Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1.Вып.1.1995

УДК 517.11:517.98

О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ НЕСТАНДАРТНОЙ ТЕОРИИ ПРОСТРАНСТВ Л.В.КАНТОРОВИЧА

Ю.Н.Ловягин

В работе методами булевозначных моделей теории множеств исследуются архимедовы векторные решетки. Вводится понятие нестандартного (в смысле А.Робинсона) расширения векторной решетки. Исследуется некоторая равномерность на векторной решетке, сходимость относительно которой совпадает с (r)-сходимостью.

Настоящая заметка посвящена приложению методов теории моделей к теории векторных решеток. Мы используем теорему Е.И.Гордона [1] о булевозначной реализации расширенного K – пространства. Благодаря общей теории векторных решеток [2,3], наши результаты переносятся на более широкий класс структур. Естественной границей наших методов является архимедова векторная решетка.

Методы булевозначных моделей теории множеств [4] мы используем в комбинации с методами нестандартного анализа А.Робинсона.

§1. Пусть L – язык узкого исчисления предикатов первого порядка с равенством, имеющий два бинарных функциональных символа $+,\bullet$, константные символы 0,1, бинарный предикатный символ $\leq$, а также множество унарных функциональных символов $\Lambda = \{\lambda : \lambda \in \mathbf{R}\}$.

В языке L рассмотрим теории $\mathcal{FP}$ упорядоченных полей и $\mathcal{VL}$ векторных решеток.

Пусть далее $\mathbb{B}$ – полная булева алгебра, $\mathcal{V}^{\mathbb{B}}$ –соответствующий отделимый булевозначный универсум теории множеств, R – множество вещественных чисел внутри $\mathcal{V}^{\mathbb{B}}$, в частности

$\mathcal{V}^{\mathbb{B}} \models R \models \mathcal{FP}$

Согласно теореме Е.И.Гордона $R\downarrow\models \mathcal{VL}$, боле того $R\downarrow$ расширенное К–пространство с базой, изоморфной $\mathbb{B}$, с естественн кольцевой структурой, причем алгебра идемпотентов кольца из морфна $\mathbb{B}$.

§2. В силу общей теории внутри $\mathcal{V}^{\mathbb{B}}$ существует такой элемен $^*R$, что

$\mathcal{V}^{\mathbb{B}}\models\ll^* R$ –нестандартное расширение R в смысле А.Робинсо $\gg$, в частности, $\mathcal{V}^{\mathbb{B}}\models\ll {}^*R\models \mathcal{FP}\gg$

Таким образом, внутри $\mathcal{V}^{\mathbb{B}}$ существуют множества $F,\cdot I$ и фун ция st такие, что

1. $\| \forall\epsilon(\epsilon\in I\equiv\forall x(x\in R\wedge(x>0)\supset|\epsilon|<x))\|=1$
2. $\| \forall v(v\in F\equiv\exists x(x\in R\wedge(x>0)\wedge(|v|<x))\|=1$
3. $\| \forall v(v\in F\equiv\exists x\exists\epsilon(x\in R\wedge\epsilon\in I\wedge(v=x+\epsilon)))\|=1$
4. $\|\,\mathrm{dom}\ st=F\,\|=\|\,\mathrm{rng}\ st=R\,\|=1$
5. $\| \forall v(v\in F\supset\forall\epsilon\forall x(x\in R\wedge\epsilon\in I\wedge(v=x+\epsilon)\supset(st\mathrm{v}=\mathrm{x})))\|=1$
6. $\| \forall v\forall w(v\in F\wedge w\in F\supset(st(\mathrm{v+w})=st\mathrm{v}+st\,\mathrm{w})\wedge(st(\mathrm{vw})=$ $=st\mathrm{v}\ st\mathrm{w}\ \|=1$
7. $\|\,\mathrm{Ker}\ st=I\,\|=1$
8. $\mathcal{V}^{\mathbb{B}}\models\ll$ факторкольцо F/I изоморфно $R\gg$
9. $\mathcal{V}^{\mathbb{B}}\models\ll$ st является естественной проекцией F/I на $R\gg$

Элементы множества F называются конечными (вещественным числами), множества I – бесконечно малыми числами, множеств $^*R\setminus F$ – бесконечными (бесконечно большими).

§3. Для x,y $\in R\downarrow$ положим x $\lhd$ y тогда и только тогда, когд $\|x<y\|=1$.

Лемма.$x\lhd$ *y тогда и только тогда, когда существует слаба единица* $e\in R\downarrow$ *такая. что x+e=y.*

Действительно,$\|x\lhd y\|=1$, тогда и только тогда, когда

$\|\exists e(e\in R\wedge e>0\wedge x+e=y)\|=1$, то есть существует тако элемент $e\in R\downarrow$, что $\|e>0\|=1$ и x+e=y.

Покажем, что e – слабая единица. Пусть $z\geq 0$ и z d e. Тогд $\|z\wedge e=0\|=1$ Так как $\|e>0\|=1$, отсюда следует, что $\|z=0\|=1$. Что и требовалось доказать.

Теорема. *Структура* $< R, \lhd, +, 0, \Lambda >$ *является упорядоченным векторным пространством.*

Доказательство. Требуется установить только, что $\lhd$ – отношение строгого порядка и согласовано с алгебраическими операциями. Но это сразу следует из определения и соответствующих свойств строгого порядка внутри $\mathcal{V}^{\mathbb{B}}$.

Определение. *Порядок* $\lhd$ *назовем существенным порядком в* $\mathcal{R}\downarrow$.

§4. Рассмотрим теперь структуру $^*R\downarrow$. Легко понять, что $^*R \models \mathcal{VL}$ и, так как внутри $V^{\mathbb{B}}$ $^*R$ – элементарное расширение R, $^*R\downarrow$ - $R\downarrow$ как модели VL (см. напр. [6], стр.290).

Множество $I\downarrow \subset {}^*R\downarrow$ назовем идеалом бесконечно малых элементов, множество $F\downarrow \subset {}^*R\downarrow$ – множеством конечных элементов. Функцию $st\downarrow$ – функцией стандартной части. Учитывая свойства 1. – 9. из §2, получаем, что имеет место

Теорема. *Пусть* $\mathbf{V}$ *– архимедова векторная решетка. Тогда существует векторная решетка* $^*\mathbf{V}$*, являющаяся элементарным расширением* $\mathbf{V}$ *и множества* $\mathrm{I}, \mathrm{F} \subset {}^*\mathbf{V}$ *такие, что*

1. $\epsilon \in \mathrm{I}$ *тогда и только тогда, когда для всех* $v \in \mathbf{V}_+ |\epsilon| \lhd v$
2. $v \in \mathrm{F}$ *тогда и только тогда, когда* $v = k + \epsilon$ *для некоторых* $k \in \mathbf{V}, \epsilon \in \mathrm{I}$
3. $v \in \mathrm{F}$ *тогда и только тогда, когда* $|v| \leq k$ *для некоторого* $k \in \mathbf{V}$.

При этом существует функция $\mathrm{st} : \mathrm{F} \longleftarrow \mathbf{V}$ *такая, что* $dom\,\mathrm{st} = \mathrm{F}, rng\,\mathrm{st} = \mathbf{V}, ker\,\mathrm{st} = \mathrm{I}$, *и, если* $v = x + \epsilon$, *то* $\mathrm{st}v = x$.

Доказательство. Пусть K – К-пополнение $\mathbf{V}$ и $\mathbf{X}$ – максимальное расширение K. Пусть далее $\mathfrak{B}$ – база $\mathbf{X}$, $V^{\mathfrak{B}}$ – соответствующий булевозначный универсум теории множеств . Тогда $\mathbf{X}$ изоморфно $\mathcal{R}\downarrow$, где R – множество вещественных чисел внутри $V^{\mathfrak{B}}$. Далее утверждения теоремы получаются из вышеизложенного, если положить $^*\mathbf{V} = {}^*R\downarrow$.

§5. Опишем теперь решетку $^*\mathbf{V}$ в терминах внутренних по отношению к теории $\mathcal{VL}$. Доказательства можно проводить не умаляя общности для случая $\mathbf{V} = R\downarrow$.

Теорема 1. *Для* $\epsilon \in \mathrm{I}$ *необходимо и достаточно существования бесконечно малого вещественного числа* α *внутри* $V^{\mathfrak{B}}$ *такого, что* $\epsilon = \alpha^{\wedge} \bullet 1^{\wedge}$, *где 1 – фиксированная порядковая единица (если* *она существует)* $\mathbf{V}$, $\wedge$ *– естественное вложение универсума фон Неймана в* $V^{\mathfrak{B}}$. *Если порядковой единицы в исходной решетке нет, то можно взять любую единицу в максимальном расширении К-пополнения* $\mathbf{V}$.

Достаточность условия теоремы очевидна. Покажем необходимость. Пусть $\epsilon \in \mathrm{I}$. Тогда, по определению I $\|\epsilon \approx 0\| = 1$. Ясно, что существует элемент $\alpha \in^* R$ такой, что $\alpha^{\wedge} = \epsilon$. Что и требовалось доказать.

Определение 1. *Два элемента* $v, w \in^* \mathbf{V}$ *назовем бесконечно близкими, если* $v - w \in \mathrm{I}$. *В этом случае будем писать* $v \approx w$.

Теорема 2. $v \approx w$ *тогда и только тогда, когда* $\|v \approx w\| = 1$. *Действительно, так как* $v - w \in \mathrm{I}$, *st(v-w)=0, то есть* $\|st(v-w) = 0\| = 1$ *или* $\|v \approx w\| = 1$.

Определение 2. *Для* $x \in^* \mathbf{V}$ *положим* $\mu(x) = \{v \in^* \mathbf{V} : v \approx x\}$. *Множество* $\mu(x)$ *назовем монадой (ореолом) элемента* x.

Теорема 3.

1. *Пусть* $x \in \mathrm{F}$. *Тогда* $v \in \mu(x)$ *тогда и только тогда, когда* $\mathrm{st}v = \mathrm{st}x$, *тогда и только тогда, когда* $v \approx x$.

2. $x \in \mathbf{V}$ *тогда и только тогда, когда* $\mathrm{st}x = x$.

3. *если* $x, y \in \mathbf{V}$ *и* $x \approx y$, *то* $x = y$.

Для доказательства рассмотрим $x, y \in \mathbf{V}$ такие, что $x \approx y$. Тогда $st \downarrow x = st \downarrow y$ и, следовательно, $\|stx = sty\| = 1$, то есть, так как $\|x, y \in R\| = 1, \|x = y\| = 1$.

Следствие. *Если* $x, y \in \mathbf{V}$ *и* $x \neq y$, *то* $\mu(x) \cap \mu(y) = \emptyset$.

Следующее утверждение очевидно.

Теорема 4. *Пусть* $\|x \in R\| = 1$ *и пусть* $\mu(x)$ *– монада* x *внутри* $V^{\mathfrak{B}}$. *Тогда* $\mu \downarrow (x)$ *– монада* x *в* ${}^*R \downarrow$.

§6. Определение. *Пусть* $\mathbf{V}$ *– архимедова векторная решетка с единицей . Естественной топологией решетки* $\mathbf{V}$ *назовем ее монадологию, то есть топологию* $\tau_\mu(\mathbf{V})$, *порожденную семейством монад* $\{\mu(x) : x \in \mathbf{V}\}$.

Теорема 1. *Пусть* $< X, \tau >$ *– топологическое пространство внутри* $V^{\mathfrak{B}}$. *Тогда* $\tau' = \{E \downarrow : E \in \tau \downarrow\}$ *является базой топологии на множестве* $X \downarrow$. *При этом, если* σ *– база топологии* τ *внутри* $V^{\mathfrak{B}}$, *то* $\sigma' = \{E \downarrow : E \in \sigma \downarrow\}$ *– база топологии* $X \downarrow$ *и топологии с базами* τ' *и* σ' *совпадают.*

Доказательство. Пусть $x \in V \downarrow \cap W \downarrow$. Тогда $x \in (V \cap W) \downarrow$, то есть $\|x \min V \cap W\| = 1$. Следовательно, внутри $V^{\mathfrak{B}}$ существует элемент $U \in \sigma$ такой, что $\|x \in U \subset V \cap W\| = 1$ или $x \in U \downarrow \subset V \downarrow \cap W \downarrow$. Остальное очевидно.

Комбинируя этот результат с теоремой 4 §5, получаем, что имеет место:

Теорема 2. *$\tau_\mu(R \downarrow)$ совпадает со спуском естественной топологии множества вещественных чисел.*

Прямым следствием этого утверждения является:

Теорема 3. *Архимедова векторная решетка является хаусдорфовым равномерным пространством в своей естественной топологии.*

Следствие. *Алгебраические и решеточные операции в архимедовой векторной решетке равномерно непрерывны.*

Теорема 4. *Естественная топология архимедовой векторной решетки совпадает с интервальной топологией существенного порядка.*

Доказательство. Достаточно доказать, что для $a, b \in R \downarrow$ $[a, b] \downarrow = \lhd|a, b|\rhd = \{z \in R \downarrow : a \unlhd z \unlhd b\}$. Покажем сначала, что $(a, b) \downarrow = \lhd a, b \rhd = \{z : a \lhd z \lhd b\}$. Имеем $z \in (a, b) \downarrow$ тогда и только тогда, когда $\|z \in (a, b)\| = 1$ тогда и только тогда, когда $\|a < z \wedge z < b\| = 1$ тогда и только тогда, когда $\|a < z\| = \|z < b\| = 1$ тогда и только тогда, когда $a \lhd z \lhd b$.

Если же $\|z = a\| = 1$ или $\|z = b\| = 1$, то z=a, соответственно z=b и, следовательно, $\lhd|a, b|\rhd = [a, b] \downarrow$.

Теорема 5. *Пусть x – направление в $\mathbf{V}$. Тогда $x \to 0$ в $\tau_\mu(\mathbf{V})$ тогда и только тогда, когда x сходится к 0 с регулятором.*

Доказательство. Сходимость направления x в топологии $\tau_\mu(\mathbf{V}$ равносильна условию $\|x^\wedge \to 0\| = 1$, следовательно, для любого $\epsilon > 0$ существует α_0 так, что для всех $\alpha > \alpha_0 \| |x_\alpha| < \epsilon^\wedge \| = 1$, то есть $|x_\alpha| < \epsilon^\wedge \bullet 1$, что и означает, что x сходится к нулю с регулятором единица.

Обратно, если x сходится к нулю с регулятором, то

$\models \forall \epsilon > 0 \exists \alpha_0 \forall \alpha > \alpha_0 |x_\alpha| < \epsilon \bullet r$. Тогда по принципу переноса $V^{\mathfrak{B}} \models \forall \epsilon > 0 \exists \alpha_0 \forall \alpha > \alpha_0 |x_\alpha| < \epsilon \bullet r^\wedge$. Что и означает сходимость направления x к нулю во множестве вещественных чисел (внутри $V^{\mathfrak{B}}$).

§7. Пусть теперь $\mathbf{V}$ – архимедова векторная решетка с единицей 1. Тогда множество $N = \{n1 : n \in \omega\}$ естественным образом изоморфно множеству натуральных чисел. Пусть $^*N$ – естественное расширение N при элементарном вложении $\mathbf{V}$ в $^*\mathbf{V}$. Элементы множества $^*N \setminus N$ будем называть бесконечными натуральными числами.

Теорема. *Пусть $\{x_n\} \subset \mathbf{V}(n \in \omega)$ – произвольная последовательность. Тогда:*

(I) последовательность $\{x_n\}$ сходится к x с регулятором тогда и только тогда, когда для всех бесконечных ν $x_\nu \approx x$;

(II) x является предельной точкой последовательности $\{x_n\}$ тогда и только тогда, когда для некоторого бесконечного $\nu x_\nu \approx x$;

(III) $\{x_n\}$ – (r)-фундаментальна тогда и только тогда, когда для всех бесконечных ν, ν' $x_\nu \approx x_{\nu'}$.

Этот результат является прямым следствием теоремы 5 предыдущего параграфа и соответствующих фактов для вещественных последовательностей.

Литература

1. **Гордон Е.И.** Вещественные числа в булевозначных моделях теории множеств и K-пространства //*ДАН СССР.* 1977. Т.237.№4. С.773 – 775.

2. **Канторович Л.В., Вулих Б.З., Пинскер А.Г.** Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. М.;Л.: Гостехиздат, 1950. 546 с.

3. **Вулих Б.З.** Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М.: Физматгиз, 1961. 407 с.

4. **Solovay R.,Tennenbaum S.** Itherated Cohen extension and Souslin's probeltm //*Ann. of Math.* 1971. V.94.№2. P.201 – 275.

5. **Robinson A.** Non-Standard Analysis. Amsterdam: North-Holland publ. comp., 1966. 293 p.

6. **Кусраев А.Г., Кутателадзе С.С.** Нестандартные методы анализа. Новосибирск: Наука, 1990. 344 с.

Summary

Lovyagin J.N. On some questions of nonstandard theory of Kantorovich spaces

Archimed vector lattices by the Boolean-valued models methods of the set theory are studied. A notion of nonstandard (in the sence of A.Robinson) enlargement of vector lattice is introduced. A certain uniform structure in the vector lattice with respect to which convergence coincides with the (r)-covergence is investigated too.

Сыктывкарский университет *Поступила 8.02.95*