Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1.Вып.1.1995

УДК 517.982.1

К ВОПРОСУ О МЕТРИЗУЕМОСТИ СЕКВЕНЦИАЛЬНОЙ ПОРЯДКОВОЙ ТОПОЛОГИИ В УПОРЯДОЧЕННЫХ ГРУППАХ И ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

А.Г.Порошкин

Дается критерий метризуемости $o\sigma$-топологии в упорядоченной группе в терминах числовых функций. Устанавливается связь между метризуемостью или нормируемостью $o\sigma$-топологии в K-пространстве со слабой единицей с аналогичным свойством базы пространства.

Введение. Первая часть настоящей статьи – подробное изложение доклада [1]. В ней исследуется вопрос о метризуемости секвенциальной порядковой топологии ($o\sigma$-топологии) в упорядоченной группе, дается критерий метризуемости в терминах числовых функций. Во второй части устанавливается связь метризуемости или нормируемости $o\sigma$-топологии в K-пространстве со слабой единицей с аналогичным свойством для базы пространства.

Как известно [2], в полной булевой алгебре X метризуемость $o\sigma$-топологии $\tau_{o\sigma}$ равносильна существованию на X *непрерывной внешней меры*, т.е. существенно положительной [$\varphi 0 = 0$, $\varphi x > 0$ для $x \neq 0$] изотонной [$x \leqslant y \Rightarrow \varphi x \leqslant \varphi y$] субаддитивной [$\varphi(x \vee y) \leqslant \varphi x + \varphi y$] непрерывной сверху в нуле [$x_n \downarrow 0 \Rightarrow \varphi x_n \to 0$] функции φ. В [3] было показано, что в вышеуказанном условии Магарам можно несколько изменить требования, налагаемые на функцию φ. При этом полнота или σ-полнота алгебры X не играют существенной роли [4, с. 59]. Здесь мы показываем, что условие, приведенное в [3], можно распространить и на коммутативные упорядоченные группы (УГ) и, в частности, на упорядоченные векторные пространства (УВП).

По всем вопросам, связанным с понятием порядка, мы опираемся на монографии [5-9], хотя подробных ссылок на них мы часто не делаем.

§1. **1.1.** Пусть X – коммутативная УГ, $\varphi : X \to \mathbb{R}$ – функция, *отделяющая нуль* [$\varphi(x) \neq \varphi(0)$ при $x \neq 0$] и *равная в нулю* [$\varphi(0) = 0$]. В дальнейшем можем считать φ *положительной* [$\varphi(x) \geqslant 0 \; \forall \, x \in X$] и *четной* [$\varphi(-x) = \varphi(x)$], ибо в противном случае мы могли бы перейти к функции $\psi(x) = |\varphi(x)| + |\varphi(-x)|$.

С помощью функции φ определим на X *симметричную праметрику* [10, с. 31] $\rho(x, y) := \varphi(x - y)$. Она порождает в X инвариантную топологию τ_ρ, замкнутыми множествами в которой будут те и только те множества $A \subset X$, для которых выполнено условие $\rho(x, A) > 0 \; \forall \, x \in A^c = X \setminus A$ (равносильно: открыты в τ_ρ те и только те $B \subset X$, которые каждую свою точку x содержат вместе с некоторым шаром $B_\varepsilon(x) := \{y \in X : \rho(x, y) < \varepsilon\}$ [10, с. 31]. Вообще говоря, семейство шаров $\{B_\varepsilon(0)\}_{\varepsilon > 0}$ не образует локальной базы τ_ρ. Кроме того, для произвольной функции φ топология τ_ρ никак не связана с $o\sigma$-топологией $\tau_{o\sigma}$ в X.

Теорема 1. *Если φ $o\sigma$-непрерывна в нуле* [$x_n \to^{o\sigma} 0 \Rightarrow \varphi(x_n) \to 0$], *то* $\tau_\rho \subset \tau_{o\sigma}$.

Действительно, если A – замкнутое в τ_ρ множество и $x_n \in A$, $x_n \to^{o\sigma} x$, то $x_n - x \to^{o\sigma} 0$ [7] и $\rho(x_n, x) \to 0$. Это значит $\rho(x, A) = 0$ и $x \in A$ (в силу замкнутости A в τ_ρ). Таким образом, A $o\sigma$-замкнуто.

Топология $\tau_{o\sigma}$ может оказаться строго сильнее τ_ρ.

Пример 1. Пусть $X = l^1$ с покоординатным упорядочением и $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^k} \dfrac{|\xi_i|}{1 + |\xi_i|}$, где $x = (\xi_i) \in X$. Тогда φ $o\sigma$-непрерывна в 0. Если $A = \{ne_n\}$ ($e_n = (\delta_{ni})$, δ_{ni} – символ Кронекера), то A $o\sigma$-замкнуто, но не ρ-замкнуто, ибо $0 \notin A$, но $\rho(0, A) = 0$.

Понятно, что без $o\sigma$-непрерывности ρ нельзя утверждать $\tau_\rho \subset \tau_{o\sigma}$.

1.2. Введем два условия, которым может удовлетворять функция φ на X:

(А) если $\varphi(x_n) \to 0$, то найдется подпоследовательность (x_{k_n}) такая, что $x_{k_n} \to^{o\sigma} 0$;

(Б) если $\varphi(x_n) + \varphi(y_n) \to 0$, то $\varphi(x_n + y_n) \to 0$.

Отметим некоторые предложения о связях между различными требованиями, наложенными на φ, а также о топологиях τ_ρ и $\tau_{o\sigma}$.

1^o. Функция φ, удовлетворяющая условию (А), существенно положительна.

2^o. $o\sigma$-непрерывная в нуле функция φ, удовлетворяющая условию (А), удовлетворяет и условию (Б).

Действительно, пусть $\varphi(x_n + y_n) \not\to 0$. Переходя, если надо, к подпоследовательности, можем считать, что все $\varphi(x_n + y_n) \geqslant \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Если при этом $\varphi(x_n) + \varphi(y_n) \to 0$, то найдем сначала подпоследовательность $x_{k_n} \to^{o\sigma} 0$, а затем в последовательности (y_{k_n}) – более редкую подпоследовательность $y_{i_{k_n}} \to^{o\sigma} 0$. Тогда $x_{i_{k_n}} + y_{i_{k_n}} \to 0$ и $\varphi(x_{i_{k_n}} + y_{i_{k_n}}) \to 0$ вопреки предположению $\varphi(x_n + y_n) \geqslant \varepsilon_0 \; \forall\, n$.

Функция из примера 1 показывает, что обратное утверждение неверно.

3^o.**Теорема 2.** *Если φ удовлетворяет условию (Б), то система шаров $\{B_r(0)\}_{r>0}$ образует локальную базу топологии τ_ρ (не обязательно состоящую из открытых множеств).*

Доказательство. Заметим вначале, что условие (Б) равносильно следующему

(В) $\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 : \varphi(x), \varphi(y) < \delta \Rightarrow \varphi(x + y) < \varepsilon$.

Точку $x \in E \subset X$ назовем *φ-внутренней* для E, если $\exists B_\varepsilon(x) \subset E$. Множество всех φ-внутренних точек E обозначим E^0 и покажем, что для каждого $r > 0$ множество $B_r(0)^0$ будет открытой окрестностью нуля. Ясно, что $0 \in B_r(0)^0$. Пусть $x_0 \in B_r(0)^0$, т.е. $\exists\, B_\varepsilon(x_0) \subset B_r(0)$. По ε найдем δ из условия (В) и убедимся в том, что $B_\delta(x_0) \subset B_r(0)^0$. Возьмем произвольно $y \in B_\delta(x_0)$ и $z \in B_\delta(y)$. Тогда $\varphi(z - y) < \delta$, $\varphi(y - x_0) < \delta$ и по (В) $\varphi(z - x_0) < \varepsilon$, т.е. $z \in B_\varepsilon(x_0)$. Поскольку z произвольна в $B_\delta(y)$, то $B_\delta(y) \subset B_\varepsilon(x_0) \subset B_r(0)$. Это означает, что каждая точка $y \in B_\delta(x_0)$ оказывается φ-внутренней для $B_r(0)$, тем самым весь шар $B_\delta(x_0)$ состоит из φ-внутренних точек $B_r(0)$, т.е. $B_\delta(x_0) \subset B_r(0)^0$. В свою очередь x_0 – произвольная точка $B_r(0)^0$, а это значит, что $B_r(0)^0 \in \tau_\rho$.

4^o. **Следствие 1.** *В условиях теоремы 2 для любого $x \in X$ система шаров $\{B_r(x)\}_{r>0}$ образует базу в точке x топологии τ_ρ.*

5^o. **Следствие 2.** *Если в условиях теоремы 2 φ $o\sigma$-непрерывна в нуле, то каждый шар $B_r(0)$ есть окрестность нуля, а $B_r(x)$ – окрестность точки x в топологии $\tau_{o\sigma}$ (не обязательно открытая).*

6^o. **Теорема 3.** *В условиях теоремы 2 (X, τ_ρ) есть метризуемая топологическая группа, в которой метрическая сходимость будет совпадать со сходимостью относительно праметрики ρ.*

Доказательство. Покажем, что операции $(x, y) \mapsto x + y$ и $x \mapsto -x$ непрерывны в τ_ρ. Пусть $x_0, y_0 \in X$ и $B_\varepsilon(x_0 + y_0)$ – окрестность $x_0 + y_0$. По ε найдем δ из условия (В). Тогда при $x \in B_\delta(x_0)$, $y \in B_\delta(y_0)$ будет $\varphi(x + y - (x_0 + y_0)) < \varepsilon$, т.е. $x + y \in B_\varepsilon(x_0 + y_0)$ и $B_\delta(x_0) +$

$B_\delta(y_0) \subset B_\varepsilon(x_0+y_0)$. Далее пусть $B_\varepsilon(-x_0)$ – окрестность точки $-x_0$. Если $y \in B_\varepsilon(x_0)$, в силу четности φ, $\varphi(-y-(-x_0)) = \varphi(y-x_0) < \varepsilon$, т.е. $-y \in B_\varepsilon(-x_0)$ и $-B_\varepsilon(x_0) \subset B(-x_0)$. В силу произвольности x_0, y_0 получаем непрерывность групповых операций в τ_ρ и (X, τ_ρ) – топологическая группа.

Т.к. τ_ρ обладает счетной локальной базой $\{B_{1/n}(0)\}_{n=1}^\infty$, то по теореме Биркгофа-Какутани [11, теорема 8.3] топологическая группа (X, τ_ρ) метризуема, пусть метрикой d. Поскольку ρ-шары и d-шары образуют базу τ_ρ, то $d(x_n, x_0) \to 0 \Leftrightarrow \rho(x_n, x_0) \to 0$.

Замечание. *В предложениях 3°, 4°, 6° упорядоченность группы не предполагалась, так что они верны для любых групп.*

1.3. Теорема 4. *Пусть φ – $o\sigma$-непрерывна в нуле. Тогда семейство $\{B_\varepsilon(0)\}_{\varepsilon>0}$ будет локальной базой топологии $\tau_{o\sigma}$ в том и только том случае, когда φ удовлетворяет условию (A).*

Доказательство. Пусть φ $o\sigma$-непрерывна в 0 и удовлетворяет условию (А), а, следовательно и условию (Б). Тогда по 5^o каждый шар $B_r(0)$ есть окрестность нуля в $\tau_{o\sigma}$. Покажем, что $\{B_{1/n}(0)\}_{n=1}^\infty$ есть база. Пусть $0 \in U \in \tau_{o\sigma}$. Если допустить, что $B_{1/n}(0) \not\subset U \ \forall n$, то $\exists x_n \in B_{1/n}(0) \setminus U$, $n = 1, 2, \ldots$, так что $\varphi(x_n) \to 0$ и некоторая подпоследовательность $x_{k_n} \to^{o\sigma} 0$, что невозможно в силу предположения $x_n \in U^c \ \forall n$. Таким образом, $B_{1/n}(0) \subset U$ при некотором n и $\{B_{1/n}(0)\}_{n=1}^\infty$ есть база $\tau_{o\sigma}$ в нуле.

Допустим теперь, что $\{B_{1/n}(0)\}_{n=1}^\infty$ есть база $\tau_{o\sigma}$ в 0. Тогда условие $\varphi(x_n) \to 0$ равносильно сходимости x_n к 0 в $\tau_{o\sigma}$, а поэтому $x_n \to^* 0$ [4, с. 34]. Значит $\exists \ x_{k_n} \to^{o\sigma} 0$.

Следующее определение не является общепринятым, но будет удобным в дальнейших формулировках.

Определение. *Упорядоченное множество X будем называть метризуемым, если его $o\sigma$-топология метризуема.*

Следствие 1. *Для метризуемости УГ $(X, \leqslant)$ необходимо и достаточно, чтобы на X можно было задать положительную $o\sigma$-непрерывную в нуле функцию φ, $\varphi(0) = 0$, удовлетворяющую условию (A).*

В самом деле, если d – метрика, порождающая $\tau_{o\sigma}$, то функция $\varphi(x) = d(x, 0)$ будет нужной. Если же функция φ с нужными свойствами имеется, то из теорем 3 и 4 следует метризуемость $\tau_{o\sigma}$.

1.4. Если X – направленная УГ, $X^+ = \{x \in X : x \geqslant 0\}$,

$\varphi : X^+ \to \mathbb{R}^+$, $\varphi(0) = 0$, то на X можно задать положительную четную функцию

$$\tilde{\varphi}(x) := \inf\{\varphi(u) : u \geqslant x, -x\}, \quad x \in X; \quad \tilde{\varphi}(0) = 0.$$

1^o. Если φ $o\sigma$-непрерывна в нуле, то такова же $\tilde{\varphi}$.

Действительно, пусть $x_n \to^{o\sigma} 0$. Тогда $-x_n \to^{o\sigma} 0$, а поэтому $\exists\ u_n \downarrow 0$, $u_n \geqslant x_n$ и $\exists\ v_n \downarrow 0$, $v_n \geqslant -x_n$. В таком случае $u_n + v_n \geqslant x_n, -x_n$ и $u_n + v_n \downarrow 0$, $\varphi(u_n + v_n) \to 0$. Из неравенств $0 \leqslant \tilde{\varphi}(x_n) \leqslant \varphi(u_n + v_n)$ следует $\tilde{\varphi}(x_n) \to 0$.

2^o. Если φ удовлетворяет условию (A), то и $\tilde{\varphi}$ удовлетворяет условию (A).

Действительно, пусть $\tilde{\varphi}(x_n) \to 0$. Тогда найдется последовательность (u_n) в X^+ такая, что $u_n \geqslant x_n, -x_n$ и $\varphi(u_n) \leqslant \tilde{\varphi}(x_n) + \dfrac{1}{n}$, поэтому $\varphi(u_n) \to 0$. Значит, $\exists\ u_{k_n} \to^{o\sigma} 0$ и $\exists\ v_n \downarrow 0 : v_n \geqslant u_{k_n} \geqslant x_{k_n}, -x_{k_n}$. Отсюда $-v_n \leqslant -x_{k_n}, x_{k_n}$, причем $-v_n \uparrow 0$. Тем самым последовательности $-v_n$ и v_n сжимают x_{k_n} к 0 и $x_{k_n} \to^{o\sigma} 0$.

Из всего сказанного вытекает следующая

Теорема 5. *Для метризуемости направленной УГ X необходимо и достаточно, чтобы на X^+ существовала $o\sigma$-непрерывная в нуле положительная функция φ, удовлетворяющая условию (A).*

Следствие. *Для метризуемости решеточно упорядоченной группы X необходимо и достаточно, чтобы на положительном конусе X^+ существовала $o\sigma$-непрерывная в нуле положительная функция, удовлетворяющая условию (A).*

Замечание. Вопросы метризуемости порядковых топологий в решеточно упорядоченных группах изучались в дипломной работе Е.В.Филиппенко (Поливьяновой) "Условие метризуемости $o\sigma$-топологии в решеточно упорядоченных группах", выполненной под руководством автора настоящей статьи в 1989 г. В частности, там же получен этот результат.

§2. В этом параграфе исследуется связь между метризуемостью K-пространства и его базы. Показывается, что база метризуемого K-пространства также метризуема, но метризуемость базы, вообще говоря, не влечет метризуемости самого пространства и в то же время гарантирует существование кобазисного метризуемого пространства. Это пространство строится с применением аппарата неаддитивного интегрирования.

Следует еще заметить, что $\tau_{o\sigma}$ в векторной решетке инвариантна относительно векторных операций, но она, вообще говоря, не инвариантна относительно "индуцирований на подпространства", $\tau_{o\sigma}$ подпространства оказывается сильнее индуцированной из самого пространства.

2.1. Пусть X – *K-пространство со слабой единицей* 1, $X_1 \subset X$ – подмножество *с индуцированным порядком*, $\tau_{o\sigma}(X)$, $\tau_{o\sigma}(X_1)$ – $o\sigma$-топологии в X, X_1, $\tau_{o\sigma}(X)|_{X_1}$ – индуцированная топология (в X_1), $\mathfrak{F}_{o\sigma}(X)$, $\mathfrak{F}_{o\sigma}(X_1)$ – классы $o\sigma$-замкнутых множеств в X, X_1.

Теорема 6. $\tau_{o\sigma}(X_1) \supset \tau_{o\sigma}(X)|_{X_1}$. *Если* X_1 *– база* X, *то* $\tau_{o\sigma}(X_1) = \tau_{o\sigma}(X)|_{X_1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $E \subset X_1$, $E \in \mathfrak{F}_{o\sigma}(X)|_{X_1}$. Тогда $\exists\, F \in \mathfrak{F}_{o\sigma}(X), (F \subset X) : E = F \cap X_1$. Если $x_n \in E$, $x_n \to^{o\sigma} x$ в X_1, то $x_n \to^{o\sigma} x$ и в X, а поэтому $x \in F$. В то же время $x \in X_1$, значит, $x \in E$, $E \in \mathfrak{F}_{o\sigma}(X_1)$ и $\tau_{o\sigma}(X)|_{X_1} \subset \tau_{o\sigma}(X_1)$.

Пусть теперь X_1 – база X, $E \in \mathfrak{F}_{o\sigma}(X_1)$, $x_n \in E$ и $x_n \to^{o\sigma} x$ в X. Пусть $u_n, v_n \in X$ сжимающие x_n к x (в X) соответственно сверху и снизу. Тогда $x = o\sigma - \lim_{(X)} v_n \leqslant \underline{\lim} x_n \leqslant \overline{\lim} x_n \leqslant o\sigma - \lim_{(X)} u_n$, причем $\underline{\lim} x_n$, $\overline{\lim} x_n \in X_1$. Значит, $x = o\sigma - \lim x_n$ в X_1 и, поскольку $E \in \mathfrak{F}_{o\sigma}(X_1)$, $x \in E$. Окончательно получаем, что $E \in \mathfrak{F}_{o\sigma}(X)$, $E = X_1 \cap E \in \mathfrak{F}_{o\sigma}(X)|_{X_1}$ и $\mathfrak{F}_{o\sigma}(X_1) \subset \mathfrak{F}_{o\sigma}(X)|_{X_1}$.

Следствие 1. *Если* X_1 *– база* X, *то* $X_1 \subset \mathfrak{F}_{o\sigma}(X)$.

Следствие 2. *Если* X *метризуемо, то метризуема и база* X_1 *(индуцированной из* X *метрикой).*

Замечание. *Для произвольного множества* $X_1 \subset X$ *равенство* $\tau_{o\sigma}(X_1) = \tau_{o\sigma}(X)|_{X_1}$ *может не выполняться (см. 2.6, следствие 3).*

Переходя к обратной задаче, разработаем вначале некоторый вспомогательный аппарат. Для каждого $x \in X$ введем два семейства единичных элементов и определим на X^+ расширенный функционал. Некоторые его свойства отмечены в [12], ниже мы приведем нужные нам.

2.2. Пусть $x \in X$, $(e_\lambda^x)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ – характеристика x [5], $a_\lambda^x := (e_\lambda^x)' = 1 - e_\lambda^x$, $b_\lambda^x := e_{(\lambda 1 - x)_-} = ((\lambda 1 - x)_-)1$, где (u) – оператор проектирования на компоненту, порожденную элементом $u \in X$ [5, с. 102], $\lambda \in \mathbb{R}$. Поскольку $\forall\, u \in X$ имеем $u_- = (-u) \vee 0 = (-u)_+$, то b_λ^x можем выразить иначе, через характеристику элемента $-x$: $b_\lambda^x = e_{(\lambda 1 - x)_-} =$

$\ldots_{-\lambda 1-(-x))_+} = e^{-x}_{-\lambda}$. Из свойств характеристики теперь сразу следует

1°. a^x_λ, b^x_λ убывают от 1 до 0. Если $x \geqslant 0$, то $a^x_\lambda = b^x_\lambda = 1$ при $\lambda < 0$. $a^x_\lambda = \inf_{\mu<\lambda} a^x_\mu$, $b^x_\lambda = \sup_{\mu>\lambda} b^x_\mu$ $\forall\lambda \in \mathbb{R}$. Другими словами, a^x_λ непрерывна слева, b^x_λ непрерывна справа.

2°. $a^x_\lambda \geqslant b^x_\lambda$ $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$. Действительно, $(\lambda 1 - x)_+ d (\lambda 1 - x)_-$, откуда следует дизъюнктность следов $e^x_\lambda d b^x_\lambda$ ([1, с. 115]), а поэтому $a^x_\lambda = (e^x_\lambda)' \geqslant b^x_\lambda$.

3°. Для $\lambda_2 < \lambda < \lambda_1$ имеем $a^x_{\lambda_1} \leqslant b^x_\lambda \leqslant a^x_\lambda \leqslant b^x_{\lambda_2}$.

Достаточно доказать левое неравенство. Имеем $(\lambda 1 - x)_+ \vee (\lambda 1 - x)_- = (\lambda_1 1 - x)_+ \vee (-\lambda 1 + x)_+ \geqslant \frac{1}{2}[(\lambda_1 1 - x)_+ + (x - \lambda 1)_+] \geqslant \frac{1}{2}[(\lambda_1 1 - x) + (x - \lambda 1)]_+ = \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda)1$ (использованы неравенства из теоремы III.4.3 а) из [5] и $2(a \vee b) \geqslant a + b$). Переходя к следам (используя свойства ж) на с. 115 и л) на с. 116 в [5]), получим

$$(a^x_{\lambda_1})' \vee b^x_\lambda = e_{(\lambda_1 1 - x)_+ \vee (\lambda 1 - x)_-} = e_{(\lambda_1 1 - x)_+} \vee e_{(\lambda 1 - x)_-} \geqslant e_{1/2\cdot(\lambda_1 - \lambda)1} = \mathbf{1},$$

откуда следует $a^x_{\lambda_1} \leqslant b^x_\lambda$.

4°. а) Если $x_\xi \in X$ и $x = \inf_\xi x_\xi$, то $a^x_\lambda = \inf_\xi a^{x_\xi}_\lambda$ $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$. В частности, если $x \leqslant y$, то $a^x_\lambda \leqslant a^y_\lambda$, если $x_n \downarrow x$, то $a^{x_n}_\lambda \downarrow a^x_\lambda$.

б) Если $x_\xi \in X$ и $x = \sup_\xi x_\xi$, то $b^x_\lambda = \sup b^{x_\xi}_\lambda$ $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$. В частности, если $x \leqslant y$, то $b^x_\lambda \leqslant b^y_\lambda$, если $x_n \uparrow x$, то $b^{x_n}_\lambda \uparrow b^x_\lambda$.

Доказательство. а) По лемме IV.10.2 имеем $e^x_\lambda = \sup e^{x_\xi}_\lambda$, откуда $a^x_\lambda = (e^x_\lambda)' = \inf(e^{x_\xi}_\lambda)' = \inf a^{x_\xi}_\lambda$.

б) $x = \sup x_\xi \Rightarrow -x = \inf(-x_\xi)$ [5, с.62] $\Rightarrow e^{-x}_{-\lambda} = \sup e^{-x_\xi}_{-\lambda}$ [5, лемма IV.10.2] или $b^x_\lambda = \sup_\xi b^{x_\xi}_\lambda$.

2.3. Пусть μ – существенно положительная изотонная числовая функция на базе X_0 пространства X, $\mu 0 = 0$. Для $x \in X^+$ определим две убывающие на $[0, +\infty)$ функции

$$f_x(\lambda) = \mu a^x_\lambda \quad \text{и} \quad g_x(\lambda) = \mu b^x_\lambda.$$

Из предложений 2° и 3° в 2.2 и изотонности μ получаем, что при $\lambda_2 < \lambda < \lambda_1$ будет

$$g_x(\lambda_1) \leqslant f_x(\lambda_1) \leqslant g_x(\lambda) \leqslant f_x(\lambda_1) \leqslant g_x(\lambda_2) \leqslant f_x(\lambda_2),$$

откуда, в свою очередь, следует, что в точках непрерывности (т.е. почти всюду) f_x и g_x совпадают, а поэтому совпадают их интегралы

Лебега на $[0,+\infty)$. Положим

$$\varphi(x) := \int_0^{+\infty} f_x(\lambda)d\lambda = \int_0^{+\infty} g_x(\lambda)d\lambda.$$

Ясно, что $\varphi 0 = 0$, $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant \infty \quad \forall x \in X$ и $0 \leqslant x \leqslant y \Rightarrow \varphi(x) \leqslant \varphi(y)$. Если $x \in X_0$, то $\varphi x = \mu x$. Подобный функционал на классе измеримых (относительно σ-алгебры $\mathcal{A}$) функций был впервые построен, по-видимому, в работе Шоке [13]; в работах по нечетным интегралам его называют интегралом Шоке. По аналогии можно было бы и наш функционал назвать *функционалом Шоке.*

Замечание. Исследованию и применениям интеграла Шоке посвящено много работ, мы не будем их перечислять здесь. Некоторые свойства функционала Шоке в K-пространстве отмечались в [12].

Отметим некоторые нужные в дальнейшем свойства функционала φ.

1^o. $\varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x)$ при $\alpha \geqslant 0$. Действительно, если $\alpha = 0$, то обе части равенства - нули. Пусть $\alpha > 0$. Тогда компоненты, порожденные элементами $u \geqslant 0$ и αu совпадают, а, значит, совпадают и следы элементов u и αu. Отсюда получаем

$$a_\lambda^{\alpha x} = (e_\lambda^{\alpha x})' = (e_{(\lambda 1-\alpha x)_+})' = (e_{(\alpha((\lambda/\alpha)1-x)_+})' = (e_{((\lambda/a)1-x)_+})' = a^x_{\lambda/\alpha}.$$

Но тогда $f_{\alpha x}(\lambda) = \mu a_\lambda^{\alpha x} = \mu a^x_{\lambda/\alpha} = f_x\left(\dfrac{\lambda}{\alpha}\right)$. Применяя к интегралу формулу замены переменной, получим

$$\varphi(\alpha x) = \int_0^{+\infty} f_{\alpha x}(\lambda)d\lambda = \int_0^{+\infty} f_x\left(\frac{\lambda}{\alpha x}\right)d\lambda = \alpha\int_0^{+\infty} f_x(t)dt = \alpha\varphi(x).$$

2^o. Если $x_n \uparrow x$, а μ – непрерывна снизу, то $\varphi(x_n) \uparrow \varphi(x)$. Действительно, $x_n \uparrow x \Rightarrow b_\lambda^{x_n} \uparrow b_\lambda^x$ (4^o б в 2.2) $\Rightarrow g_{x_n}(\lambda) = \mu b_\lambda^{x_n} \uparrow \mu b_\lambda^x = g_x(\lambda)$ и $\varphi(x_n) \uparrow \varphi(x)$ (по классической теореме Леви).

3^o. Пусть μ –условно непрерывна сверху $[e_n \downarrow e,\ \mu e_1 < +\infty \Rightarrow \mu e_n \downarrow \mu e]$. Тогда если $x_n \downarrow x$ и $\varphi x_1 < +\infty$, то $\varphi x_n \downarrow \varphi x$.

Заметим, прежде всего, что при $\varphi x_1 < +\infty$ будет $\mu a_\lambda^{x_1} < +\infty\ \forall\lambda > 0$. Действительно, если бы было $\lambda_0 > 0$ с $\mu a_{\lambda_0}^{x_1} = +\infty$, то на $[0,\lambda_0]$ имели бы $f_{x_1}(\lambda) = +\infty$, а тогда $\varphi(x_1) \geqslant \int_0^{\lambda_0} f_{x_1}(\lambda)d\lambda = +\infty$.

Теперь из $x_n \downarrow x$ следует$a_\lambda^{x_n} \downarrow a_\lambda^x\ \forall\ \lambda > 0$ (4^o б в 2.2) $\Rightarrow f_{x_n}(\lambda) = \mu a_\lambda^{x_n} \downarrow \mu a_\lambda^x\ \forall\ \lambda > 0$. По теореме Лебега об ограниченной сходимости $\varphi(x_n) \downarrow \varphi(x)$.

4°. **Следствие.** *Пусть μ − $o\sigma$-непрерывна, $x_n \to^{o\sigma} x$ и все $x_n \leqslant y$, причем $\varphi y < +\infty$. Тогда $\varphi x_n \to \varphi x$.*

5°. Если μ субаддитивна $[\mu(e_1 \vee e_2) \leqslant \mu e_1 + \mu e_2]$, то $\varphi(x \vee y) \leqslant \varphi x + \varphi y$. Если μ σ-субаддитивна $[\mu(\bigvee_1^\infty e_n) \leqslant \sum_1^\infty \mu e_n]$, то

$$\varphi(\bigvee_1^\infty x_n) \leqslant \sum_1^\infty \varphi x_n.$$

В первом случае (по 4° б) из 2.2) $\mu a_\lambda^{x_1 \vee x_2} = \mu(a_\lambda^{x_1} \vee a_\lambda^{x_2}) \leqslant \mu a_\lambda^{x_1} + \mu a_\lambda^{x_2}$ $\forall \lambda$, поэтому $\varphi(x_1 \vee x_2) = \int_0^\infty \mu a_\lambda^{x_1 \vee x_2} d\lambda \leqslant \int_0^\infty \mu a_\lambda^{x_1} d\lambda + \int_0^\infty \mu a_\lambda^{x_2} d\lambda = \varphi x_1 + \varphi x_2$. Вторая часть доказывается аналогично также с помощью 4° б) из 2.2.

6°. **Следствие** *Если μ субаддитивна, то $\varphi(x+y) \leqslant 2[\varphi x + \varphi y]$ (ибо $x + y \leqslant 2(x \vee y)$).*

2.4. Предположим теперь, что σ-полная булева алгебра X_0 метризуема (следовательно счетного типа) и пусть μ – (конечная) непрерывная внешняя мера на X_0. Надстроим над X_0 расширенное K-пространство $\tilde{X}$ [5] и на $\tilde{X}^+$ построим функционал Шоке. Пусть $\overline{X} := \{x \in \tilde{X} : \varphi(|x|) < +\infty\}$. Ясно, что $X_0 \subset \overline{X}$. Поскольку непрерывная внешняя мера $o\sigma$-непрерывна и σ-субаддитивна, то из 2.2 следует, что $\overline{X}$ есть K-пространство, надстроенное над X_0. Мы покажем, что $\overline{X}$ метризуемо, причем метрика эквивалентна праметрике $\rho(x, y) = \varphi(|x - y|)$.

1°. **Лемма.** *Если $x_n \in \overline{X}^+$, $x_n \uparrow$ и $\sup \varphi x_n < +\infty$, то $\sup x_n = x \in \overline{X}^+$.*

Допустим, что $\{x_n\}$ не ограничено в $\overline{X}^+$. Если $\{x_n\}$ не ограничено и в $\tilde{X}^+$, то по 2.3.1 на с. 143 в [14] найдется $0 < e_0 \in X_0$ такой, что $x_n \wedge ke_0 \uparrow_n ke_o$ $\forall k$ и поэтому

$$k\varphi e_0 = \varphi(ke_0) = \lim \varphi(x_n \wedge ke_0) \leqslant \lim \varphi x_n, \quad k \in \mathbb{N},$$

откуда $+\infty = \lim_k k\varphi e_0 \leqslant \lim \varphi x_n$. Если же $x_n \uparrow x \in \tilde{X} \setminus \overline{X}$, то по 2° в 2.3 $\lim \varphi x_n = \varphi x = +\infty$.

В обоих случаях получаем противоречие с условием леммы.

2°. Если $\varphi x_n \to 0$, то $\exists\, x_{k_n} \to^{o\sigma} 0$, т.е. φ удовлетворяет условию (A) из 1.2.

Найдем подпоследовательность (x_{k_n}), чтобы $\varphi x_{k_n} < \dfrac{1}{2^n}$, и пусть $y_{np} = \bigvee_{i=n}^p x_{k_i}$. Тогда $\varphi y_{np} \leqslant \sum_{i=n}^p \varphi x_{k_i} < 2^{1-n}$. Тогда по 1° $y_{np} \uparrow_p y_n \in$

$\overline{X}$, причем $\varphi y_n \leqslant 2^{1-n}$. В то же время $y_n \downarrow y \geqslant 0$ и $\varphi y \leqslant \varphi y_n \leqslant 2^{1-n}\,\forall n$, так что $\varphi y = 0$ и $y = 0$. Это и означает, что $x_{k_n} \to^{o\sigma} 0$, так как $0 \leqslant x_{k_n} \leqslant y_n \downarrow 0$.

По следствию из теоремы 5 $\overline{X}$ метризуемо.

Обозначим через $\mathfrak{X}(X_0)$ класс всех K пространств, надстроенных над X_0. Тогда резюмируя все сказанное, можем сформулировать следующую теорему.

Теорема 7. *Для того, чтобы класс $\mathfrak{X}(X_0)$ содержал метризуемое K-пространство, необходимо и достаточно, чтобы X_0 была метризуема ($\equiv$ на X_0 существовала непрерывная внешняя мера).*

2.5. Вообще говоря, метризуемое K-пространство $\overline{X}$, надстроенное над метризуемым X_0, определяется неоднозначно.

2.6. Теорема 8. *K-пространство X' ограниченных элементов метризуемо тогда и только тогда, когда оно конечномерно.*

Доказательство. Если $\dim X' < \infty$, то евклидова норма порождает $\tau_{o\sigma}$. Пусть $\dim X' = \infty$ и пусть (e_n), $e_n > 0$, – дизъюнктная последовательность в базе X_0. Тогда $e_n \to^{o\sigma} 0$ и если бы X' было метризуемым (пусть инвариантной метрикой d), то $d(e_n, 0) \to 0$. Перейдя, если нужно, к подпоследовательности, можем считать $d(e_n, 0) < n^{-2}$. Из инвариантности d следует $d(2e_n, 0) \leqslant 2d(e_n, 0)$ и по индукции $d(ne_n, 0) \leqslant nd(e_n, 0)$. В таком случае $d(ne_n, 0) \to 0$, $ne_n \to^* 0$ и найдется $k_n e_{k_n} \to^{o\sigma} 0$, чего не может быть ввиду неограниченности множества $\{k_n e_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ в X'.

Следствие 1. *K-пространство X' ограниченных элементов нормируемо $\iff$ X' конечномерно.*

Следствие 2. *В K-пространстве X' ограниченных элементов топология $\tau_{o\sigma}$ обладает счетной базой тогда и только тогда, когда X' конечномерно.*

Следствие 3. *Пусть X - бесконечномерное метризуемое K-пространство со слабой единицей 1, X' – подпространство ограниченных элементов. Тогда $\tau_{o\sigma}(X')$ строго сильнее, чем $\tau_{o\sigma}(X)|_{X'}$.*

2.7. Такая же, как в теореме 5, связь имеется между нормируемостью X_0 и нормируемостью некоторого пространства из $\mathfrak{X}(X_0)$, т.е. верна

Теорема 9. *Для того, чтобы класс $\mathfrak{X}(X_0)$ содержал нормируемое K-пространство, необходимо и достаточно, чтобы X_0 была нормируемой.*

2.8. Замечание. Метризуемое пространство $\overline{X}$, построенное в будет полным линейным метрическим пространством, т.е. F-пространством в смысле [15] и, следовательно, ТВП. (Отметим, что [15], в отличие от некоторых других руководств, F-пространство предполагается локально выпуклым.)

Литература

1. **Порошкин А.Г.** Условие метризуемости секвенциальной порядковой топологии в упорядоченной группе //*Теория функций.— Тезисы докладов Всероссийского семинара.* Сыктывкар: СыкГУ, 1993. С. 45–46.

2. **Maharam D.** An algebraic characterisation of measure algebras //*Ann. Math.* 1947. V.48, №1. P.154–167.

3. **Попов В.А.** Супермеры и полумеры на булевых алгебрах // Функции множеств. Сыктывкар: Коми гос. педаг. ин-т, 1977. С.40–49.

4. **Порошкин А.Г.** Упорядоченные множества. Булевы алгебры // Учебное пособие. Сыктывкар: Сыктывкарский ун-т, 1983.

5. **Вулих Б.З.** Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М.: Физматгиз, 1961.

6. **Владимиров Д.А.** Булевы алгебры. М.: Наука, 1969.

7. **Биркгоф Г.** Теория решеток. М.: Наука, 1984.

8. **Канторович Л.В., Акилов Г.П.** Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.

9. **Копытов В.Н.** Решеточно упорядоченные группы. М.: Наука, 1984.

10. **Архангельский А.В., Федорчук В.В.** Основные понятия и конструкции общей топологии//*Итоги науки и техники. Серия: Современные проблемы математики / Фундаментальные направления.*Т.17. М.: ВИНИТИ. С.5–110.

11. **Хьюитт Э., Росс К.** Абстрактный гармонический анализ. Т.I. М.: Наука, 1975.

12. **Порошкин А.Г.** О метризуемости порядковых топологий в K-пространствах. Сыктывкарский ун-т. Сыктывкар, 1981. 16 с. Деп. в ВИНИТИ №734-81 Деп.

13. **Choquet G.** Theory of capacities //*Ann. Inst. Fourier*.1955. V. 5, №1. P. 131– 295.

14. **Канторович Л.В., Вулих Б.З., Пинскер А.Г.** Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. М.-Л.: Гостехиздат, 1950.

15. **Данфорд Н., Шварц Дж.Т.** Линейные операторы. Общая теория. М.:ИИЛ, 1962.

Summary

Poroshkin A.G. Poroshkin A.G.

On the metrizability of sequental order topology in ordered groups and vector spaces.

A criterion in terms of real functions is given for $o\sigma$-topology in ordered groups be metrizable. This property is also studied in K-spaces possesing a weak unit. A relationship between this property and the property of base of the space is considered.

Сыктывкарский университет

Поступила 8.02.95