Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1.Вып.1.1995

УДК 539.371

Минимальные формы потери устойчивости стержня на границе жесткой и упругой сред

А.А.Холопов

Решается задача о потере устойчивости при продольном сжатии шарнирно-закрепленного стержня, расположенного на границе двух сред —абсолютно-жесткой и упругой. Выводятся формулы для наименьшей критической силы и соответствующих ей форм изгиба стержня.

1. Постановка задачи

Пусть $w(\tilde{x}), 0 \leq \tilde{x} \leq L$ - прóгиб в плоскости $(\tilde{x}, w)$ шарнирно-закрепленного стержня длины L с жесткостью на изгиб D, при продольном сжатии силой F. Предполагается, что стержень находится на границе двух сред: абсолютно-жесткой при $w < 0$ и упругой, с коэффициентом упругости K, при $w > 0$.

При некоторых F наряду с прямолинейной формой равновесия появляются другие формы равновесия, которые в дальнейшем будем называть *формами потери устойчивости.* В отдельных точках $\tilde{a}_i, 0 < \tilde{a}_i < L$, $i = 1, ..., s$, являющихся изолированными точками касания жесткого основания или граничными точками зон прилегания к основанию, стержень испытывает действие сил реакции $\tilde{R}_i$, $\tilde{R}_i \geq 0$.

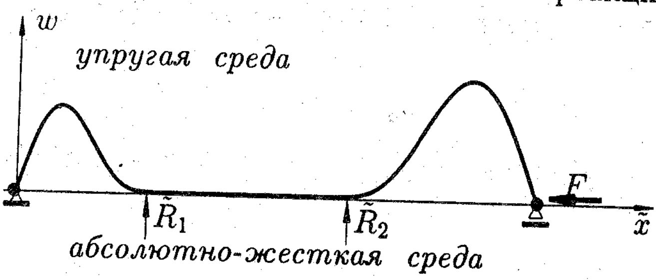

рис.1

Для нахождения возможных форм потери устойчивости ниже ограничимся линейной теорией изгиба стержня, в которой обобщенное уравнение для $w(\tilde{x})$ принимает вид

$$D\,w^{(4)}(\tilde{x}) + F\,w''(\tilde{x}) + K\,w(\tilde{x}) = \sum_{i=1}^{s} \tilde{R}_i\,\delta(\tilde{x} - \tilde{a}_i),$$

где δ – обобщенная "дельта-функция". Условие абсолютной жесткости среды при $w < 0$ дает ограничение: $w(\tilde{x}) \geq 0$ для всех $\tilde{x}$. Граничные условия шарнирного закрепления стержня имеют вид

$$w(0) = w''(0) = w(L) = w''(L) = 0.$$

Сделаем замену переменных $x = \pi\tilde{x}/L$, $y(x) \equiv w(\tilde{x})$. Тогда для $y(x)$ в интервале $[0, \pi]$ получим нелинейную краевую задачу

$$y^{(4)}(x) \ + \ 2P\,y''(x) + k^2\,y(x) = \sum_{i=1}^{s} R_i\,\delta(x - a_i), \tag{1}$$

$$y(x) \geq 0 \quad \text{для всех } \ x, \tag{2}$$

$$y(0) = y''(0) = y(\pi) = y''(\pi) = 0, \tag{3}$$

где использованы обозначения:

$$P = \frac{F\,L^2}{2D\,\pi^2}, \quad k^2 = \frac{K\,L^4}{D\,\pi^4}, \quad R_i = \frac{L^5}{D\,\pi^5}\,\tilde{R}_i\,. \tag{4}$$

Задача о минимальной критической силе формулируется следующим образом:

> Найти P^* — наименьшее значение P, при котором краевая задача (1),(3) при выполнении условия (2) имеет ненулевое решение (обозначаемое через y^*).

Значение P^* будем называть *минимальной критической силой*, функцию $y^*(x)$ —*минимальной формой.*

Сила P^* и минимальная форма $y^*(x)$ зависят от параметра упругости k. Требуется получить формулы для функций этой зависимости. Аналогичная задача при отсутствии условия (2) является классической и имеет решение в гармониках [1, с.150]:

$$y^*(x) \ = \ C\,\sin nx, \quad P^* = \frac{1+n^2}{2}, \quad \text{где} \quad n \in \mathrm{N}, \ n \sim \sqrt{k}.$$

2. Простые формы, их классификация

Рассматривая решение (1)–(3) на отдельных интервалах(a_i, a_{i+1}) при $i = 0, ..., s$, где $a_0 = 0$, $a_{s+1} = \pi$, за исключением зон прилегания, получим ряд однородных краевых задач:

$$y^{(4)}(x) + 2P\,y''(x) + k^2\,y(x) = 0, \tag{5}$$

$$y(x) > 0 \ \text{ при } \ a_i < x < a_{i+1}, \tag{6}$$

$$\text{граничные условия в точках } a_i, a_{i+1}. \tag{7}$$

Конкретный вид (7) определяется из условий непрерывности в точках a_i функции $y(x)$ и ее производных. Из правой части (1) видно, что непрерывными должны быть y, y', y''. Решения задач вида (5)–(7) будем называть *простыми формами*. Сделаем ряд замечаний, упрощающих их классификацию:

1. Граничное условие $y'(a_i) \neq 0$ возможно только при $i = 0$ или при $i = s + 1$, то есть для самой левой или для самой правой простых форм в составе сложной формы, в дальнейшем будем называть их *крайними формами*.
2. Для крайних форм обязательны условия шарнирного опирания: для левой — при $x = 0$, для правой — при $x = \pi$.
3. Из-за инвариантности (5) относительно преобразования $x \to -x$ можно не различать взаимно-симметричные формы, получаемые взаимной заменой условий в точках a_i и a_{i+1} .
4. Условие $y''(a_i + 0) \neq 0$ (очевидно, при этом $y''(a_i + 0) > 0$), выполняется только для изолированной точки касания, поэтому простая форма не может быть крайней левой, соответственно при $y''(a_{i+1}) \neq 0$ не может быть крайней правой.
5. Из-за инвариантности уравнения (5) к сдвигу $x \to x + h$ при анализе простой формы можно считать $a_i = 0$, $a_{i+1} = l$, где

$$0 < l \leq \pi. \tag{8}$$

С учетом этих замечаний различаются лишь простые формы, приведенные в таблице 1.

Простые формы ТАБЛИЦА 1

Форма	Граничные условия	Вид	Положение
α	$y(0) = y''(0) = 0, y'(0) > 0$ $y(l) = y''(l) = 0, y'(l) < 0$		Крайняя форма
β	$y(0) = y''(0) = 0, y'(0) > 0$ $y(l) = y'(l) = 0, y''(l) > 0$		Крайняя форма
γ	$y(0) = y''(0) = 0, y'(0) > 0$ $y(l) = y'(l) = y''(l) = 0$		Крайняя форма
δ	$y(0) = y'(0) = 0, y''(0) > 0$ $y(l) = y'(l) = 0, y''(l) > 0$		Не крайняя форма
ε	$y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$ $y(l) = y'(l) = 0, y''(l) > 0$		Произвольное положение
ζ	$y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$ $y(l) = y'(l) = y''(l) = 0$		Произвольное положение

Ниже (см. утверждение 3) показано, что граничные условия для ε противоречивы, то есть простая форма ε *не существует.*

Пусть φ – произвольная простая форма. При фиксированном значении k решение (5) – (7) существует при определенных значениях силы P и длины l. Обозначим их через $P_\varphi = P_\varphi(k)$, $l_\varphi = l_\varphi(k)$. Условие $l_\varphi \leq \pi$ определяет область для параметра k, вне которой форма φ невозможна. Для каждой простой формы φ в свою очередь может быть поставлена задача о *минимальной (первой) критической силе* P_{φ^*}, как о наименьшем P, при котором (5)–(7) имеет решение. Это решение обозначим через y^*_φ , и назовем *минимальной простой формой.* Для краткости будем писать $\varphi^* \sim y^*_\varphi(x)$.

3. Допустимые цепочки простых форм

Пусть $y(x)$– решение (1)–(3), состоящее на последовательных интервалах из простых форм $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$, не считая зон прилегания. Набор $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \sim y$ назовем *допустимой цепочкой.* Подчеркнем, что допустимость цепочки зависит от k. В допустимой цепочке выполняются условия согласованности граничных условий: для крайних — с (3), для соседних — между собой. Например, среди $(\varphi_2, \cdots, \varphi_{n-1})$ не могут быть α, β, γ, формы δ, ζ не могут быть соседними и т.д. Ограничившись пока условиями равенства или неравенства y'' нулю в граничных точках, можно составить список *формально допустимых* цепочек (см. табл. 2).

Формально допустимые цепочки Таблица 2

	Цепочка	Возможное наличие зон прилегания
1	(α)	нет
2	(β,β)	нет
3	$(\beta,\delta,\ldots,\delta,\beta)$	нет
4	(γ)	одна зона (крайняя)
5	(γ,γ)	одна зона в середине
6	$(\gamma,\zeta,\ldots,\zeta)$	несколько в середине и одна с краю
7	$(\gamma,\zeta,\ldots,\zeta,\gamma)$	несколько зон в середине
8	$(\zeta,\ldots,\zeta)$	несколько в середине и две с краю

Здесь учтена невозможность формы ε. Для того чтобы указанные цепочки были действительно допустимыми, необходимо выполнение непрерывности $y''(x)$ и условий $R_i \geq 0$ в (1), а также согласованность длин l_φ, параметров P_φ.

Теорема 1. *Цепочка* $(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$ *является допустимой тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

$$P_{\varphi_1}(k) = \ldots = P_{\varphi_n}(k) = P; \tag{9}$$

$$l_{\varphi_1}(k) + \ldots + l_{\varphi_n}(k) \leq \pi; \tag{10}$$

$$l_{\varphi_1}(k) + \ldots + l_{\varphi_n}(k) = \pi \text{ для цепочек 1–3;} \tag{11}$$

$$y''_{\varphi_i}(a_{i+1}-0) = y''_{\varphi_{i+1}}(a_{i+1}+0); \tag{12}$$

$$y'''_{\varphi_{i+1}}(a_{i+1}+0) - y'''_{\varphi_i}(a_{i+1}-0) \geq 0. \tag{13}$$

Доказательство. *Необходимость.* Равенства (9) выражают тот факт, что параметр силы P является константой в (1) и поэтому общим параметром для всех простых форм цепочки. Формулы (10)–(11) показывают возможность или невозможность зон прилегания для данной цепочки. Равенство (12) следуют из непрерывности $y''(x)$. Формула (13) следует из неотрицательности R_i, так как численно $R_i = y'''_{\varphi_{i+1}}(a_{i+1}+0) - y'''_{\varphi_i}(a_{i+1}-0)$ (см. формулы обобщенного дифференцирования кусочно-дифференцируемых функций [2,с.114]).

Достаточность. Пусть $(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$ одна из цепочек вида 1–8 табл. 2 и пусть условия (9)–(13) выполнены. Добавим к формам φ_i зону прилегания длины $\pi - l_{\varphi_1} - \ldots - l_{\varphi_n}$ в произвольном месте, допустимом для цепочки по табл. 2. Составим функцию $y(x)$

на $[0,\pi]$ склейкой отдельных решений: $y(x) = y_{\varphi_i}(x-a_i)$ при $x \in (a_i, a_{i+1})$, $a_{i+1} = a_i + l_{\varphi_i}$, $a_i = 0$ и $y \equiv 0$ в зоне прилегания. В силу условий (6) справедливо (2). Условия шарнирного опирания выполнены, так как они выполняются для крайних форм цепочки (и для $y \equiv 0$). Уравнение (1) является обобщенным, но оно эквивалентно уравнениям (5) в интервалах (a_i, a_{i+1}) с одним и тем же P, дополненными условием непрерывности $y(x)$, $y'(x)$, $y''(x)$ и равенствами $R_i = y'''_{\varphi_{i+1}}(a_{i+1}+0) - y'''_{\varphi_i}(a_{i+1}-0)$ (см.[2]). Непрерывность $y(x), y'(x), y''(x)$ следует из (12) и равенств $y(a) = y'(a) = 0$ во внутренних граничных точках. Наконец, условие (13) позволяет трактовать R_i как силы (реакции основания). *Теорема доказана.*

В дальнейшем простые формы φ, составляющие допустимую цепочку при некотором значении k, будем называть *допустимыми простыми формами* (при данном k).

Следствие. *Если для двух простых форм φ и ψ при некотором k выполнено $P_\varphi(k) < P_\psi(k)$, то φ и ψ не могут быть одновременно допустимыми при этом k.*

Пусть теперь y^*– минимальная форма (1)–(3), P^*– соответствующая ей минимальная сила. Пусть $y^* \sim (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$. Составляющие y^* простые формы могут быть неминимальными, так как φ_i^* может быть недопустимой. С помощью следствия из теоремы 1 можно "отбрасывать" некоторые цепочки из таблицы 2. Кроме того, учитывая, что по (9) P^* должно совпадать с критическими силами простых крайних форм φ_1, φ_n, получаем следующее

Утверждение 1. *Если крайняя форма φ^* допустима, а для другой крайней минимальной формы ψ^* выполнено*

$$P_{\varphi^*}(k) < P_{\psi^*}(k)\,, \tag{14}$$

то ψ не входит в минимальную форму y^* при этом k.

Итак, поиск минимальной формы $y^*(x)$ и минимальной критической силы P^* можно проводить по следующей схеме:

1. Для некоторой крайней формы φ найти φ^* и P_{φ^*}.
2. Найти область D_{φ^*} параметров k, при которых φ^* допустима.
3. Если для всех других крайних форм ψ выполнено условие (14) в области D_{φ^*}, то минимальная форма y^* не содержит ψ, а состоит из допустимых цепочек с φ^*. Тогда следует исследовать возможность выполнения (9)–(13) для всех простых форм этих цепочек.

4. Если для некоторой крайней формы ψ выполнено противоположное к (14) неравенство, то повторить исследование, взяв вместо φ форму ψ.

Эта схема позволяет не находить все минимальные критические силы P_{φ^*}, а проверять лишь выполнение (14).

4. Оценка снизу критических сил

Утверждение 2. *Для всех простых форм при $k \neq 1$ выполнено неравенство*

$$P > k. \tag{15}$$

Равенство $P = k\,(=1)$ возможно только для формы α. При этом

$$y(x) = C\sin x\ ,\ C > 0. \tag{16}$$

Доказательство. Дифференциальный оператор L уравнения (5) представим в виде

$$\mathrm{L} = \frac{d^4}{dx^4} + 2P\,\frac{d^2}{dx^2} + k^2 = (\frac{d^2}{dx^2} + P)^2 + k^2 - P^2.$$

В пространстве $H = L^2(0,l)$ краевая задача (5),(7) является самосопряженной, так как оператор L содержит производные четного порядка, а для граничных условий (7) для всех простых форм выполнены условия $y(a)y'''(a) = 0\,,\ y'(a)y''(a) = 0\,.$

Нетрудно убедиться, что

$$(\mathrm{L}y,\, y)_H\ =\ \left\|\frac{d^2y}{dx^2} + Py\right\|_H^2 + (k^2 - P^2)\|y\|_H^2.$$

Левая часть равна нулю согласно (5), а правая положительна при $P < k$, поэтому выполнено $P \geq k$. Пусть $P\ =\ k$. Тогда $\frac{d^2y}{dx^2} + ky = 0.$ В (7) входят граничные условия $y(a_i) = 0$, поэтому $y(x) = C\sin\sqrt{k}x$, где $\sqrt{k} = n$, $n \in$ N. Знакопостоянность $y(x)$ выполняется лишь при $n\ =\ 1$, то есть при $k = 1$. Полученное решение является формой α. Итак, равенство $P\ =\ k$ возможно только для формы α при $k\ =\ 1$, при этом $y(x) = C\,\sin\,x$. *Утверждение доказано.*

В дальнейшем будем считать (15) выполненным. Обозначим

$$\lambda_1 = \sqrt{P - \sqrt{P^2 - k^2}},\quad \lambda_2 = \sqrt{P + \sqrt{P^2 - k^2}},\ 0 < \lambda_1 < \lambda_2\,. \tag{17}$$

Из (17) следуют равенства

$$\lambda_1 \lambda_2 = k\,, \tag{18}$$

$$\frac{\lambda_1^2+\lambda_2^2}{2} = \frac{\lambda_1^2+\lambda_2^2}{2\lambda_1\lambda_2}\,k = P. \tag{19}$$

Характеристическое уравнение для (5) имеет корни $\pm i\lambda_1, \pm i\lambda_2$, то есть общее решение (5) можно записать в виде

$$y(x) = C_1 \sin \lambda_1 x + C_2 \sin \lambda_2 x + C_3 \cos \lambda_1 x + C_4 \cos \lambda_2 x\,. \tag{20}$$

Для всех форм, кроме формы δ, выполнены граничные условия $y(0) = y''(0) = 0$, поэтому $C_3 + C_4 = C_3\lambda_1^2 + C_4\lambda_2^2 = 0$. Так как $\lambda_2^2 > \lambda_1^2$, то $C_3 = C_4 = 0$. Итак, для всех простых форм, кроме δ, имеет место:

$$y(x) = C_1 \sin \lambda_1 x + C_2 \sin \lambda_2 x. \tag{21}$$

Утверждение 3. *Простая форма ε не существует.*

Доказательство. Из $y'(0) = 0$ получаем $C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2 = 0$ или

$$y(x) = \frac{C_1}{\lambda_2}\left[\lambda_2 \sin \lambda_1 x - \lambda_1 \sin \lambda_2 x\right]. \tag{22}$$

Условия $y(l) = y'(l) = 0$ дают равенства $\lambda_2 \sin\lambda_1 l = \lambda_1 \sin \lambda_2 l$, $\cos\lambda_1 l = \cos\lambda_2 l$, которые из-за $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ возможны лишь при $\sin\lambda_1 l = \sin\lambda_2 l = 0$. Тогда $y''(l) = C_1[\lambda_1\lambda_2 \sin\lambda_2 l - \lambda_1^2 \sin\lambda_1 l] = 0$, что противоречит определению простой формы ε (см. табл.1). *Утверждение доказано.*

5. Нахождение минимальной силы для формы α

Пусть P, $y(x)$ удовлетворяют (5)–(7) с граничными условиями для формы α. Формула (21) справедлива. Условия $y(\pi) = y''(\pi) = 0$ являются вырожденной линейной системой для C_1, C_2, поэтому

$$det \equiv (\lambda_2^2 - \lambda_1^2) \sin \lambda_1\pi \cdot \sin \lambda_2\pi = 0.$$

Рассмотрим три случая.

1. Пусть $\sin\lambda_1\pi = 0$, $\sin\lambda_2\pi \neq 0$. Тогда $\lambda_1 = m \in \mathbb{N}, \lambda_2 \notin \mathbb{N}$. Условие $y(\pi) = C_2 \sin\lambda_2\pi = 0$ дает равенство $C_2 = 0$, то есть $y(x) = C_1 \sin mx$. Положительность $y(x)$ возможна при $C_1 > 0$

и при $m = 1$. Из (18) получаем $k = \lambda_1\lambda_2 = \lambda_2 > \lambda_1 = 1$, а из формулы (19) утверждение

$$P_\alpha = \frac{1+k^2}{2}, \quad y_\alpha(x) = C_1 \sin x\,, \quad \text{при } k > 1\,, \quad k \notin \mathbb{N}. \tag{23}$$

2. Пусть $\sin \lambda_2\pi = 0$, $\sin \lambda_1\pi \neq 0$. Аналогично получаем

$$P_\alpha = \frac{1+k^2}{2}, \quad y_\alpha(x) = C_2 \sin x\,, \quad \text{при } k < 1. \tag{24}$$

3. Пусть $\sin \lambda_1\pi = \sin \lambda_2\pi = 0$. Тогда $\lambda_1 = m \in \mathbb{N}$, $\lambda_2 = n \in \mathbb{N}$,

$$y(x) = C_1 \sin mx + C_2 \sin nx. \tag{25}$$

Теперь $C_1 \neq 0$, иначе получили бы из (6) равенство $n = 1$, что невозможно. Покажем, что $m = 1$. Докажем более общее утверждение, используемое в дальнейшем.

Лемма 1. *Пусть числа A, B удовлетворяют ограничениям*

$$B > 2\pi, \quad A \geq \frac{3\pi}{2}, \quad B > A. \tag{26}$$

Тогда в интервале $(0, l)$ функция

$$y(x) = C_1 \sin \frac{Ax}{l} + C_2 \sin \frac{Bx}{l}, \; C_1 \neq 0 \tag{27}$$

имеет хотя бы один корень.

Доказательство. Рассмотрим значения (27) в точках

$$x_s = s\,\frac{\pi l}{B}, \; s = 1, \ldots, \left[\frac{B}{\pi}\right],$$

которые все находятся в полуинтервале $(0, l]$. Имеем равенство

$$y(x_s) = C_1 \sin\left(s\frac{A}{B}\pi\right) + C_2 \sin s\pi = C_1 \sin s\Delta\,,$$

где $\Delta \overset{df}{=} (A/B)\pi \in (0, \pi)$. Покажем, что $y(x_1)\,y(x_{s_0}) < 0$ при некотором s_0, что по непрерывности доказывает лемму. Так как $[B/\pi]\,\Delta = \frac{[B/\pi]}{B/\pi} A \geq \frac{2}{3} A \geq \pi$ по условию, то существует наименьший номер s_0 такой, что $s_0\Delta \in [\pi, 2\pi)$ и $x_{s_0} < l$. Последнее неравенство очевидно для $B \not\equiv 0 \pmod \pi$, а для $B = n\pi$ справедливо $(n-1)\Delta \geq \pi$, поэтому $s_0 \leq n-1$ и $x_{s_0} < l$. Тогда $y(x_1)\,y(x_{s_0}) = C_1^2 \sin \Delta \sin s_0\Delta < 0$. *Лемма доказана.*

Если теперь в (25) $m > 1$, то при $A = m\pi$, $B = n\pi$ выполнены все условия леммы 1 (напомним, что в нашем случае $l = \pi$). Но утверждение леммы 1 противоречит (6), поэтому $m = 1$ и из (25) получаем

$$y(x) = C_1 \sin x + C_2 \sin nx\,, \quad \text{где } C_1 > 0, \tag{28}$$

при

$$k = n > 1\,, \quad P = \frac{1+n^2}{2} = \frac{1+k^2}{2}.$$

Случай $C_2 = 0$ дополняет (23) натуральными значениями k. Ниже показывается, что при $k > 2$ форма γ^* допустима и дает меньшее значение критической силы (см. утвержд. 5), чем α, поэтому по утверждению 1 простая форма (28) не входит в минимальную форму y^*. При $n = 2$ необходимым и достаточным условием (6) является неравенство $C_1 > |\,2C_2\,|$, так как тогда для $x \in (0, \pi)$

$$y(x) = C_1 \sin x + C_2 \sin 2x = \sin x\,(C_1 + 2\,C_2 \cos x) > 0\,.$$

Случаи $C_1 = \pm 2C_2$ исключены, потому что они противоречат граничным условиям $y'(0) > 0$, $y'(\pi) < 0$.

Объединяя результаты трех случаев (16), (23), (24), получаем

Утверждение 4.

1. $P_{\alpha^*}(k) = \dfrac{1+k^2}{2}$ *при всех* k. (29)

2. $\alpha_1^* \sim C \sin x$ *при всех* k.

3. При $k = n > 1$, $n \in \mathbb{N}$, *возможно также решение*

$$\alpha_2^* \sim C_1 \sin x + C_2 \sin nx,$$

где $C_1 > 0$, C_2 *таковы, что выполнено (6).*
В частности, при $n = 2$ *выполнено* $C_2 \in (-C_1/2, C_1/2)$.

6. Нахождение минимальной силы для формы γ

Граничные условия при $x = 0$ для формы γ, как уже отмечалось, приводят к (21). Условия же $y(l) = y''(l) = 0$, как и для формы α, дают равенство $\sin \lambda_1 l \cdot \sin \lambda_2 l = 0$.

Пусть $\sin \lambda_1 l = 0$. Тогда $y(l) = C_2 \sin \lambda_2 l = 0$. Если $\sin \lambda_2 l \neq 0$, то $C_2 = 0$ и $y(x) = C_1 \sin \lambda_1 x$. Тогда $y'(l) = C_1 \lambda_1 \cos \lambda_1 l \neq 0$, что противоречит определению γ. Поэтому $\sin \lambda_2 l = 0$. Аналогично, из $\sin \lambda_2 l = 0$ следует $\sin \lambda_1 l = 0$. Получаем

$$\lambda_1 = \frac{m\pi}{l},\ \lambda_2 = \frac{n\pi}{l}, \quad n > m\,, \quad n, m \in \mathbb{N},$$

$$y(x) = C_1 \sin \frac{m\pi x}{l} + C_2 \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad \text{где} \quad C_1, C_2 \neq 0 . \tag{30}$$

Должно быть выполнено равенство $m = 1$, иначе по лемме 1 при $A = m\pi > 3\pi/2$, $B = n\pi > 2\pi$ функция (30) не удовлетворяет (6).

Условие $y'(l) = 0$ приводит к равенству $-C_1+C_2(-1)^n = 0$, откуда следует, что

$$y(x) = C_1 \left[\sin \frac{\pi x}{l} + \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{n\pi x}{l}\right], \ C_1 > 0 . \tag{31}$$

Из условия $y'(0) > 0$ следует четность n. Из формулы (18) получаем $k = \lambda_1 \lambda_2 = \frac{n\pi^2}{l^2}$ или

$$l_\gamma(k) = \sqrt{\frac{n}{k}}\pi . \tag{32}$$

Так как $n \geq 2$, и должно выполняться (9), то справедливо неравенство $k \geq 2$. Следовательно, при $k < 2$ форма γ *недопустима.*

Из (19) получаем равенство

$$P_\gamma(k) = \frac{1+n^2}{2n} k , \quad n = 2, 4, \ldots$$

с наименьшим значением при $n = 2$, что дает минимальную форму и силу при $k \geq 2$

$$\gamma^* \sim C \left[\sin 2\frac{\pi x}{l} + \sin \frac{2\pi x}{l}\right], \quad C > 0 , \tag{33}$$

$$P_{\gamma^*}(k) = \frac{5}{4}k , \tag{34}$$

$$l_{\gamma^*}(k) = \sqrt{\frac{2}{k}}\pi \leq \pi. \tag{35}$$

Условие положительности (6) для функции (33) выполняется, так как $\sin 2\frac{\pi x}{l} + \sin \frac{2\pi x}{l} = 2 \sin \frac{\pi}{l} \left[1 + \cos \frac{\pi x}{l}\right] > 0$ при $0 < x < l$.

Утверждение 5.

1. *При $k < 2$ форма γ недопустима.*
2. *При $k \geq 2$ цепочка (γ^*) допустима.*
3. *При $k \geq 8$ цепочка (γ^*, γ^*) допустима.*

4. При $k > 2$ минимальная форма y^* не состоит из (α).

5. При $k = 2$ цепочки (α^*) и (γ^*) равнозначны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1). Первое предложение было получено выше.

2). При $k \geq 2$ дополним форму (γ^*) зоной прилегания на промежутке $[l, \pi]$. Условия (9)–(11) очевидно выполнены. Так как $y''_{\gamma^*}(l-0) = 0$, а справа $y \equiv 0$, то (12) выполнено. Для (33) легко проверяется неравенство $y'''_{\gamma^*}(l-0) \leq 0$, поэтому (13) также выполнено. По теореме 1 цепочка (γ^*) допустима.

3). При $k \geq 8$ из (35) следует неравенство $l_{\gamma^*}(k) \leq \pi/2$, поэтому для цепочки (γ^*, γ^*) условие (10) выполнено, остальное аналогично.

4). При $k > 2$ выполнено неравенство $\dfrac{1+k^2}{2} > \dfrac{5}{4}k$, то есть неравенство для минимальных критических сил форм α^* и γ^*, поэтому по утверждению 1 форма α^* не входит в y^*.

5). В формулах (29) и (34) при $k = 2$ получаем одинаковое значение $P = 5/2$, и обе формы допустимы. *Утверждение доказано.*

Последующие крайние простые формы будем сравнивать с γ^* при $k \geq 2$ и с α^* при $k \leq 2$.

7. Нахождение минимальной силы для формы ζ

Простая форма ζ имеет те же граничные условия, что и γ, за исключением условия $y'(0) > 0$. Поэтому справедлива формула (31) для решения, в которой теперь нужно брать *нечетные* n, так как $y'(0) = 0$. Из формул (8) и (32) следует неравенство $k \geq n \geq 3$, а минимальное значение критической силы достигается при $n = 3$:

$$\zeta^* \sim C\left[3\sin\frac{\pi x}{l} - \sin\frac{3\pi x}{l}\right], \quad C > 0, \tag{36}$$

$$P_{\zeta^*}(k) = \frac{5}{3}k, \tag{37}$$

$$l_{\zeta^*}(k) = \sqrt{\frac{3}{k}}\pi \leq \pi. \tag{38}$$

Утверждение 6.

1. При $k < 3$ форма ζ недопустима.

2. При $k \geq 3$ цепочка $(\zeta^*, \ldots, \zeta^*)$ допустима.

Число составляющих ее простых форм ζ^* равно $\left[\sqrt{k/3}\right]$.

3. Форма ζ не входит в минимальную форму y^*, поэтому *цепочки 6,7,8 таблицы 2 не являются минимальными формами.*

Доказательство. Функция (37) положительна в $(0, l)$, так как

$$3\sin\frac{\pi x}{l} - \sin\frac{3\pi x}{l} = 4\sin^3\frac{\pi x}{l} > 0.$$

Остальное показывается аналогично, как в утверждении 5. Неминимальность цепочек 6, 7, 8 следует из утверждения 1, так как при $k \geq 3$ форма γ^* допустима и имеет меньшее значение силы: $P_{\gamma^*} = \frac{5}{4}k < \frac{5}{3}k = P_{\zeta^*}$. *Утверждение доказано.*

8. Оценка минимальной силы для формы β

Рассмотрим β, последнюю из возможных крайних форм. Из граничных условий $y(0) = y''(0) = 0$ снова получаем (21). Условия $y(l) = y'(l) = 0$ дают равенство

$$det \equiv \lambda_2 \sin\lambda_1 l \cos\lambda_2 l - \lambda_1 \sin\lambda_2 l \cos\lambda_1 l = 0.$$

Запишем это равенство в виде соотношения

$$\frac{tg\, x_1}{x_1} = \frac{tg\, x_2}{x_2}, \quad 0 < x_1 < x_2\,, \tag{39}$$

где введены обозначения (см. рис.2):

$$x_1 = \lambda_1 l\,, \quad x_2 = \lambda_2 l. \tag{40}$$

Равенство $\sin x_1 = 0$ дает из (39) $\sin x_2 = 0$ и наоборот, а в этом случае $y''(l) = 0$, что противоречит определению β, поэтому $x_1, x_2 \neq n\pi\,, n \in \mathbb{N}$.

Исключив C_2 из (21), получим функцию формы β:

$$y(x) = C\left[\sin\frac{x_1 x}{l} - \frac{\sin x_1}{\sin x_2}\cdot\sin\frac{x_2 x}{l}\right]. \tag{41}$$

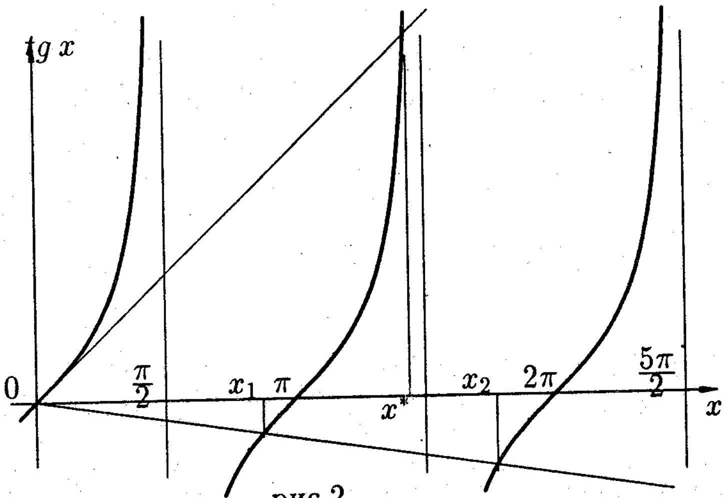

рис.2

Запишем P из (11) через x_1, x_2 в виде

$$P(k) = \frac{\lambda_1^2+\lambda_2^2}{2\lambda_1\lambda_2}k = \frac{x_1^2+x_2^2}{2x_1x_2}k = \frac{(x_2/x_1)^2+1}{2(x_2/x_1)}k. \qquad (42)$$

Так как функция $\frac{t^2+1}{2t}$ возрастает при $t > 1$, то из пар (x_1, x_2) достаточно рассмотреть те, для которых x_2 является *ближайшим справа* корнем (39) при фиксированном x_1.

Лемма 2. *При $k \le \frac{1}{2}$ форма β не входит в y^*.*

Доказательство. Пусть x^* — первый положительный корень уравнения $\frac{tg\,x}{x} = 1$, $x^* > \frac{5\pi}{4}$. Тогда из (42) для $k \le \frac{1}{2}$ верно

$$P_\beta(k) = \frac{x_1^2+x_2^2}{2x_1x_2}k = \frac{x_1^2+x_2^2}{2l^2} \ge \frac{x_2^2}{2\pi^2} \ge \frac{x_*^2}{2\pi^2} > \frac{5}{8} \ge \frac{1+k^2}{2} = P_{\alpha^*}(k).$$

и по утверждению 1 форма β не входит в y^*. *Лемма доказана.*

Лемма 3. *Пусть $x_2 > 2x_1$. Тогда β не входит в y^*.*

Доказательство. Из (42) получаем при $x_2 > 2x_1$

$$P_\beta(k) = \frac{x_1^2+x_2^2}{2x_1x_2}k = \frac{(x_2/x_1)^2+1}{2(x_2/x_1)}k > \frac{5}{4}k.$$

а). Если $k \ge 2$, то форма γ^* допустима и $P_\beta(k)$ в этом случае больше, чем $P_{\gamma^*} = \frac{5}{4}k$, поэтому форма β по утверждению 1 не входит в минимальную форму y^*.

b). Если $\frac{1}{2} < k < 2$, то форма α^* допустима, выполнено $P_\beta(k) > \frac{5}{4}k \geq P_{\alpha^*}(k)$, и по утверждению 1 форма β не входит в минимальную форму y^*.

c). Если $k \leq \frac{1}{2}$, то форма β не входит в минимальную форму y^* по лемме 2. *Лемма доказана.*

Утверждение 7.

1. Форма β не входит в y^*.

2. Цепочки 2, 3 таблицы 2 не минимальны.

Доказательство. Покажем, что форма β или недопустима, или же имеет значение критической силы (42) бо́льшее, чем $P_{\alpha^*}(k)$, $P_{\gamma^*}(k)$ при соответствующих допустимых формах α^*, γ^*. Тогда по утверждению 1 получим требуемое доказательство. Вторая часть утверждения есть следствие первой.

Рассмотрим четыре возможных случая.

1). Пусть $x_1 \leq \frac{\pi}{2}$. Тогда очевидно $\frac{x_2}{x_1} > 2$ (см. рис.2) и по лемме 3 форма β не может входить в минимальную.

2). Пусть $\frac{\pi}{2} < x_1 < \pi$. Тогда $\frac{3\pi}{2} < x_2 < 2\pi$. Покажем, что в этом случае также $\frac{x_2}{x_1} > 2$ и по лемме 3 форма β не может входить в минимальную. Функция $f(x_1) = \frac{x_2}{x_1}$ является непрерывной на отрезке $[\frac{\pi}{2}, \pi]$, в концах принимает значения $f(\frac{\pi}{2}) = 3$, $f(\pi) = 2$. Если в некоторой точке выполнено неравенство $x_2 < 2x_1$, то по непрерывности существует внутренняя точка x_1^*, где $f(x_1^*) = 2$. Тогда из (39) следует равенство $tg\, 2x_1^* = 2\, tg\, x_1^*$. Но это возможно только при $x_1^* = n\pi$, $n \in \mathbb{N}$, что противоречит определению формы β.

3). Пусть $\pi < x_1 < \frac{3\pi}{2}$. Рассмотрим значения функции (41) в двух точках интервала $(0, l)$:

$$x' = \frac{\pi}{x_2} l, \quad x'' = \frac{2\pi}{x_2} l.$$

Имеем $y(x') = C_2 \sin \frac{x_1}{x_2}\pi$, $y(x'') = C_2 \sin(\frac{2x_1}{x_2}\pi)$. Выполнено одно из двух:

— или $\frac{x_2}{x_1} > 2$ и тогда по лемме 3 форма β не входит в y^*

— или $\frac{x_2}{x_1} < 2$ и тогда $f(x')\, f(x'') < 0$, поэтому (41) не является знакоположительной и форма β недопустима.

4). Пусть $x_1 \geq \frac{3\pi}{2}$. Тогда $x_2 > 2\pi$ и выполнены условия леммы 1 при $A = x_1$, $B = x_2$. По лемме функция не является знакопостоянной, поэтому форма β недопустима. *Утверждение доказано.*

9. Строение минимальной формы

Утверждения 3–7 в совокупности оставляют среди допустимых цепочек только три: $(\alpha^*)\,,(\gamma^*)\,,(\gamma^*,\gamma^*)$. Сформулируем окончательный результат, объединив пункты утверждений 3—7, относящиеся к форме y^*:

Теорема 2. *Для шарнирно-закрепленного стержня задача о минимальной критической силе и минимальной форме потери устойчивости имеет решение:*

1. Минимальная критическая сила $P^*(k)$ равняется

$$P^*(k) = \begin{cases} \dfrac{1+k^2}{2}, & \text{при } k \le 2, \\ \dfrac{5\,k}{4}, & \text{при } k \ge 2. \end{cases}$$

2. Минимальные формы потери устойчивости имеют вид:

при $k < 2: \quad y^*(x) = C\,\sin x;$
при $k = 2: \quad y^*(x) = C\,\sin x + B\,\sin 2x\,,$ *где* $B \in [-C/2,\,C/2];$
при $k > 2: \quad y^*(x) = C_1\,\bar{y}(x)$ *или* $y^*(x) = C_2\,\bar{y}(\pi - x)$

$$\text{где } \bar{y}(x) = \begin{cases} 2\,\sin\sqrt{\frac{k}{2}}x + \sin 2\sqrt{\frac{k}{2}}x\,, & x \le \sqrt{\frac{2}{k}}\pi, \\ 0, & \sqrt{\frac{2}{k}}\pi < x < \pi, \end{cases}$$

при $k \ge 8: \quad y^*(x) = C_1\,\bar{y}(x) + C_2\,\bar{y}(\pi - x)\,.$

Здесь C, C_1, C_2 – произвольные положительные константы.

3. Силы реакции нижней среды (при $k \ge 2$) даются формулой:

$$R_i = \frac{7k\sqrt{k}}{2\sqrt{2}}\,C_i.$$

Утверждение теоремы проиллюстрировано на рисунках 3 и 4.

Формулы для исходного стержня длины L жесткости K получаются с учетом (4). В частности,

$$F^*(k) = \begin{cases} \dfrac{KL^4 + D\pi^4}{L^2}, & \text{при } K \le \dfrac{4D\pi^4}{L^4}, \\ \dfrac{5\sqrt{KD}}{2}, & \text{при } K \ge \dfrac{4D\pi^4}{L^4}. \end{cases}$$

При $k = 2$ минимальные формы составляют замкнутый конус, *граница* которого состоит из форм α^*, а *внутренность* — из

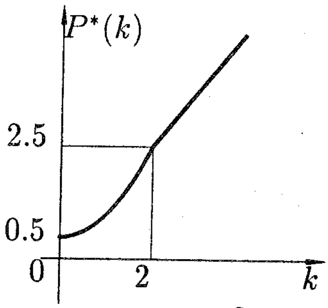

рис.3

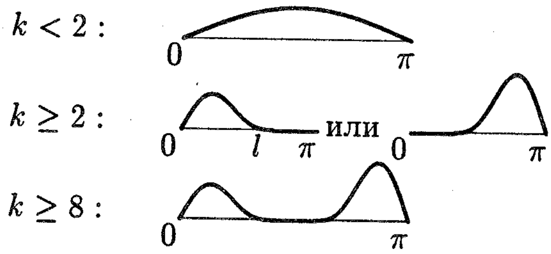

рис.4

форм γ^*. При $k = 8$ минимальные формы также составляют замкнутый конус из форм γ^*, *граница* которого состоит из цепочек (γ^*), а *внутренность* — из цепочек (γ^*, γ^*).

Аналогичным способом можно найти все минимальные формы потери устойчивости при других граничных условиях, например жестко-защемленного стержня.

Литература

1. **Вольмир А.С.** Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.

2. **Владимиров В.С.** Уравнения математической физики. М.:Наука, 1988. 512 с.

Summary

Kholopov A.A. Minimal Stability Losing Forms of Bar placed between elastic and rigid spaces

Elastic bar displayed between two demispaces—absolutly rigid and elastic ones is considered. Formula for Critical Load and corresponding Minimal Stability Losing Forms are given.

Сыктывкарский университет

Поступила 8.02.95