*Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1.Вып.1.1995*

УДК 517.982

Об одном обобщении теоремы о полноте

А.А.Порошкин

Доказывается абстрактная теорема о полноте для некоторых классов измеримых функций, следствиями которой являются теоремы о полноте пространств L^p, $p > 0$, L^∞, нормированных идеальных пространств (с дополнительными ограничениями на норму) и некоторых других.

В работе доказывается абстрактный вариант теоремы о полноте в некотором классе измеримых функций. Ее частными случаями являются теоремы о полноте классических метрических пространств L^p, $p > 0$, L^∞, $N(L(T, \mathcal{R}, \mu))$ из [1], с. 18 с неограниченной функцией $N(u)$, а также некоторых других пространств, порожденных интегралами по нечеткой мере. Краткое содержание работы изложено в [2], более подробно — в депонированной работе [3].

По сравнению с названными работами, здесь даны некоторые изменения, дополнения и уточнения.

1.Основные определения

Пусть $\mathcal{R}$ – σ-кольцо подмножеств множества $T \neq \emptyset$, $\mathcal{R}_0$ – его σ-подкольцо. Множества из $\mathcal{R}$ называем *измеримыми*, из $\mathcal{R}_0$ – *нуль-множествами.* Некоторое утверждение, связанное с точками из T, истинно *почти всюду* (кратко: п.в.), если оно истинно для всех $t \in T$, за исключением, быть может, точек множества $A \in \mathcal{R}_0$. Положительная функция $f : T \to \overline{\mathbb{R}}^+$ *измерима*, если $T(f > a) \in \mathcal{R}$ $\forall a \geqslant 0$; произвольная функция $f : T \to \overline{\mathbb{R}}$ измерима, если измеримы f_+ и f_-. Ясно, что носитель $T(f \neq 0)$ измеримой функции f измерим и что наше определение измеримости функции совпадает с аналогичным определением в [4], с. 80-82.

Введем следующие обозначения: M – класс всех измеримых на T функций, $M^+ := M \cap \{f : f \geqslant 0\}$; $f \sim g$ (f эквивалентно g) $:= T(f \neq g) \in \mathcal{R}_0$.

Предположим, что на M^+ задан *положительный расширенный* функционал $\Phi : M^+ \to \overline{\mathbb{R}}^+$, *обращающийся в нуль на нулевой функции* $0 : \Phi(0) = 0$. В различных предложениях, доказываемых ниже, будем налагать на Φ еще некоторые из следующих ограничений.

1^o. Если $0 \leqslant f \leqslant g$ и $\lim \Phi(g) = 0$, то $\lim \Phi(f) = 0$ [т. е. $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 : 0 \leqslant f \leqslant g,\ \Phi(g) < \delta \Longrightarrow \Phi(f) < \varepsilon$].

2^o. Если $\Phi(f) < \infty$, то f – п.в. конечна.

3^o. $\lim \Phi(f+g) = 0$, если $\lim[\Phi(f) + \Phi(g)] = 0$ [т. е. $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, \delta > 0 :\ \Phi(f), \Phi(g) < \delta \Longrightarrow \Phi(f+g) < \varepsilon$].

4^o. Если $f, g \in M$ и $\Phi(|f|) + \Phi(|g|) < \infty$, то $\Phi(|f+g|) < \infty$. (В точках неопределенности сумму $|f+g|$ считаем равной ∞.) Если $f \sim g, \Phi(f) < \infty$, то $\Phi(g) < \infty$.

5^o. Если $f_n \uparrow f$ на T, то $\Phi(f) \leqslant \sup \Phi(f_n)$.

Это условие, как нетрудно видеть, равносильно такому:

$5a^o$. Если $f_n \uparrow f$ на T, то $\Phi(f) \leqslant \overline{\lim}\Phi(f_n)$.

Замечание 1. Для монотонного функционала Φ [если $0 \leqslant f \leqslant g$, то $\Phi(f) \leqslant \Phi(g)$] 1^o выполняется автоматически, а 5^o означает *непрерывность* Φ *снизу* [если $f_n \uparrow f$ на T, то $\Phi(f) = \lim \Phi(f_n)$.]

Пусть $M_\Phi = \{f \in M : \Phi(|f|) < \infty\}$. Формула $\rho(f,g) := \Phi(|f-g|)$ определяет на M_Φ *симметричную праметрику* ([5], с. 31), а последняя порождает в M_Φ топологию τ_ρ. С помощью 3^o можно установить, что семейство шаров $B_\varepsilon(f) := \{g \in M_\Phi : \rho(g,f) < \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$, образует базу (не обязательно открытых множеств) топологии τ_ρ в точке f.

Замечание 2. Соглашение "$\infty - \infty = \infty$", принятое в 4^o, можно было бы заменить и таким "$\infty - \infty = 0$". Основная теорема 1 может быть доказана и в этом случае, если несколько изменить условие 1^o, а именно потребовать

1^oа. Если $0 \leqslant f \leqslant g$ п.в. и $\lim \Phi(g) = 0$, то $\lim \Phi(f) = 0$.

При этом вторую часть требований в 4^o можно опустить, оставив лишь первую: $M_\Phi + M_\Phi \subset M_\Phi$.

Впрочем, необходимость в каких-либо соглашениях относительно $\infty - \infty$ отпадает, если функционал Φ удовлетворяет условию

$$\Phi(f) = \Phi(g) \text{ при } f \sim g,$$

что обычно и встречается в конкретных случаях. Тогда M_Φ можем считать состоящим только из конечных функций, так что M_Φ будет аддитивной группой с групповой топологией τ_ρ.

Замечание 3. Если $\Phi(f) = \Phi(g)$ при $f \sim g$, то можно перейти к фактор-множеству $\hat{M} := M/\sim$ и на $\hat{M}^+$ корректно определить функционал $\hat{\Phi}(\hat{f}) := \Phi(f)$, $f \in \hat{f}$, также обладающий свойства[ми] $1^o - 5^o$. В этом случае $(\hat{M}_{\hat{\Phi}}, \tau_{\hat{\rho}})$ будет топологической группой [с] счетной локальной базой и по теореме 8.2 из [6] $\tau_{\hat{\rho}}$ псевдометризуе[м] эквивалентной праметрике $\hat{\rho}$ псевдометрикой $\hat{d}$: $\hat{d}(\hat{f}_n, \hat{f}) \to 0 \Leftarrow$ $\hat{\Phi}(|f_n - f|) \to 0$.

Мы не будем специально оговаривать перехода к фактор-множ[е]ству, однако в подходящих случаях будем его подразумевать, от[о]ждествляя при этом, как принято, каждый элемент $\hat{f} \in \hat{M}$ с прои[з]вольным его представителем $g \in \hat{f}$.

Замечание 4. В дальнейшем, говоря о сходимости, фундамен[]тальности, полноте (в M_Φ), мы имеем в виду "относительно праме[]трики $\rho(f, g) = \Phi(|f - g|)$".

2.Вспомогательные предложения

Докажем сначала три леммы, используемые в доказательств[е] основной теоремы.

Лемма 1. *Пусть функционал Φ удовлетворяет условию 3 и пусть (f_{mn}) двойная последовательность в M^+, для котор[ой] $\Phi(f_{mn}) \to_{m,n} 0$. Тогда $\forall$ (ε_n), $\varepsilon_n > 0$, $\exists$ (k_n) в $\mathbb{N}$, $k_1 < k_2 < \ldots$ такая, что*

$$\Phi\left(\sum_{i=n}^{m} f_{k_i k_{i+1}}\right) < \varepsilon_n \tag{1}$$

для любого $m \in \mathbb{N}$ и любого $n = \overline{1, m}$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Можно считать, что $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \ldots > \varepsilon_n > \ldots$ В силу 3^o по ε_1 найдем $\delta_1 \leqslant \varepsilon_2$ такое, чтобы из неравенств $\Phi(f), \Phi(g) < \delta_1$ вытекало $\Phi(f+g) < \varepsilon_1$, а затем по δ_1 найдем (в силу $\Phi(f_{mn}) \to 0$) такой номер k_1, чтобы при $n \geqslant k_1$ выполнялось неравенство $\Phi(f_{k_1 n}) < \delta_1$. Тогда справедливо утверждение:

$$\text{если } n \geqslant k_1,\ \varphi_1 \in M^+ \text{ и } \Phi(\varphi_1) < \delta_1, \text{ то } \Phi(f_{k_1 n} + \varphi_1) < \varepsilon_1. \tag{2}$$

Теперь по δ_1 найдем $\delta_2 \leqslant \varepsilon_3$ такое, чтобы из $\Phi(f), \Phi(g) < \delta_2$ вытекало $\Phi(f+g) < \delta_1$, а затем по δ_2 – номер $k_2 > k_1$ такой, чтобы при $n \geqslant k_2$ было $\Phi(f_{k_2 n}) < \delta_2$. Тем самым получим, что справедливо утверждение:

$$\text{если } n \geqslant k_2,\ \varphi_2 \in M^+ \text{ и } \Phi(\varphi_2) < \delta_2, \text{ то } \Phi(f_{k_2 n} + \varphi_2) < \delta_1 \leqslant \varepsilon_2. \tag{3}$$

Полагая в (2) $n = k_2$ и $\varphi_1 = f_{k_2 n} + \varphi_2$, будем иметь:

$$\text{если } n \geqslant k_2,\ \varphi_2 \in M^+ \text{ и } \Phi(\varphi_2) < \delta_2, \text{ то верны неравенства}$$

$$\begin{cases} \Phi(f_{k_1k_2} + f_{k_2n} + \varphi_2) < \varepsilon_1 \\ \Phi(f_{k_2n} + \varphi_2) < \delta_1 \leqslant \varepsilon_2 \end{cases} \tag{4}$$

Предположим, что мы уже нашли числа $\delta_i \leqslant \varepsilon_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, m-1$, и $k_1 < k_2 < \ldots < k_{m-1}$ такие, что справедливо утверждение:

$$\text{если } n \geqslant k_{m-1},\ \varphi_{m-1} \in M^+ \text{ и } \Phi(\varphi_{m-1}) < \delta_{m-1}, \text{ то}$$

$$\begin{cases} \Phi(f_{k_1k_2} + f_{k_2k_3} + \ldots + f_{k_{m-1}n} + \varphi_{m-1}) < \varepsilon_1 \\ \Phi(f_{k_2k_3} + f_{k_3k_4} + \ldots + f_{k_{m-1}n} + \varphi_{m-1}) < \delta_1 \leqslant \varepsilon_2 \\ \ldots \\ \Phi(f_{k_{m-1}n} + \varphi_{m-1}) < \delta_{m-2} \leqslant \varepsilon_{m-1} \end{cases} \tag{5}$$

Покажем, что в каждом из этих неравенств сумму можно удлинить на одно слагаемое и одновременно увеличить на единицу число неравенств.

В силу 3^o по δ_{m-1} найдем $\delta_m \leqslant \varepsilon_{m+1}$ такое, чтобы из $\Phi(f)$, $\Phi(g) < \delta_m$ следовало $\Phi(f+g) < \delta_{m-1}$, а затем по δ_m найдем номер $k_m > k_{m-1}$ такой, чтобы (в силу $\Phi(f_{mn}) \to_{m,n} 0$) при $n \geqslant k_m$ было $\Phi(f_{k_mn}) < \delta_m$. Тем самым получим, что справедливо утверждение:

$$\text{если } n \geqslant k_m,\ \varphi_m \in M^+ \text{ и } \Phi(\varphi_m) < \delta_m, \text{ то}$$

$$\Phi(f_{k_mn} + \varphi_m) < \delta_{m-1} \leqslant \varepsilon_m. \tag{6}$$

Полагая в (5) $n = k_m$ и заменяя φ_{m-1} на $f_{k_mn} + \varphi_m$ получим справедливость утверждения:

$$\text{если } n \geqslant k_m,\ \varphi_m \in M^+ \text{ и } \Phi(\varphi_m) < \delta_m, \text{ то}$$

$$\begin{cases} \Phi(f_{k_1k_2} + \ldots + f_{k_{m-1}k_m} + f_{k_mn} + \varphi_m) < \varepsilon_1 \\ \Phi(f_{k_2k_3} + \ldots + f_{k_{m-1}k_m} + f_{k_mn} + \varphi_m) < \delta_1 \leqslant \varepsilon_2 \\ \ldots \\ \Phi(f_{k_{m-1}k_m} + f_{k_mn} + \varphi_m) < \delta_{m-2} \leqslant \varepsilon_{m-1} \\ \Phi(f_{k_mn} + \varphi_m) < \delta_{m-1} \leqslant \varepsilon_m \end{cases} \tag{7}$$

Таким образом, мы на каждом этапе имеем возможность сделать новый шаг, увеличивая число неравенств и число слагаемых в каждом из них. Продолжая рассуждения по индукции, получим последовательности чисел $\delta_n \leqslant \varepsilon_{n+1}$ и номеров $k_1 < k_2 < \ldots < k_n < \ldots$, для которых выполняются неравенства вида (7) при любом m, если только $n \geqslant k_m$ и $\Phi(\varphi_m) < \delta_m$. Полагая, в частности, $n = k_{m+1}$ и $\varepsilon_m = 0$, получим, что (1) выполняется при любом $m \in \mathbb{N}$ и любом $i = \overline{1, m}$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Если в лемме 1* Φ *удовлетворяет условию* 5^o, *то* $\forall\ (\varepsilon_n)$, $\varepsilon_n > 0$, $\exists\ (k_n)$ *в* $\mathbb{N}$, *такая, что*

$$\Phi\left(\sum_{i=n}^{\infty} f_{k_i k_{i+1}}\right) \leqslant \varepsilon_n, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{8}$$

Доказательство. По лемме 1 имеется последовательность (k_n), для которой при любых n и $m \geqslant n$ выполнены неравенства

$$\Phi\left(\sum_{i=n}^{m} f_{k_i k_{i+1}}\right) \leqslant \varepsilon_n.$$

Так как $\sum\limits_{i=n}^{m} f_{k_i k_{i+1}} \uparrow \sum\limits_{i=n}^{\infty} f_{k_i k_{i+1}}$, то по 5^o

$$\Phi\left(\sum_{i=n}^{\infty} f_{k_i k_{i+1}}\right) \leqslant \sup_m \Phi\left(\sum_{i=n}^{m} f_{k_i k_{i+1}}\right) \leqslant \varepsilon_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Идея доказательства следующей леммы та же, что и в случае метрических пространств.

Лемма 3. *Пусть* Φ *удовлетворяет условиям* 1^o, 3^o *и пусть последовательность* (f_n) *в* M *такова, что* $\Phi(|f_n - f_m|) \to_{m,n} 0$. *Тогда если существуют* $f \in M$ *и подпоследовательность* (f_{k_n}) *такие, что* $\Phi(|f_{k_n} - f|) \to_n 0$, *то и* $\Phi(|f_n - f|) \to_n 0$.

Доказательство. В силу фундаментальности (f_n) имеем $\Phi(|f_n - f_{k_n}|) \to_n 0$ и в то же время $\Phi(|f_{k_n} - f|) \to_n 0$. Тогда по 3^o и $\Phi(|f_n - f_{k_n}| + |f_{k_n} - f|) \to_n 0$. Поскольку $|f_n - f| \leqslant |f_n - f_{k_n}| + |f_{k_n} - f|$ на T, то по 1^o и $\Phi(|f_n - f|) \to_n 0$.

3.Основная теорема

Теорема 1. *Если функционал* Φ *на* M^+ *удовлетворяет условиям* $1^o - 5^o$, *то множество* M_Φ *полно.*

Доказательство. Пусть (f_n) – фундаментальна в M_Φ : $\Phi(|f_n - f_m|) \to_{m,n} 0$. В силу леммы 3 нам достаточно доказать, что имеются $f \in M_\Phi$ и подпоследовательность (f_{k_n}) такие, что $\Phi(|f_{k_n} - f|) \to_n 0$.

Для двойной последовательности $(|f_n - f_m|)$ в M_Φ^+ по лемме 2 найдется последовательность $|f_{k_n} - f_{k_{n+1}}|$ $(k_n < k_{n+1})$ такая, что

$$\Phi\left(\sum_{i=n}^{\infty} |f_{k_{i+1}} - f_{k_i}|\right) < \frac{1}{2^n}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Пусть $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} T\left(\sum\limits_{i=n}^{\infty} |f_{k_{i+1}} - f_{k_i}| = \infty\right)$. Так как $\Phi\left(\sum\limits_{i=n}^{\infty} |f_{k_{i+1}} - f_{k_i}|\right) < \frac{1}{2^n}$, то $A \in \mathcal{R}_0$. Если $t \in A^c$, то при некотором p будет $\sum\limits_{n=p}^{\infty} |f_{k_{n+1}}(t) - f_{k_n}(t)| < \infty$, в частности, при $n \geqslant p$ все $|f_{k_n}(t)| < \infty$, а поэтому ряд $f_{k_p}(t) + \sum\limits_{n=p}^{\infty} [f_{k_{n+1}}(t) - f_{k_n}(t)]$ абсолютно сходится, а его сумма равна $\lim f_{k_n}(t)$. Положим

$$f(t) = \begin{cases} \lim\limits_n f_{k_n}(t), & \text{если} \quad t \in A^c \\ 0, & \text{если} \quad t \in A. \end{cases}$$

Осталось показать, что $f \in M_\Phi$ и $\Phi(|f - f_{k_n}|) \to_n 0$. Для любого $t \in A^c$ имеют место неравенства (при $m > n$)

$$|f_{k_m}(t) - f_{k_n}(t)| \leqslant \sum_{i=n}^{m} -1|f_{k_{i+1}}(t) - f_{k_i}(t)| \leqslant \sum_{i=n}^{\infty} |f_{k_{i+1}}(t) - f_{k_i}(t)|,$$

откуда в пределе при $m \to \infty$ получаем

$$|f(t) - f_{k_n}(t)| \leqslant \sum_{i=n}^{\infty} |f_{k_{i+1}}(t) - f_{k_i}(t)|.$$

Последнее неравенство выполняется и при $t \in A$ и любом n, ибо в этом случае правая часть при любом n равна ∞.

Поскольку $\Phi\left(\sum\limits_{i=n}^{\infty} |f_{k_{i+1}} - f_{k_i}|\right) < \frac{1}{2^n} \to 0$, то по 1^o и $\Phi(|f - f_{k_n}|) \to 0$. Кроме того, при некотором n $f - f_{k_n} \in M_\Phi$, а значит и $f \in M_\Phi$, ибо $f \sim f_{k_n} + (f - f_{k_n})$. Теорема доказана.

4.Применения основной теоремы

I. Пусть $(T, \mathcal{R}, \mu)$ – пространство с мерой, $\mathcal{R}_0 = \mu^{-1}(0)$ – σ-кольцо множеств нулевой меры, M – класс всех измеримых функций f :

$T \to \overline{\mathbb{R}}$, $p > 0$. Определим на M^+ функционал

$$\Phi(f) = \int_T f^p d\mu.$$

Тогда класс M_Φ совпадает с пространством $\mathcal{L}^p(T, \mathcal{R}, \mu)$ (или с $L^p(T, \mathcal{R}, \mu)$, если перейти к фактор-пространству, см. замечание 2 в п. 1), а Φ на нем можно задать равенством

$$\Phi(f) = \begin{cases} \|f\|^p, & \text{если} \quad p \geqslant 1 \\ d(f,0), & \text{если} \quad 0 < p < 1, \end{cases}$$

где d – вводимая в L^p при $0 < p < 1$ метрика: $d(f,g) = \int_T |f-g|^p d\mu$. (см. [7], с. 45).

Нетрудно проверить выполнимость $1^o - 5^o$ (5^o следует из теоремы Леви) и тем самым получить полноту L^p, $0 < p < \infty$, как следствие из теоремы 1.

II. Пусть $\mathcal{R}, \mathcal{R}_0, M, M^+$ – те же, что в п. 1. Определим на M^+ функционал (называемый *существенной верхней гранью*):

$$\Phi(f) = \operatorname{vrai\,sup} f(t) := \inf\{a \in \overline{\mathbb{R}}^+ : f(t) \leqslant a \text{ п. в. на } T\}.$$

На множестве $L^\infty(T, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0) := M_\Phi$ он определяет монотонную полунорму $\|f\|_\infty = \Phi(|f|)$, на M^+ удовлетворяет условиям $1^o - 5^o$. Проверим, например, 5^o. Пусть $0 \leqslant f_n \uparrow f$ и пусть $\sup \Phi(f_n) = \alpha$. Если $\alpha < \Phi(f)$, то $A = T(f > \alpha) \notin \mathcal{R}_0$. В то же время для всех n имеем $f_n(t) \leqslant \alpha$ п.в., т.е. $A_0 = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} T(f_n > \alpha) \in \mathcal{R}_0$. Тогда на $A \setminus A_0 \notin \mathcal{R}_0$ будет нарушено условие $f_n(t) \uparrow f(t)$, вопреки предположению.

По теореме 1 пространство $L^\infty(T, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0)$ полно. В частности, если $(T, \mathcal{A}, \mu)$ – пространство с мерой, $\mathcal{R}_0 = \mu^{-1}(0)$, то $L^\infty(T, \mathcal{R}, \mu)$ – полно.

III. Более общим результатом, вытекающим из теоремы 1, является теорема 4 на с. 143 в [8]. Пусть $(X, \|\cdot\|)$ – *нормированное идеальное пространство* (НИП) на измеримом пространстве $(T, \mathcal{R})$. Погрузим X в M и на M^+ определим функционал

$$\Phi(f) = \begin{cases} \|f\|, & f \in X^+ \\ +\infty, & f \in M^+ \setminus X^+. \end{cases}$$

Предположим, что норма в X удовлетворяет условиям (см. [8], с. 142-143):

(B) если $0 \leqslant f_n \uparrow f \in M^+$ и $\sup \|f_n\| < \infty$, то $f \in X$

(C) если $0 \leqslant f_n \uparrow f \in X$, то $\|f_n\| \to \|f\|$ (непрерывность снизу).

Тогда для Φ будут выполнены условия $1^o - 5^o$, а поэтому имеет место

Теорема 2.([8], с. 143). *Если в НИП X норма удовлетворяет условиям (B) и (C), то X – полно.*

Отметим, что наше доказательство никак не связано со сходимостью по мере (использованной в [8]).

IV. Еще одно пространство, к которому применима теорема 1, взято из [1]. Пусть $(T, \mathcal{R}, \mu), \mathcal{R}_0, M$ – те же, что и в I. Пусть $N : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ непрерывная неограниченная возрастающая функция, причем $N(u) = 0 \iff u = 0$ и $\sup \dfrac{N(2u)}{N(u)} < \infty$ (см. [1], с. 18). Положим для $f \in M^+$ $\Phi(t) = \int_T N(|f(t)|)d\mu$. Тогда множество M_Φ (после факторизации) совпадает с пространством $N(L(T, \mathcal{R}, \mu))$, введенным на с. 19 в [1], а $\Phi(|f|)$ – с *модулярной функцией* $\rho_N(f)$ на с. 18 там же.

Без труда проверяется выполнимость $1^o - 5^o$ (проверка 5^o опирается на теорему Леви), следовательно по теореме 1 пространство $N(L(T, \mathcal{R}, \mu))$ полно.

V. Еще одно применение теоремы 1 связано с пространствами измеримых функций абсолютно интегрируемых относительно неаддитивных функций множества.

Пусть μ – *субаддитивная нечеткая мера* на σ-кольце $\mathcal{R} \subset 2^T$ т.е. функция $\mu : \mathcal{R} \to \overline{\mathbb{R}}^+$ со свойствами: а) $\mu\emptyset = 0$, $\mu A \leqslant \mu B$ при $A \subset B$; б) $\mu(A \cup B) \leqslant \mu A + \mu B$; в) $\mu A_n \to \mu A$ при $A_n \uparrow A$; от условия непрерывности μ сверху мы отказываемся, ср. [9]], $\mathcal{R}_0 = \mu^{-1}(0)$. Интеграл Шоке (по μ) на M^+ определяем равенством $\int_T f d\mu := \int\limits_0^\infty \mu T(f > \lambda) d\lambda$ и положим $\Phi(f) := \int_T f^p d\mu$, $p > 0$.

Применяя свойства интеграла, приведенные в [10], можно показать, что Φ удовлетворяет условиям $1^o - 5^o$, а множество M_Φ является линейным пространством (соответствующее фактор-пространство, как и в случае меры, обозначают $L^p = L^p(T, \mathcal{A}, \mu)$). Из теоремы 1 следует полнота L^p относительно "квазинормы" $\Phi(f)$. Отметим, что пространство L^p используется, в частности, в теории интегрирования по векторной мере.

Литература

1. **Rolewicz S.** Metric linear spaces.Warszawa: PWN.Polish Scientific Publishers, 1972.

2. **Порошкин А.А.** О полноте некоторых функциональных пространств//*Теория функций: Тезисы докладов Всероссийского семинара.* Сыктывкар: СыктГУ, 1993. С. 44-45.

3. **Порошкин А.А.** Об одном обобщении теоремы о полноте.Сыктывкар: Коми педаг. ин-т, 1993. 19 с. Деп. в ВИНИТИ 18.05.93 №1293-В93.

4. **Халмош П.** Теория меры. М.: ИЛ, 1953.

5. **Архангельский А.В., Федорчук В.В.** Основные понятия и конструкции общей топологии//*Итоги науки и техники. Серия: Современные проблемы математики / Фундаментальные направления.* Том 17. М.: ВИНИТИ. С.5–110.

6. **Хьюитт Э., Росс К.** Абстрактный гармонический анализ. Т.I. М.: Наука, 1975.

7. **Рудин У.** Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.

8. **Канторович Л.В., Акилов Г.П.** Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.

9. **Ralescu D., Adams G.** The fuzzy integrals//*J. Math. Ann. and Appl.* 1980. V.75, №2. P. 562–570.

10. **Порошкин А.Г., Баженов И.И.** Один способ интегрирования по монотонным функциям множества//*Упорядоченные пространства и операторные уравнения: Межвуз. сб. научн. тр.* Сыктывкарский ун-т. Сыктывкар, 1982. С. 28–41.

Summary

Poroshkin A.A. On one generalization of the theorem on completeness

An abstract theorem on completeness for some classes of measurable functions is proved. Theorems on completeness of spaces L^p, $p > 0$, L^∞, normed ideal spaces (with some additional restrictions on the norm) and some others spaces follow from this theorem.

Коми педагогический институт

Поступила 8.02.95