3}$$

Нетрудно показать ([7]), что произведение в (3) сходится абсолютно и равномерно на любом компакте $G \subset\subset \mathbb{C}^1$.

Положив в (3) $z = iy$ и считая для простоты $y > 0$, имеем, обозначив $\alpha_k = a(1-\xi)\xi^{k-1}, k = 1, 2, \ldots$

$$\hat{\mu}(iy) = \prod_{k=1}^{\infty} \mathrm{ch}\alpha_k y = e^{ay} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1 + e^{-2\alpha_k y}}{2}. \tag{4}$$

Идея получения оценки снизу для $\hat{\mu}(iy)$ состоит в разбиении сомножителей в (4) на две группы в зависимости от того, больше или меньше 1 величина $\alpha_k y$. Итак,

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1 + e^{-2\alpha_k y}}{2} = \prod_{\{\alpha_k y \geqslant 1\}} \cdot \prod_{\{\alpha_k y < 1\}}$$

Определим число k_0 из соотношений:

$$\alpha_{k_0} y \geqslant 1, \quad \alpha_{k_0+1} y < 1, \quad k_0 \geqslant 1.$$

Тогда

$$k_0 = \max\left\{1, \left[\log_\xi \frac{\xi}{a(1-\xi)y}\right]\right\}.$$

Считая $y \geqslant y_0$, где

$$y_0 = \frac{1}{a(1-\xi)\xi}, \tag{5}$$

будем иметь

$$k_0 = \left[\log_\xi \frac{\xi}{a(1-\xi)y}\right], \quad k_0 \geqslant 2. \tag{6}$$

Оценим сначала первое произведение:

$$\prod_{\{\alpha_k y \geqslant 1\}} = \prod_{k=1}^{k_0} \frac{1 + e^{-2\alpha_k y}}{2} \geqslant \frac{1}{2^{k_0}} \geqslant C_1 \cdot y^{\log_\xi 2}, \tag{7}$$

где $C_1 = 2^{\log_\xi \frac{a(1-\xi)}{\xi}}$.

Для второго произведения имеем:

$$\prod_{\{\alpha_k y<1\}} = \prod_{k=k_0+1} \frac{1+e^{-2\alpha_k y}}{2} \geqslant \prod_{k=k_0+1}^{\infty} e^{-2\alpha_k y} = \exp\left[-2y \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \alpha_k\right].$$

Учтено при этом, что $\frac{1+e^{-t}}{2} \geqslant e^{-t}$ для $t \geqslant 0$. Поскольку

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty} \alpha_k = \frac{1}{1-\xi} \cdot \alpha_{k_0+1},$$

то имеем

$$\prod_{\{\alpha_k y<1\}} \geqslant \exp\left[-\frac{2}{1-\xi}\right]. \tag{8}$$

Следовательно, для $|y| \geqslant y_0$, где y_0 определено в (5), из (4), (7) и (8) имеем следующую оценку снизу для $\hat{\mu}(iy)$: $\exists\, C > 0$

$$\hat{\mu}(iy) \geqslant C \cdot |y|^{\log_\xi 2} \cdot e^{a|y|},. \tag{9}$$

3. Оценка сверху $\hat{\mu}(iy)$. Пусть опять без ограничения общности $y > 0$. Обратимся к (1), понимая интеграл справа, как интеграл Лебега-Стилтьеса от функции распределения $F_L(t)$ меры μ. Тогда имеем:

$$\hat{\mu}(iy) = \int_{-a}^{a} e^{-yt} dF_L(t) \leqslant \int_{-a}^{0} e^{-yt} dF_L(t) + \frac{1}{2}.$$

Пусть $\delta > 0$ – мало. Разобъем интервал $[-a, 0]$ на подынтервалы длины δ :

$$[-a + k\delta,\ -a + (k+1)\delta],\quad k = 0, 1, \ldots, (n-1).$$

Тогда

$$\int_{-a}^{0} e^{-yt} dF_L(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{-a+k\delta}^{-a+(k+1)\delta} e^{-yt} dF_L(t) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} e^{(a-k\delta)y} \left[F_L(-a + (k+1)\delta) - F_L(-a + k\delta)\right] \leqslant$$

$$\leqslant e^{ay} \cdot \max_{0 \leqslant k \leqslant n-1} [F_L(-a+(k+1)\delta) - F_L(-a+k\delta)] \cdot \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k\delta y} =$$

$$= e^{ay} \cdot \max_{0 \leqslant k \leqslant n-1} [F_L(-a+(k+1)\delta) - F_L(-a+k\delta)] \cdot \frac{1}{1-e^{-\delta y}}.$$

Так как $F_L(t) \in Lip_\gamma$, где $\gamma = |\log_\xi 2|$, ([1]), то

$$\int_{-a}^{0} e^{-yt} dF_L(t) \leqslant C \cdot e^{ay} \cdot \delta^\gamma \cdot \frac{1}{1-e^{-\delta y}}.$$

Считая y достаточно большим, возьмем сейчас $\delta = \frac{1}{y}$. Тогда для $\hat{\mu}(iy)$ имеем, освобождаясь от требования положительности y :

$$\hat{\mu}(iy) \leqslant C \cdot |y|^{\log_\xi 2} \cdot e^{a|y|}. \tag{10}$$

Объединяя теперь оценки (9) и (10), получим (2).

4. Приложение к вопросам полноты. В качестве применения полученной информации об асимптотике на мнимой оси $\hat{\mu}(z)$ докажем полноту одной системы экспоненциальных функций.

Для $\hat{\mu}(z)$, введенной в п.1, обозначим

$$\Lambda = \{\lambda_n : \hat{\mu}(\lambda_n) = 0\}$$

и

$$E_\Lambda = \{e^{i\lambda_n t}, te^{i\lambda_n t}, \ldots, t^{k_n - 1} e^{i\lambda_n t} : \ \lambda_n \in \Lambda, \ k_n - \text{ кратность } \lambda_n\}.$$

Из представления (3) следует, что Λ –множество вещественных чисел, представляющее собой объединение арифметических прогрессий. Нас интересует полнота E_Λ в $L_p(-a,a)$, $p \geqslant 1$.

Теорема. *Пусть* $\xi = \frac{1}{k}$, $k = 3, 4, \ldots$ *Тогда система* E_Λ *полна в пространствах* $L_p(-a,a)$, $\forall\, p \geqslant 1$.

Доказательство. Если система не полна в $L_p(-a,a)$, то существует целая функция $S(z)$, обращающаяся в нуль во всех точках $\lambda_n \in \Lambda$ с кратностью не меньшей k_n и допускающая представление ([4])

$$S(z) = \int_{-a}^{a} e^{izt} g(t) dt, \quad g(t) \in L_q(-a,a), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Имеем следующую оценку сверху ([4]):

$$|S(z)| \leqslant C_1 |y|^{-1/p} \cdot e^{a|y|}, \quad \exists\, C_1 > 0, \quad |y| \geqslant y_0 > 0.$$

Рассмотрим функцию $F(z) = \dfrac{S(z)}{\hat{\mu}(z)}$. Это целая функция экспоненциального типа, поскольку категории $S(z)$ и $\hat{\mu}(z)$ одинаковы ([4]). Далее,

$$h_s(\theta) \leqslant a|\sin\theta|, \quad h_{\hat{\mu}}(\theta) = a|\sin\theta|,$$

и так как $S(z)$ и $\hat{\mu}(z)$ имеют вполне регулярный рост ([4]), то $h_s(\theta) = h_F(\theta) + h_{\hat{\mu}}(\theta)$. Отсюда, $h_F(\theta) \leqslant 0$. Поскольку $\sigma_F = \max h_F(\theta)$, то $\sigma_F = 0$, где σ_F – тип $F(z)$.

Итак, $F(z)$ – целая функция первого порядка и минимального типа. Оценим ее на мнимой оси: пусть $|y| \geqslant y_0 > 0$, тогда

$$|F(iy)| = \frac{|S(iy)|}{\hat{\mu}(iy)} \leqslant \frac{C_1 |y|^{-1/p} e^{a|y|}}{C_2 |y|^{-\gamma} e^{a|y|}} = C \cdot |y|^{-1/p+\gamma} \leqslant C|y|^{\gamma}. \tag{11}$$

Здесь мы использовали оценку снизу (9) для $\hat{\mu}(iy)$. Так как $0 < \xi < \frac{1}{2}$, то $0 < \gamma < 1$, следовательно, на мнимой оси $|F(iy)|$ растет не быстрее $|y|$. Если $F(z)$ имеет корень λ, то в силу (11) функция $F(z) \cdot (z-\lambda)^{-1}$ ограничена на мнимой оси и, следовательно, по одному из следствий принципа Фрагмена-Линделефа ([4]) равна постоянной. Итак,

$$F(z) \cdot (z - \lambda)^{-1} = \text{const}.$$

Отсюда

$$S(z) = C \cdot (z - \lambda) \cdot \hat{\mu}(z). \tag{12}$$

Если же $F(z)$ не имеет корней, то $F(z) = \text{const}$ и тогда

$$S(z) = C \cdot \hat{\mu}(z). \tag{13}$$

Рассмотрим (12) и (13) на действительной оси. По лемме Римана-Лебега $S(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$, в то же время $\overline{\lim}_{|x|\to\infty} |\hat{\mu}(x)| > 0$ (см., например, [2]). Таким образом, полученное противоречие говорит о том, что система E_Λ полна в $L_p(-a, a)$ для $\forall\, p \geqslant 1$. Все доказано.

Замечание. *Утверждение теоремы остается в силе, если ξ таково, что ξ^{-1} является числом Пизо ([2]). В этом случае заключительная часть доказательства будет опираться на теорему о поведении коэффициентов меры μ ([2]).*

В заключение, я благодарю проф. А.М.Седлецкого за плодотворные беседы, инициировавшие представленный выше результат.

Литература

1. **Зигмунд А.** Тригонометрические ряды. Т. 1,2. М.: Мир, 1965.

2. **Кисляков С.В.** Классическая проблематика анализа Фурье//*Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления.* М.: ВИНИТИ. Т. 15. 1987. С.135–196.

3. **Boas R.P.** Entire Functions. N.Y.: Academic Press, 1954.

4. **Левин Б.Я.** Распределение корней целых функций. М.: ГИТТЛ, 1956.

5. **Колмогоров А.Н., Фомин С.В.** Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.

6. **Кириллов А.А., Гвишиани А.Д.** Теоремы и задачи функционального анализа. М.: Наука, 1979.

7. **Маркушевич А.И.** Теория аналитических функций. Т.1. М.: Наука, 1968.

Summary

Ryabinin A.A. On rise of Kantor-Fouriers measure on imaginary axis

Asymptotic formula for Fourier transformation of singular measure with Lebesgue function as a distribution function is obtained.

Нижегородский университет *Поступила 26.05.93*