Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1.Вып.1.1995

УДК 517.9:536.46

К МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПЛАМЕНИ

С.И.Худяев

Дается математическая постановка проблемы промежуточной асимптотики в теории горения и некоторые предварительные результаты в проблеме Зельдовича для КПП-уравнений (уравнений Колмогорова-Петровского-Пискунова).

1. Введение

В настоящей работе в порядке их математической формулировки рассматриваются две проблемы теории горения или более общо: проблемы волновых решений нелинейного уравнения теплопроводности. Первая касается основ теории горения и относится к понятию "промежуточная асимптотика" [1-3], которое обычно связывается со стационарной волной горения, стационарной скоростью ее распространения. В этой части работы получают развитие представления, изложенные в работе [4], а численные расчеты [4] служат их обоснованием, хотя, конечно, не заменяют строгих доказательств.

Вторая проблема непосредственно вырастает из первой и касается наименьшей скорости волновых решений, когда существует полубесконечный интервал этих скоростей. В работе [4] была замечена неожиданно широкая область применимости известной формулы КПП (Колмогорова-Петровского-Пискунова) [5] для этой наименьшей скорости. В устной беседе с автором акад. Я.Б.Зельдович (1979 г.) предложил описать класс тех уравнений, для которых формула КПП остается в силе. В сообщении [6] было сформулировано одно из возможных расширений класса КПП-уравнений и некоторый предварительный результат относительно наименьшей скорости. Этот материал излагается в настоящей работе.

2. О промежуточной асимптотике

Фундаментальным понятием в теории распространения пламени является понятие стационарной волны горения, стационарной скорости горения. В рамках простейшей математической модели волны горения, описываемой одним нелинейным уравнением теплопроводности [3, 4]

$$\theta_\tau = \theta_{xx} - \varphi(\theta), \quad \theta|_{x=-\infty} = 0, \quad \theta_x|_{x=-\infty} = 0, \tag{1}$$

где $\varphi(\theta)$ – температурная зависимость скорости тепловыделения, обусловленного химическим превращением, стационарной волной принято считать ограниченное решение типа бегущей волны $\theta(x,\tau) = \theta(x-\omega\tau)$ с искомой постоянной скоростью ω. Для существования такого решения необходимо, по крайней мере, обращение в нуль функции $\varphi(\theta)$ при $\theta = 0$ и $\theta = \theta|_{x=\infty} = \theta_0 > 0$. Для широко используемой в теории горения Аррениусовой функции тепловыделения [3,4]

$$\varphi(\theta) = \theta^n \exp\left(-\frac{\theta}{1-\beta\theta}\right), \quad \beta \ll 1, \ n > 0, \tag{2}$$

условие $\varphi(\theta_0) = 0$ не имеет места. Как видно из формулы (2), $\varphi(\theta_0) = 0$ лишь при $\theta_0 = \beta^{-1}$, что соответствует температуре, равной абсолютному нулю. Поэтому, строго говоря, для функции (2) стационарная волна отсутствует. Ее существования добиваются за счет искусственного обращения в нуль функции $\varphi(\theta)$ в окрестности точки $\theta = \theta_0$, которая соответствует температуре непрореагировавшего вещества перед фронтом пламени. Ввиду того, что обычно $\theta_0 \gg 1$, а $\varphi(\theta_0) \ll 1$, на результат слабо сказывается величина интервала, где $\varphi(\theta)$ полагается равной нулю, а стационарной волне придают смысл промежуточной асимптотики решения (1), когда начальное условие уже "забыто", а величины порядка $\varphi(\theta_0)$ еще не сказываются [3, 4]. Ввиду неопределенности процедуры обращения в нуль $\varphi(\theta)$ и интервала, где это происходит, такому приближению трудно придать четкий математический смысл. Кроме того, остаются неясными пределы применения такого подхода.

В работе [4] выполнено численное решение нестационарной задачи (1)-(2) при подходящих начальных условиях без обращения в нуль функции $\varphi(\theta)$, с целью выяснения пределов применимости стационарного подхода. Хотя результаты [4] были весьма оптимистичны, все же математическая формулировка проблемы промежуточной асимптотики не была законченной. Ясно, что при $\varphi(\theta_0) > 0$

величина $\theta_0 = \theta|_{x=\infty}$ не остается постоянной и убывает во времени согласно уравнению

$$\frac{d\theta_0}{d\tau} = -\varphi(\theta_0), \quad \theta_0|_{\tau=0} = T. \tag{3}$$

Автором настоящей статьи было предложено в [4] искать квазистационарное приближение для относительной величины

$$v(x,\tau) = \frac{\theta(x,\tau)}{\theta_0(\tau)}, \quad 0 < v(x,\tau) < 1. \tag{4}$$

Предельное значение этой функции при $x = \infty$ остается постоянной и равной 1 и подчиняется согласно (1), (3) уравнению

$$v_\tau = v_{xx} - \varphi_1, \quad \varphi_1(v;\theta_0) = \theta_0^{-1}[\varphi(\theta_0, v) - v\varphi(\theta_0)]. \tag{5}$$

Отметим сразу же, что в отличие от (2) новая функция источника φ_1 в уравнении (5) обращается в нуль на граничных значениях v :

$$v|_{x=-\infty} = 0; \quad v|_{x=+\infty} = 1. \tag{6}$$

Это обстоятельство позволяет искать решение задачи (5)-(6) в виде бегущей волны

$$v(x,\tau) = u(x - \int \omega d\tau, \tau) \equiv u(\xi,\tau). \tag{7}$$

Относительно $u(\xi,\tau)$, $\xi = x - \int \omega d\tau$, приходим к уравнению

$$u_\tau = u_{\xi\xi} + \omega u_\xi - \varphi_1(u,\theta_0), \quad u|_{\xi=-\infty} = 0, \quad u|_{\xi=\infty} = 1. \tag{8}$$

Поскольку в (8) явно входит переменная величина θ_0, то удобно согласно (3) исключить τ и считать масштабом времени

$$\eta = T - \theta_0, \quad \left(\frac{d\eta}{d\tau} = \varphi(T-\eta)\right) : \tag{9}$$

$$\varphi(T-\eta)u_\eta = u_{\xi\xi} + \omega u_\xi - \varphi_1(u, T-\eta), \quad u|_{\xi=-\infty} = 0, \quad u|_{\xi=\infty} = 1. \tag{10}$$

Вне некоторой окрестности $\eta = T$ ($\theta_0 = 0$, ср.(2)) множитель $\varphi(T-\eta)$ при u_η очень мал, так что отыскание решения вида (7) сводится к сингулярно возмущенному уравнению. Можно ожидать, что вне окрестности концов интервала $0 < \eta < T$ решение уравнения (10) будет близко к решению квазистационарного уравнения

$$u_{\xi\xi} + \omega u_{\xi} - \varphi_1(u, T - \eta) = 0, \quad u|_{\xi=-\infty} = 0, \quad u|_{\xi=\infty} = 1, \qquad (11)$$

в котором η выступает как параметр. Вблизи $\eta = 0$, $(\tau = 0,\ \theta_0 = T)$, где уравнение (10) предполагает задание произвольного начального условия, нельзя ожидать близости к решению (11), так же, как и вблизи $\eta = T$, когда величиной $\varphi(T - \eta)$ нельзя пренебрегать. Это обстоятельство оправдывает для решения (11) термин "промежуточная асимптотика" [1-3].

Искомая скорость ω в задаче (11) зависит от параметра η, в конечном счете, от времени τ. Надо сказать, что и при искусственном обращении в нуль источниковой функции скорость ω хотя и постоянна во времени, но зависит от способа обращения в нуль. Важно, что эта зависимость где-то слабая, так же, как и зависимость от τ в задаче (11). При этом подход с помощью задач (10)-(11) базируется на точных математических формулировках и имеет определенные преимущества.

Мы уже подчеркивали, что независимо от параметра η в задаче (11) имеет место

$$\varphi_1(0, T - \eta) = \varphi_1(1, T - \eta) = 0.$$

Это условие необходимо для разрешимости (11) при каждом фиксированном η, $0 < \eta < T$, но может не быть достаточным. Совсем нетрудно проверить, что задача (11) оказывается неразрешимой, если $\varphi_1(u, T - \eta) < 0$ в окрестности $u = 0$. Для функции (2) такая ситуация возникает при $n > 1$, где согласно (5) $\varphi_1 < 0$ в окрестности $v = 0$. Излагаемая конструкция промежуточной асимптотики оказывается справедливой при $n \leqslant 1$. Тогда $\varphi_1 > 0$ и разрешимость (11) имеет место [7], причем для непрерывного спектра скоростей $\omega \geqslant \omega_0(\eta) > 0$. При $n > 1$ нужны другие подходы [4].

Численные расчеты [4] показали, что свойством близости к решению (10) или (8) обладает решение (11), отвечающее наименьшей скорости $\omega_0(\eta)$. Задача состоит в строгом обосновании этого утверждения. Отметим, что при каждом фиксированном η уравнение в вариациях для (11) имеет нулевое собственное значение с собственной функцией $w = u_{\xi}$. Это обстоятельство, по-видимому, делает задачу обоснования непростой.

3. О наименьшей скорости волновых решений

Будем рассматривать уравнение (11) при фиксированном η. В дальнейшем существенно поведение φ_1 вблизи $u = 1$, отвечающей, как было сказано, температуре непрореагировавшего вещества перед фронтом пламени. Поэтому удобно положить $t = 1 - u$ и иметь дело с окрестностью $t = 0$. Желая при этом сохранить решение монотонно возрастающим, положим $\xi = -\zeta$. Итак, имеем

$$t_{\zeta\zeta} - \omega t_\zeta + f(t) = 0, \quad t|_{\zeta=-\infty} = 0, \quad t|_{\zeta=\infty} = 1, \tag{12}$$

где $f(t) = \varphi_1(1 - t, \theta_0)$ (см. (5)).

В работе [5] задача (12) подробно исследовалась в предположении

$$f(0) = f(1) = 0, \quad f(t) > 0, \quad 0 < t < 1, \tag{13}$$

$$f(t) \leqslant f'(0)t, \quad 0 < t < 1. \tag{14}$$

В действительности, в [5] вместо (14) использовалось более жесткое ограничение $f'(t) \leqslant f'(0)$ при $0 < t < 1$, однако результаты [5] о существовании решения задачи (12) для полубесконечного спектра скоростей $\omega \geqslant \omega_0 > 0$ и формула

$$\omega_0 = 2\sqrt{f'(0)} = \omega_{\text{КПП}} \tag{15}$$

для нижней границы спектра справедливы при выполнении (14). Для функции $f(t) = \varphi_1(1 - t, \theta_0)$, определенной формулами (5), (2) при $n \leqslant 1$ условия (13) выполнены и, как было показано в [7], полубесконечный интервал скоростей $\omega > \omega_0$ при этом сохраняется, но неравенство (14) нарушается и формула (15) для нижней границы интервала скоростей, вообще говоря, не сохраняется. Тем не менее в работе [4] было отмечено, что формула (15) может иметь место даже при сильном нарушении (14). В связи с этим и возникает вопрос о расширении класса КПП-уравнений (уравнений (12) с функцией $f(t)$, подчиняющейся (13), (14)), для которого формула (15) оставалась бы справедливой.

Решение $t(\zeta)$ задачи (12) при выполнении (13) монотонно возрастает [7], так что $q(t) = t_\zeta(\zeta)$ является положительным решением уравнения

$$\frac{dq}{dt} = \omega - f(t)q^{-1}, \quad q(0) = q(1) = 0. \tag{16}$$

Ввиду $\omega q > 0$ из (16) вытекает неравенство

$$q(t) < (2\int_t^1 f(\tau)d\tau)^{1/2} \equiv F(t). \tag{17}$$

Почленное интегрирование (16) с учетом (17) дает

$$\omega = \int_0^1 \frac{f(t)}{q(t)}dt > \int_0^1 \frac{f(t)}{F(t)}dt = \int_0^1 d(-F(t)) = (2\int_0^1 f(\tau)d\tau)^{1/2}.$$

Таким образом, для разрешимости задачи (12) при выполнении (13) необходимо условие

$$\omega \geqslant (2\int_0^1 f(t)dt)^{1/2} = \omega_{\text{ЗФК}}. \qquad (18)$$

В теории горения [3] правая часть (18) представляет собой известную приближенную формулу Зельдовича – Франк-Каменецкого для скорости горения. Неравенство (18) справедливо и для нижней границы ω_0 спектра скоростей. Следовательно, при условии (13) для выполнения (15) необходимо неравенство

$$f'(0) \geqslant \frac{1}{2}\int_0^1 f(t)dt \qquad (\omega_{\text{КПП}} \geqslant \omega_{\text{ЗФК}}). \qquad (19)$$

Условие (14), достаточное для выполнения (15), обеспечивает неравенство

$$f'(0) \geqslant 2\int_0^1 f(t)dt \qquad (\omega_{\text{КПП}} \geqslant 2\omega_{\text{ЗФК}}). \qquad (20)$$

Здесь мы приведем одно расширение класса КПП-уравнений или класса функций $f(t)$, подчиняющихся ограничениям (13), (14), и докажем следующий предварительный результат в этом классе:

для выполнения формулы (15) необходимо, чтобы

$$f'(0) \geqslant \int_0^1 f(t)dt \qquad (\omega_{\text{КПП}} \geqslant \sqrt{2}\omega_{\text{ЗФК}}). \qquad (21)$$

Начнем со следующего вспомогательного предложения.

Лемма. *Пусть $f(t)$ положительная при $0 < t < t_*$ функция, непрерывная вместе с производной $f'(t)$ в окрестности $t = 0$, и $f(0) = 0$, $f'(0) > 0$. Пусть $q(t)$ положительное решение уравнения (16) в области $0 < t < t_*$ с начальным условием $q(0) = 0$ при некотором $\omega \geqslant \omega_{\text{КПП}}$. Пусть, далее,*

$$f(t) \geqslant ct, \quad 0 < t < t_*, \qquad (22)$$

для некоторого $c > 0$, а λ положительный корень уравнения

$$\lambda^2 - \omega\lambda + c = 0. \tag{23}$$

Тогда в интервале $0 < t < t_*$ выполняется неравенство

$$q(t) \leqslant \lambda t. \tag{24}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что из (22) следует неравенство $c \leqslant f'(0)$, так что

$$\omega^2 - 4c \geqslant \omega^2 - 4f'(0) \geqslant \omega^2_{\text{КПП}} - 4f'(0) = 0$$

и уравнение (23) имеет положительный корень λ.

Предположим пока, что выполнено строгое неравенство $c < f'(0)$. Тогда (см. (16), (23))

$$\lambda > q'(0) = \frac{\omega}{2}(1 + \sqrt{1 - 4f'(0)\omega^{-2}}). \tag{25}$$

Функция $q_*(t) = \lambda t$ удовлетворяет уравнению

$$q_*' = \omega - ctq_*^{-1}. \tag{26}$$

Для разности $q - q_*$ из (16) и (26) с учетом (22) имеем

$$(q - q_*)' = -\frac{f(t) - ct}{q} + ct\left(\frac{1}{q_*} - \frac{1}{q}\right) \leqslant \frac{c}{\lambda q}(q - q_*).$$

Решая дифференциальное неравенство в области $\varepsilon < t < t_*$ $(\varepsilon > 0)$, находим

$$q(t) - \lambda t \leqslant (q(\varepsilon) - \lambda\varepsilon)\exp\left(\frac{c}{\lambda}\int_\varepsilon^t \frac{ds}{q(s)}\right).$$

В силу (25) при достаточно малых ε имеем $q(\varepsilon) < \lambda\varepsilon$, тем самым (24) доказано.

От предположения $c < f'(0)$ легко избавиться с помощью возрастающей последовательности $c_n \to f'(0)$ и соответствующей последовательности $\lambda_n \to \lambda$. При $\omega = \omega_{\text{КПП}}$, $c = f'(0)$ неравенство (24) выполняется для $\lambda = \sqrt{f'(0)}$.

Опираясь на лемму, можно установить следующее.

Теорема. *В классе функций $f(t)$, подчиняющихся условиям (13) и неравенствам*

$$f(t) \geqslant f'(0)t, \quad 0 < t < t_*, \tag{27}$$

$$f(t) \leqslant f'(0)t, \quad t_* \leqslant t \leqslant 1, \tag{28}$$

для некоторого t_*, $0 \leqslant t_* \leqslant 1$, при выполнении формулы (15) для нижней границы ω_0 интервала скоростей в задаче (12) справедливо неравенство (21).

Доказательство. При $t_* = 0$ условие (27) отпадает, а (28) сводится к (14). В этом случае выполняется (20) и тем более (21). Так что достаточно считать $t_* > 0$. Из (16) имеем

$$\omega \int_0^{t_*} q dt = \int_0^{t_*} f dt + \frac{q^2(t_*)}{2}. \tag{29}$$

Условие (27) позволяет воспользоваться неравенством (24) при $c = f'(0)$. При $\omega = \omega_{\text{КПП}}$ имеем $q \leqslant \sqrt{f'(0)}t$ при $0 < t < t_*$. Поэтому из (29) следует

$$f'(0) \geqslant \frac{1}{t_*^2} \int_0^{t_*} f dt + \frac{q^2(t_*)}{2} \geqslant \frac{1}{t_*^2} \int_0^{t_*} f dt. \tag{30}$$

Если $t_* = 1$, то (21) установлено. Пусть $t_* < 1$. Рассмотрим функцию

$$\psi(s) = \frac{1}{s^2} \int_0^s f(t) dt. \tag{31}$$

Согласно (30) имеем $f'(0) \geqslant \psi(t_*)$. Покажем, что $\psi(s) \leqslant \psi(t_*)$ при $s > t_*$. Запишем тождество

$$\psi(s) = \psi(t_*) + \frac{1}{s^2} \int_{t_*}^s f ds - \left(1 - \frac{t_*^2}{s^2}\right) \psi(t_*). \tag{32}$$

В силу (27), (28) имеем

$$\psi(t_*) \geqslant \frac{1}{2} f'(0), \quad \int_{t_*}^s f ds \leqslant f'(0) \frac{s^2 - t_*^2}{2}, \quad (s > t_*).$$

Поэтому из (32) при $t_* < s$ следует

$$\psi(s) \leqslant \psi(t_*) + \frac{s^2 - t_*^2}{s^2} \left(\frac{f'(0)}{2} - \psi(t_*)\right) \leqslant \psi(t_*) \leqslant f'(0).$$

При $s = 1$ имеем (21).

Условия теоремы, конечно расширяют класс КПП-уравнений, но утверждение теоремы констатирует лишь необходимость неравенства (21) для выполнения (15). Несомненно интересно, и в этом состоит проблема Зельдовича, описать класс функций $f(t)$, более широкий, чем класс КПП, и достаточный для выполнения (15).

Пример, приведенный в [4], показывает, что в классе функций (13), (27), (28) неравенство (21) близко к достаточному условию выполнения (15), что во всем этом классе утверждение теоремы не может быть улучшено. Об этом же говорит следующий простой пример.

Пример. Функция $f(t) = \alpha t + \beta t^n$ для $t < 1$, $f(1) = 0$ $(n > 1$, $\alpha > 0$, $\beta > 0)$ удовлетворяет (13), (27), (28) при $t_* = 1$. Для нее неравенство (14) не выполнено ни при каком $t \in (0,1)$. Тем не менее, задача (12) разрешима и формула (15) имеет место при $\beta \leqslant \alpha$. Неравенство (21) сводится в этом случае к $\beta \leqslant \dfrac{n+1}{2}\alpha$.

Литература

1. **Баренблатт Г.И., Зельдович Я.Б.** Промежуточные асимптотики в математической физике//*Успехи математических наук.* 1971. Т.26. Вып. 2. С. 115–129.

2. **Баренблатт Г.И.** Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Л.: Гидрометеоиздат, 1978.

3. **Зельдович Я.Б., Баренблатт Г.И., Либрович В.Б., Махвиладзе Г.М.** Математическая теория горения и взрыва. М.:Наука, 1980.

4. **Aldushin A.P., Khudyaev S.I., Zel'dovich Ja.B.** Flame propagation in the reacting gaseous mixture//*Archivum Combustionis.* 1981. V.1.№1/2. P. 9–21.

5. **Колмогоров А.Н., Петровский И.Г., Пискунов Н.С.** Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологической проблеме//it Бюлл. МГУ. Секц. А. 1937. №16. С.1.

6. **Khudyaev S.I.** The Zel'dovich problem for KPP equations (Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov equations)//*Proceedings of the Zel'dovich Memorial. Internat. Conference on Combustion.* V.2. Moscow,1994. P. 451–455.

7. **Ваганов Д.А., Худяев С.И.** Об одной стационарной задаче теории горения//*Физика горения и взрыва.* 1969. №2. С.167–172.

Summary

Khudyaev S.I. To mathematical theory of flame propagation

The mathematical formulation of the problem of intermediate asymptotics in the theory of flame propagation and some preliminary results in the problem of Zel'dovich for KPP-equations (equations of Kolmogorov-Petrovskii-Piscunov) are given.

Сыктывкарский университет *Поступила 8.02.95*