

УДК 539.371

УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЯ НА ГРАНИЦЕ ДВУХ УПРУГИХ СРЕД

Д.В.Холмогоров

Задача об устойчивости продольно-сжатого стержня на границе двух упругих сред формулируется в виде вариационной проблемы. Для определения критических значений нагрузки и соответствующих форм потери устойчивости стержня используются метод последовательных приближений и расчетная схема, основанная на применении метода ветвей и границ. Приводятся результаты численных экспериментов для трех типов граничных условий при различных значениях жесткости оснований.

Пусть стержень длины l , сжимаемый продольной силой P , находится на границе раздела двух упругих полупространств, реагирующих на боковое давление как простые винклеровские основания с жесткостями $c(s) \geq 0$ и $b(s) \geq 0$ соответственно. Рассмотрим функционал полной потенциальной энергии изогнутого стержня в виде

$$J(w) = \frac{1}{2} \int_0^l (EIw''^2 + c(s)w_+^2 + b(s)w_-^2 - Pw'^2) ds \quad (1)$$

$$(w_+(s) = \max\{0, w(s)\}, w_-(s) = \min\{0, w(s)\}).$$

Сформулируем задачу на устойчивость: будем искать минимальное значение P , при котором вариационная проблема

$$J(w) \rightarrow \min_{w \in \Omega} \quad (2)$$

где

$$\Omega = \left\{ u \in C^2[0, l] : u(0) = u(l) = 0, u^{(i)}(0) = u^{(k)}(l) = 0 \right\},$$

имеет нетривиальное решение.

В дальнейшем будем предполагать, что стержень удовлетворяет одному из трех типов однородных граничных условий :

$$w(0) = w(l) = 0, w'(0) = w'(l) = 0; \quad (3)$$

(жесткая заделка)

$$w(0) = w(l) = 0, w''(0) = w''(l) = 0; \quad (4)$$

(шарнирное закрепление)

$$w(0) = w(l) = 0, w'(0) = w'(l) = 0. \quad (5)$$

(смешанные граничные условия)

Для практического решения задачи перейдем от поиска решения в $C^2[0, l]$ к вычислению его конечномерной аппроксимации в R^n .
Заменим производные в (1) конечноразностными отношениями

$$w'(s_i) = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2h}, \quad w''(s_i) = \frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{h^2}, \quad (6)$$

$$x_i = w(s_i), \quad i \in 0 : n+1, \quad s_{i+1} = s_i + h,$$

$$h = \frac{l}{n+3}, \quad s_{-1} = 0, \quad s_{n+2} = l;$$

$$w'(s_{-1}) = \frac{-3x_{-1} + 4x_0 - x_1}{2h}, \quad w'(s_{n+2}) = \frac{x_n - 4x_{n+1} + 3x_{n+2}}{2h}; \quad (7)$$

$$w''(s_{-1}) = \frac{x_{-1} - 2x_0 + x_1}{h^2}, \quad w''(s_{n+2}) = \frac{x_n - 2x_{n+1} + x_{n+2}}{h^2}. \quad (8)$$

Граничным условиям (3)–(5) соответствуют равенства

$$x_{-1} = 0, \quad x_{n+2} = 0, \quad x_0 = \frac{x_1}{4}, \quad x_{n+1} = \frac{x_n}{4}, \quad (9)$$

$$x_{-1} = 0, \quad x_{n+2} = 0, \quad x_0 = \frac{x_1}{2}, \quad x_{n+1} = \frac{x_n}{2}, \quad (10)$$

$$x_{-1} = 0, \quad x_{n+2} = 0, \quad x_0 = \frac{x_1}{4}, \quad x_{n+1} = \frac{x_n}{2}. \quad (11)$$

Вычисляя интегралы по квадратурной формуле трапеций с учетом соотношений (6)–(11), приходим к следующей задаче конечномерной оптимизации

$$\frac{1}{2}(Ax, x) + \frac{1}{2}(Cx_+, x) + \frac{1}{2}(Bx_-, x) - \frac{\lambda}{2}(Qx, x) \rightarrow \min_{x \in R^n}, \quad (12)$$

где λ - значение, соответствующее параметру P в конечномерном случае ; $x_+ = (x_{1+}, \dots, x_{n+})^*$, $x_- = (x_{1-}, \dots, x_{n-})^*$, $x_{i+} = \max\{0, x_i\}$, $x_{i-} = \min\{0, x_i\}$; (*) - здесь и далее означает транспонирование.

Матрицы A и Q являются симметрическими, строго положительно определенными, т.е.

$$(Ax, x) \geq \gamma_1 \|x\|^2, \quad (Qx, x) \geq \gamma_2 \|x\|^2, \quad \forall x \in R^n,$$

где $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$ - минимальные собственные числа матриц A и Q соответственно. Матрицы A и Q имеют вид :

$$A = \frac{EI}{h^3} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ a_{21} & 6 & -4 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & -4 & 6 & a_{n-1,n} & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & a_{n,n-1} & a_{nn} & \cdot \end{pmatrix},$$

$$Q = \frac{1}{4h} \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ q_{21} & 2 & 0 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & 0 & 2 & 0 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 0 & 2 & 0 & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 0 & 2 & q_{n-1,n} & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & q_{n,n-1} & q_{nn} & \cdot \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Матрицы C и B — диагональные с неотрицательными элементами :

$$B = \text{diag}\{b_1, b_2, \dots, b_{n-1}, b_n\},$$

$$C = \text{diag}\{c_1, c_2, \dots, c_{n-1}, c_n\},$$

$$b_i = h \cdot b(s_i), \quad c_i = h \cdot c(s_i), \quad i \in 2 : n - 1. \quad (14)$$

В зависимости от типа граничных условий имеем

$$a_{11} = a_{nn} = 4.4375, \quad a_{12} = a_{21} = a_{n,n-1} = a_{n-1,n} = -3.75,$$

$$q_{11} = q_{nn} = 2.0625, \quad q_{12} = q_{21} = q_{n,n-1} = q_{n-1,n} = -0.25,$$

$$b_1 = 1.0625h \cdot b(s_1), \quad b_n = 1.0625h \cdot b(s_n),$$

$$c_1 = 1.0625h \cdot c(s_1), \quad c_n = 1.0625h \cdot c(s_n);$$

(жесткое защемление)

$$a_{11} = a_{nn} = 3.25, \quad a_{12} = a_{21} = a_{n,n-1} = a_{n-1,n} = -3.5$$

$$q_{11} = q_{nn} = 2.75, \quad q_{12} = q_{21} = q_{n,n-1} = q_{n-1,n} = -0.5$$

$$b_1 = 1.5h \cdot b(s_1), \quad b_n = 1.5h \cdot b(s_n), \quad c_1 = 1.5h \cdot c(s_1), \quad c_n = 1.5h \cdot c(s_n);$$

(шарнирное закрепление)

$$a_{11} = 4.4375, \quad a_{nn} = 3.25, \quad a_{12} = a_{21} = -3.75, \quad a_{n,n-1} = a_{n-1,n} = -3.5,$$

$$q_{11} = 2.0625, \quad q_{nn} = 2.75, \quad q_{12} = q_{21} = -0.25, \quad q_{n,n-1} = q_{n-1,n} = -0.5,$$

$$b_1 = 1.0625h \cdot b(s_1), \quad b_n = 1.5h \cdot b(s_n),$$

$$c_1 = 1.0625h \cdot c(s_1), \quad c_n = 1.5h \cdot c(s_n). \quad (15)$$

(смешанные условия)

Далее выполняются следующие преобразования и замены переменных (более подробно см. в [1]):

$$A = A + \Psi, \quad C = C - \Psi, \quad B = B - \Psi;$$

$$(\Psi = \text{diag}\{\psi_1, \dots, \psi_n\}, \quad \psi_i = \min\{b_i, c_i\}, \quad i \in 1:n)$$

$$y_i = x_{i+}, \quad i \in R_+; \quad y_j = x_{j-}, \quad j \in R_-;$$

$$(R_+ = \{i \in 1:n \mid c_i > 0\}, \quad R_- = \{i \in 1:n \mid b_i > 0\})$$

$$x = Tz$$

$$(T^*AT = \text{diag}\{\mu_1, \dots, \mu_n\}, \quad \mu_i > 0, \quad i \in 1:n, \quad T^*QT = E).$$

В результате задача (12) может быть преобразована к виду

$$F(z, y) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \mu_i z_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i \in R_+ \cup R_-} f_i y_i^2 \rightarrow \min_{(z, y) \in R^{n+m}}, \quad (16)$$

$$\begin{cases} y_i \geq 0, & (T_i, z) - y_i \leq 0, & i \in R_+, \\ y_i \leq 0, & y_i - (T_i, z) \leq 0, & i \in R_-, \end{cases} \quad (17)$$

$$\frac{1}{2}(z, z) = 1, \quad (18)$$

где $m = |R_+| + |R_-|$ – суммарное число элементов множеств R_+ и R_- , T_i – строки матрицы T ,

$$f_i = \begin{cases} c_i, & i \in R_+, \\ b_i, & i \in R_-. \end{cases}$$

Задача (16)–(18) может быть решена методом последовательных приближений [1,2], который сходится к какому-либо, не обязательно минимальному значению критической нагрузки.

При поиске глобального минимума задача сводится к вариационной проблеме

$$\Phi(\lambda, z, y) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \mu_i z_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i \in R_+ \cup R_-} f_i y_i^2 - \frac{\lambda}{2} \|z\|^2 \rightarrow \min, \quad (19)$$

$$\begin{cases} y_i \geq 0, & (T_i, z) - y_i \leq 0, & i \in R_+, \\ y_i \leq 0, & y_i - (T_i, z) \leq 0, & i \in R_-, \end{cases} \quad (20)$$

$$\{|z_i| \leq 1, \quad i \in 1:n. \quad (21)$$

Для ее решения применяется расчетная схема [1] в сочетании с методом ветвей и границ [3,4] (см. также [5]).

В работе [6] рассматривается задача об устойчивости продольно сжатого стержня на границе раздела двух сред в случае, когда одна среда абсолютно жесткая, а другая – однородно-упругая жесткости C . Для шарнирно закрепленного стержня получены точные значения безразмерного параметра

$$P_0 = \frac{P_0^{\text{кр}} l^2}{EI \pi^2},$$

соответствующего критической силе $P_0^{\text{кр}}$, в частности при $k > 4$ ($k^2 = Cl^4/EI\pi^4$)

$$P_0 = \frac{5k}{2}.$$

Форма равновесия на участке $[0, \ell_0]$ определяется с точностью до константы c

$$w(s) = c \left(2 \sin \frac{\pi s}{\ell_0} + \sin \frac{2\pi s}{\ell_0} \right), \quad c > 0, \quad (22)$$

$$\ell_0 = \pi \sqrt{2/k}.$$

Форма равновесия на $[0, \pi]$ представляется в виде допустимой цепочки форм вида (22). Это решение используется для тестирования метода последовательных приближений.

В таблицах на рис. 1-5 приводятся значения безразмерного параметра $P = P_{кр} l^2 / EI \pi^2$, длина интервала $[0, \ell]$, а также формы равновесия стержня (нормированные одинаковым образом), полученные методом последовательных приближений. В таблицах указано также число точек сетки n и количество итераций it . В качестве начальных приближений использовались формы равновесия стержня в однородно-упругой среде жесткости C .

При $k = 4$, $\ell_0 > \frac{\pi}{2}$ может реализоваться только одна волна. Точная форма равновесия на рис. 1-5 выделена жирной линией. Значение P при $n = 64$ определяется с точностью до трех значащих цифр. В зависимости от выбора начального приближения получают также и симметричные относительно точки $\pi/2$ формы.

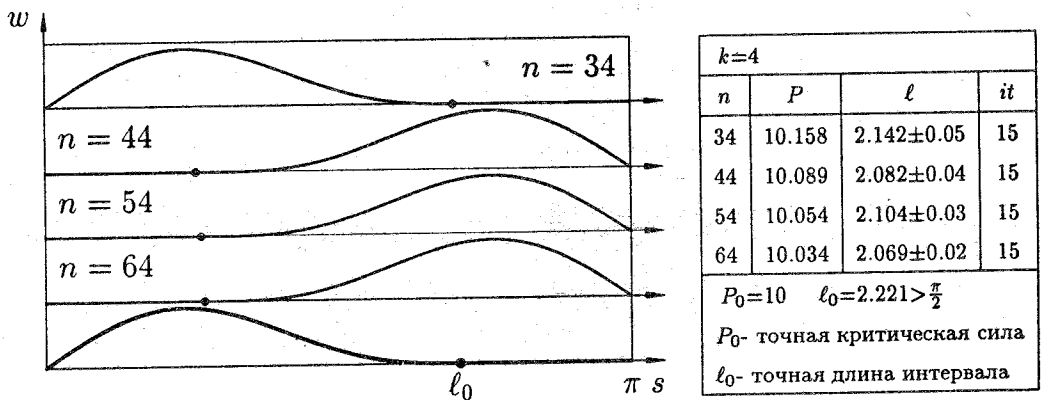
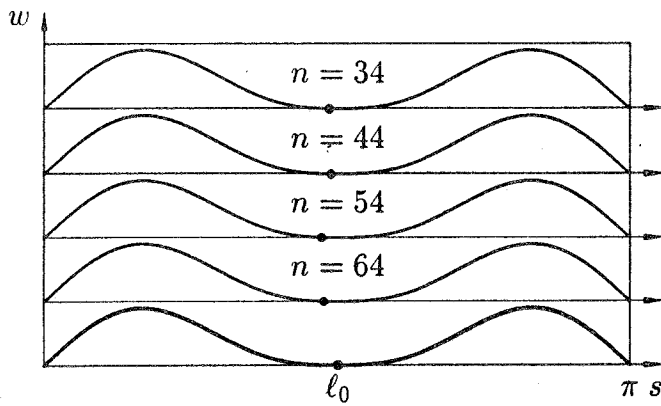


Рис. 1

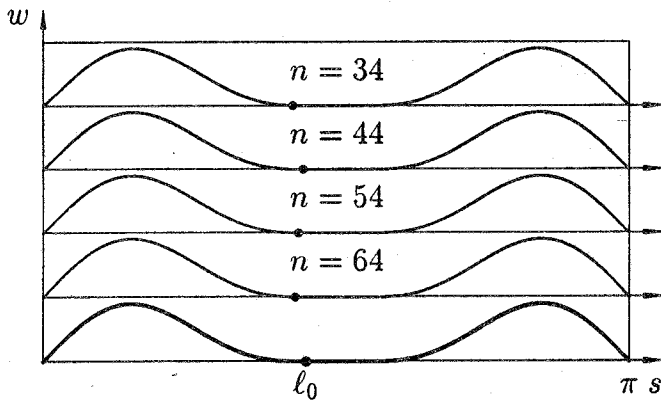
При $k = 8$, $\ell_0 = \frac{\pi}{2}$ (рис. 2) реализуются две симметричные относительно точки $\pi/2$ волны. Значение P определяется с точностью в две значащие цифры.



k=8			
n	P	ℓ	it
34	20.689	1.475±0.05	13
44	20.361	1.498±0.04	13
54	20.213	1.452±0.03	13
64	20.135	1.471±0.02	13

$P_0=20$ $\ell_0=1.571=\frac{\pi}{2}$
 P_0 - точная критическая сила
 ℓ_0 - точная длина интервала

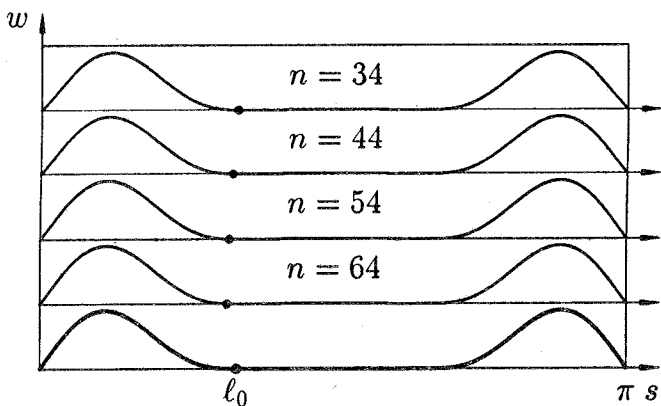
Рис. 2



k=10			
n	P	ℓ	it
34	26.132	1.285±0.05	15
44	25.609	1.352±0.04	16
54	25.373	1.334±0.03	16
64	25.244	1.321±0.02	16

$P_0=25$ $\ell_0=1.405$ $\frac{\pi}{3} < \ell_0 < \frac{\pi}{2}$
 P_0 - точная критическая сила
 ℓ_0 - точная длина интервала

Рис. 3



k=18			
n	P	ℓ	it
34	49.035	0.999±0.05	22
44	47.185	0.986±0.04	20
54	46.335	0.978±0.03	20
64	45.885	0.972±0.02	20

$P_0=45$ $\ell_0=1.047=\frac{\pi}{3}$
 P_0 - точная критическая сила
 ℓ_0 - точная длина интервала

Рис. 4

При $k = 10$, $\frac{\pi}{3} < \ell_0 < \frac{\pi}{2}$ (рис. 3) появляется участок выстилания, а при $k = 18$, $\ell_0 = \frac{\pi}{3}$ (рис. 4) длина участка выстилания становится достаточной, чтобы могла реализоваться трехволновая форма. Однако этого не происходит (см. также рис. 5), т.к. трехволновой форме соответствует значение $\tilde{P} > P_0$. С другой стороны, поскольку используется линейная теория, при $\ell_0 < \frac{\pi}{2}$ участок выстилания на $[\ell_0, \pi]$ может остаться прямолинейным.

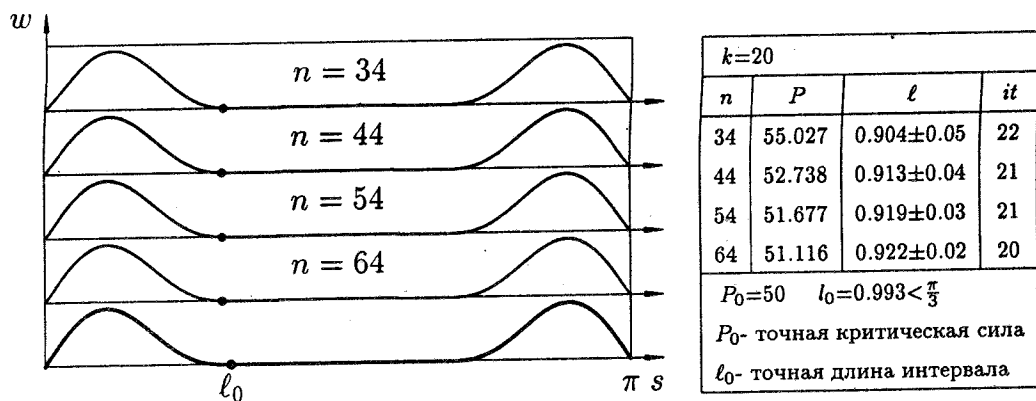


Рис. 5

Заметим, что при увеличении жесткости упругой среды точность определения P снижается от 3-х значащих цифр при $k = 4$ до одной при $k = 20$. Кроме того, при использовании локального метода абсолютно-жесткая среда моделируется однородно-упругой достаточно большой жесткости. Расчеты проведены при $B = 10^3 C$ (при $B = 10^4 C$ значения P отличаются в 6–8-м знаке), степень вдавливания характеризуется относительной величиной

$$\varepsilon = \frac{M_-}{M_+} \approx 10^{-3},$$

где

$$M_+ = \max_{i \in 1:n} |w_+(s_i)|, \quad M_- = \max_{i \in 1:n} |w_-(s_i)|.$$

Рассмотрим жестко заземленный стержень. Используя подход, реализованный в работе [6], можно при некоторых значениях жесткости (в частности при $k \geq 3$) определить аналогичным образом значение критической силы и соответствующую форму равновесия в виде допустимой цепочки простых форм.

Результаты численного эксперимента приведены на рис. 6–8.

При $k = 4, \ell_0 > \frac{\pi}{2}$ (рис. 6) реализуется одноволновая форма, при $k = 13, \frac{\pi}{3} < \ell_0 < \frac{\pi}{2}$ (рис. 7) – двухволновая и появляется участок выстилания (так же, как и в случае шарнирного опирания, прямолинейный участок при $\ell_0 < \frac{\pi}{2}$ может и не потерять устойчивость, поскольку используется линейная теория).

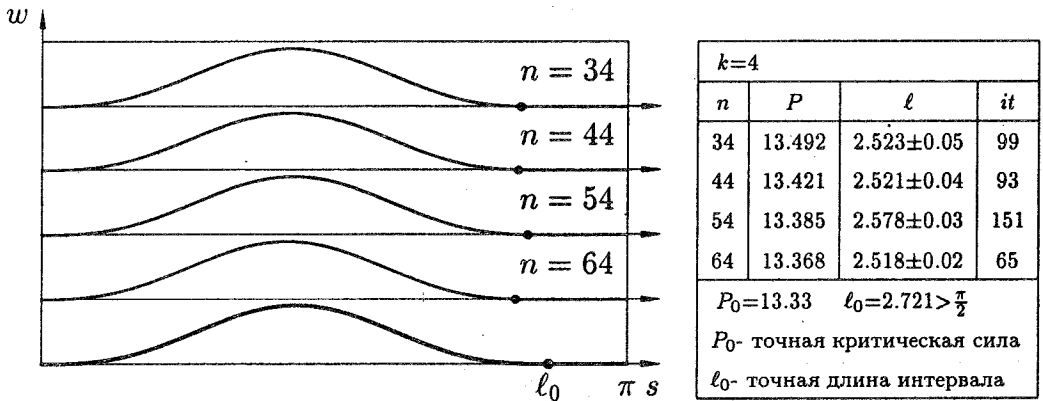


Рис. 6

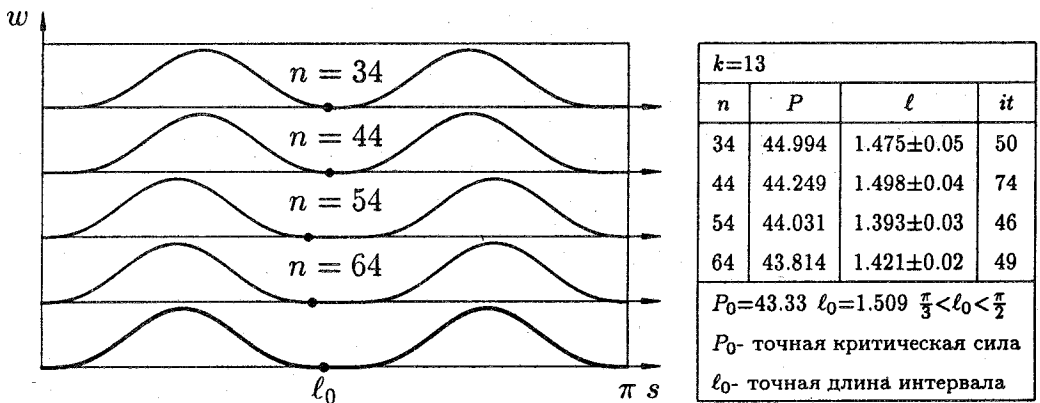


Рис. 7

Однако следует отметить, что в отличие от шарнирно закрепленного стержня при $\frac{\pi}{4} < \ell_0 \leq \frac{\pi}{3}$ может реализоваться трехволновая форма, граничные условия это допускают (см. рис. 8). Вообще говоря, при $\frac{\pi}{4} < \ell_0 \leq \frac{\pi}{3}$ форма равновесия может иметь либо один "скользящий" горб (рис. 8, $N = 1, 3$), либо два произвольно расположенных (рис. 8, $N = 2, 4$), либо три горба.

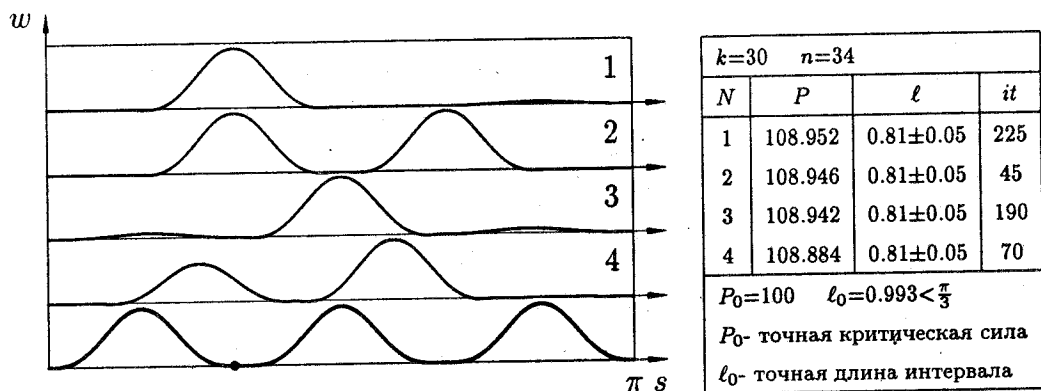


Рис. 8

Таким образом, проведенные численные эксперименты показали, что для поиска глобального экстремума может быть использован локальный метод, причем хорошими начальными приближениями являются формы равновесия стержня в однородно-упругой среде, соответствующие критической нагрузке.

Далее приводятся результаты численных экспериментов для стержня длины π на границе раздела двух однородно-упругих сред с жесткостями B и C соответственно.

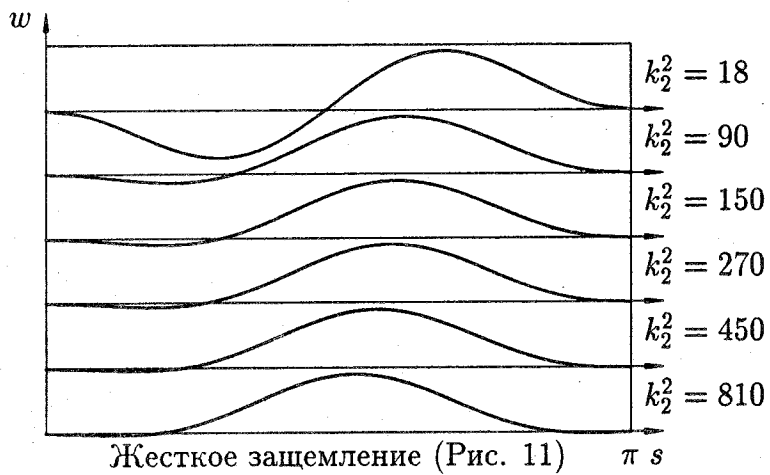
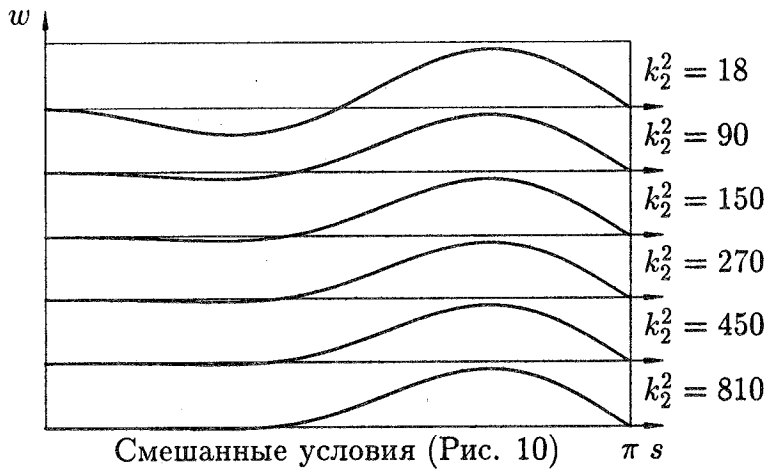
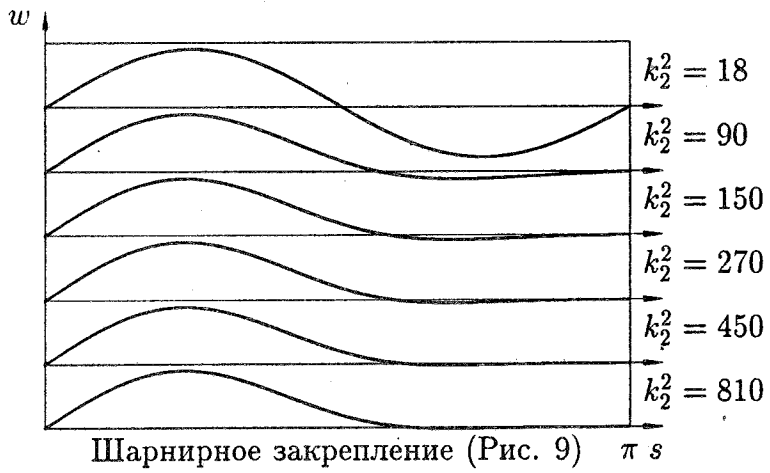
Для поиска критической нагрузки используется расчетная схема [1] в сочетании с методом ветвей и границ [3,4].

В таблице указаны значения безразмерного параметра $P = P_{кр} l^2 / EI \pi^2$, характеризующего критическую нагрузку при различных значениях жесткости одной из упругих сред ($k_1^2 = Cl^4 / EI \pi^4$, $k_2^2 = Bl^4 / EI \pi^4$) и при различных граничных условиях.

$k_1=4 \quad n=34$			
k_2^2	P_I	P_{II}	P_{III}
18	8.338	9.163	11.740
90	9.842	9.858	12.939
150	9.956	9.958	13.102
270	10.033	10.033	13.233
450	10.075	10.075	13.321
810	10.105	10.105	13.386

P_I (шарнирное закрепление)
 P_{II} (смешанные гр. условия)
 P_{III} (жесткое защемление)

Эволюция форм прогиба стержня при движении по параметру жесткости B изображена на рис. 9–11.



Литература

1. Тарасов В.Н. Задачи на собственные значения для положительно однородных операторов//*Вестн. СыктГУ.Сер.1.* 1995. Вып.1.
2. Тарасов В.Н.,Холмогоров Д.В. Устойчивость конструкций с односторонними связями//*Материалы 1-го Всесоюзного семинара по автоматизации инженерных расчетов при проектировании автоклавов.* Сыктывкар,1992. 197с. .
3. Falk J.E.,Soland R.M. An algorithm for separable nonconvex programming problems//*Management Sci.* 1969. V.15.№9. P.550-569.
4. Soland R.M. An algorithm for separable nonconvex programming problems II: Nonconvex Constraints. "Management Sci.". 1971.17.№11. P.759-773.
5. Сухарев А.Г. Глобальный экстремум и методы его отыскания// *Математические методы в исследовании операций.* МГУ, 1983.193с.
6. Холопов А.А. Минимальные формы потери устойчивости стержня на границе жесткой и упругой сред//*Вестн. СыктГУ.Сер.1.* 1995. Вып.1.

Summary

Holmogorov D.V. the stability of bar on two elastic surroundings boundary.

The stability of the longitudinally condensed bar on the boundary of two similar elastic surroundings in terms of a variational problem is considered. For the definition of critical loading and the loss stability of the forms of bar the successive approximation method and calculated scheme based on branch and bound algorithm are used. The results of numerical experiment for three types of boundary conditions under some rigidity bases values are illustrated.

Сыктывкарский университет

Поступила 11.02.94