Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1.Вып.1.1995

УДК 519.234

Классический принцип инвариантности для случайных процессов, индексированных множествами

С.В.Екишева

В статье предложено доказательство слабой сходимости распределений случайных процессов, индексированных множествами, к броуновскому движению, основанное на классическом принципе инвариантности Донскера-Прохорова для распределения специального функционала $J : C[0,1] \to C(G)$, где $C(G)$ пространство непрерывных функций на множестве $G = \{(a,b] : 0 \le a \le b \le 1\}$.

Пусть ξ_n, $n \in \mathbb{N}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин,

$$\mathrm{E}\,\xi_1 = 0, \quad \mathrm{D}\,\xi_1 = 1, \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i.$$

Рассмотрим в $C[0,1]$ случайные ломаные

$$X_n(t,\omega) = \frac{1}{\sqrt{n}}(S^{(\omega)}_{[nt]} + (nt - [nt])\xi^{(\omega)}_{[nt]+1}), \quad t \in [0,1],$$

обозначим P_n распределение соответствующего случайного элемента $X_n(t)$.

Классический принцип инвариантности Донскера-Прохорова утверждает, что имеет место слабая сходимость

$$P_n \Rightarrow W,$$

где W — винеровская мера.

Тогда для любого W-п.в. непрерывного функционала f имеет место слабая сходимость

$$P_n f^{-1} \Rightarrow W f^{-1}. \tag{1}$$

В работах Ю.А.Давыдова ([1, 2]) выделен класс M_W функционалов, для которых в условиях классического принципа инвариантности имеет место также сильная сходимость распределений

$$P_n f^{-1} \to^{var} W f^{-1}, \quad f \in M_W.$$

Это утверждение носит название локального принципа инвариантности, поскольку при условии абсолютной непрерывности распределений P_n сходимость по вариации эквивалентна сходимости плотностей в L_1.

Предметом нашего рассмотрения станет конкретный функционал J, его распределения $P_n J^{-1}$, WJ^{-1} и доказательство для них классического принципа инвариантности (1), т.е. решение вопроса о принадлежности J классу W-п.в. непрерывных функционалов.

Обозначим $G = \{A : A = (a, b],\ 0 \le a \le b \le 1\}$. Введем на G метрику следующим образом: $\forall A, B \in G$, $d(A, B) = \lambda(A \Delta B)$, где Δ — симметрическая разность множеств, а λ — мера Лебега. Нетрудно показать, что снабженное такой метрикой G является полным метрическим пространством. То же самое верно и для пространства $C(G)$ всех непрерывных на G функционалов с метрикой $\|f\|_{C(G)} = \sup_{A \in G} |f(A)|$, $f \in C(G)$.

Броуновским движением $\tilde{W}$ на G назовем распределение случайного элемента Z на $C(G)$ такого, что все его конечномерные распределения являются гауссовскими с $\mathrm{E}\, Z(A) = 0$, $\mathrm{E}\, Z(A) Z(B) =$ $= \lambda(A \cap B)$ для любых $A, B \in G$.

Определим функционал $J : C[0, 1] \to C(G)$ следующим образом: $\forall x(t) \in C[0, 1]$, $\forall A \in G$, $A = (a, b]$,

$$J_{(x)}(A) = x(b) - x(a).$$

Непрерывность на G $J_{(x)}$ для $\forall x(t) \in C[0, 1]$ является тривиальным следствием непрерывности $x(t)$.

Рассмотрим на $C(G)$ распределения $P_n J^{-1}$, WJ^{-1}. Для каждого $n \ge 1$ распределение $P_n J^{-1}$ совпадет с распределениями Q_n случайного элемента Z_n на $C(G)$, где $\forall A \in G$

$$Z_n(A) = \sqrt{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda(A \cap G_{j,n}) \xi_j, \quad G_{j,n} = (\frac{j-1}{n}, \frac{j-1}{n}],$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, j = 1, \ldots, n.$$

(Z_n называют случайным процессом, индексированным множествами).

Распределение WJ^{-1} является броуновским движением $\tilde{W}$, определенным выше.

Таким образом, доказав W-п.в. непрерывность функционала J, мы тем самым докажем, что

$$Q_n \Rightarrow \tilde{W}. \tag{2}$$

Утверждение (2) есть классический принцип инвариантности для процессов, индексированных множествами. Доказательству этого утверждения посвящена обширная работа [3]. Если заметить, что вероятностные меры Q_n и $\tilde{W}$ суть распределения $P_n J^{-1}$ и WJ^{-1}, соответственно это доказательство становится почти тривиальным.

Фиксируем $\varepsilon > 0$. Пусть $x = x(t)$, $y = y(t)$, $x, y \in C[0,1]$ такие, что

$$||x - y||_{C[0,1]} = \sup_{t\in[0,1]} |x(t) - y(t)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
||J_{(x)} - J_{(y)}||_{C(G)} &= \sup_{A\in G} |J_{(x)}(A) - J_{(y)}(A)| \\
&= \sup_{A\in G} |x(b) - x(a) - y(b) + y(a)| \\
&\le \sup_{b\in[0,1]} |x(b) - y(b)| + \sup_{a\in[0,1]} |y(a) - x(a)| \\
&= ||x - y||_{C[0,1]} + ||x - y||_{C[0,1]} < 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Значит, J непрерывен на $C[0,1]$ и

$$P_n J^{-1} \Rightarrow WJ^{-1},$$

что эквивалентно (2).

Литература

1. **Давыдов Ю.А.** О слабой сходимости разрывных процессов к непрерывным// *Сборник научных трудов ЛОМИ РАН. Под ред. В.Н.Судакова.* СПб.,1992.

2. **Давыдов Ю.А., Сунь Сянь Го.** Absolute continuity for distributions of Brownian sojourn times// *Тезисы VI Вильнюсской международной конференции по теории вероятностей и мат. статистике.* Вильнюс,1993. С.75.

3. **Dongching Chen.** An uniform central limit theorem for non-uniform ϕ-mixing random fields. Doctoral dissertation. Department of mathematics Beijing normal University. 1988

4. **Биллингсли П.** Сходимость вероятностных мер. М.:Наука,1977.

Summary

Yekisheva S.V. A uniform Central Limit Theorem for a set-indexed processes.

The proof of CLT for a set-indexed processes, based on classic invariance principle, is given. A process' distributions are considered as distributions of some special continuous functional $J : C[0,1] \to C(G)$, where $C(G)$ is a space of all continuos functions on $G = \{(a,b] : 0 \leq a \leq b \leq 1\}$.

Сыктывкарский университет

Поступила 8.02.95