Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1.Вып.1.1995

УДК 519.6

Задачи на собственные значения для положительно однородных операторов

В.Н.Тарасов

Рассматривается проблема устойчивости упругих конструкций при наличии односторонних ограничений на перемещения. Данная проблема сводится к задачам на собственные значения для положительно однородных операторов. Разрабатываются алгоритмы решения таких задач. Приводится пример решения задачи об устойчивости кольца, подкрепленного растяжками одностороннего действия.

1. Пусть A, Q — ограниченные линейные операторы, определенные в некотором сепарабельном гильбертовом пространстве H. Если пространство H бесконечномерно, то предполагается, что оно ограниченно вкладывается в $L_2(\Omega)$, где Ω — некоторая область в $\mathbf{R}^n$. Предполагается, что A и Q симметричные и существует $\gamma > 0$ такое, что

$$(Au, u)_H \geq \gamma \|u\|_H^2, \quad (Qu, u) \geq 0. \tag{1}$$

Кроме того, оператор Q предполагается вполне непрерывным, а также выполнены неравенства (типа Фридрихса)

$$\|u\|_H \geq c_0 \|u\|, \quad c_0 > 0.$$

(Здесь $(u,v)_H$, $\|u\|_H$ — скалярное произведение и норма в H, (u,v), $\|u\|$ — скалярное произведение и норма в $L_2(\Omega)$).

Рассмотрим операторное уравнение

$$Au + Bu_+ + Cu_- = \lambda Qu \tag{2}$$

Здесь $u_+ = \max\{0, u\} = \frac{1}{2}(|u| + u)$, $u_- = \min\{0, u\} = -(-u)_+$; B, C — операторы умножения на положительную функцию. Если $H = R^n$ — конечномерное пространство, то

$$u_+ = (u_{1+}, u_{2+}, ..., u_{n+})^*, \quad u_- = -(-u)_+, u_{j+} = \max\{0, u_j\},$$

(* – означает транспонирование), C, D — диагональные матрицы с неотрицательными элементами, A, Q — симметричные, A — положительно определенная, Q — неотрицательно определенная матрицы.

Поставим задачу найти числа λ такие, что уравнение (2) имеет нетривиальное решение. В дальнейшем эту задачу будем называть задачей на обобщенные собственные значения для положительно однородных операторов. Соответствующие числа λ, при которых существует нетривиальное решение уравнения (2), будем называть обобщенными собственными числами, а нетривиальные решения — обобщенными собственными элементами.

К уравнению вида (2) сводятся многие задачи об устойчивости конструкций с односторонними связями, например задача об устойчивости продольно сжимаемой цилиндрической оболочки с упругим наполнителем внутри. Предполагая, что наполнитель работает как простое винклеровское основание с жесткостью b, приходим к проблеме определения нагрузки q, при которой краевая задача

$$\frac{d_0}{h}\frac{d^4w}{dx^4} + \frac{E}{R^2}w + b\,w_- = -q\frac{d^2w}{dx^2},$$

$$w(0) = w''(0) = w(l) = w''(l) = 0$$

имеет нетривиальное решение. Здесь w — прогиб, l — длина, h — толщина, R — радиус оболочки, d_0 — цилиндрическая жесткость, E — модуль Юнга.

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} F(u) &= Au + Cu_+ + Du_-, \quad g(u) = \frac{1}{2}(Qu, u), \\ f(u) &= \frac{1}{2}(Au, u) + \frac{1}{2}C(u_+, u) + \frac{1}{2}D(u_-, u). \end{aligned}$$

Из (1) следует, что функционал $f(u)$ является сильно выпуклым, и $F(u)$ — его градиент. Сильная выпуклость означает, что для $u_1, u_2 \in H$ выполнено неравенство

$$f(u_2) \geq f(u_1) + (F(u_1), u_2 - u_1) + \frac{1}{2}\gamma\|u_2 - u_1\|_H^2. \qquad (3)$$

Рассмотрим экстремальную проблему

$$f(u) \to \min_{u \in M}, \quad M = \{u \in H | g(u) = 1\}. \qquad (4)$$

Для задачи (4) справедливо правило множителей Лагранжа, т.е., если u_* решение (4), то найдется число λ_*, такое, что

$$F(u_*) = \lambda_* Q u_*, \quad g(u_*) = 1. \tag{5}$$

Точки $u_* \in H$, удовлетворяющие (5), будем называть стационарными. Ясно, что стационарные точки являются нетривиальными решениями уравнения (2) и, наоборот, если u нетривиальное решение (2), то с учетом того, что для любого $t > 0$, $F(tu) = tF(u)$, точка $\bar{u} = u/\sqrt{g(u)}$ будет стационарной.

Покажем, что оператор $F^{-1}(u)$ существует и удовлетворяет условию Липшица с константой $L = \frac{c_0}{\gamma}$. Введем в рассмотрение вспомогательные функционалы

$$f_i(u) = f(u) - (h_i, u), \quad i = 1,\, 2.$$

Пусть u_1 и u_2 — точки минимума функционалов f_1 и f_2 соответственно. Функционалы $f_i(u)$ являются сильно выпуклыми и для них справедливо неравенство (3):

$$f(u_2) - (h_1, u_2) \geq f(u_1) - (h_1, u_1) + \frac{1}{2}\gamma \|u_2 - u_1\|_H^2,$$

$$f(u_1) - (h_2, u_1) \geq f(u_2) - (h_2, u_2) + \frac{1}{2}\gamma \|u_2 - u_1\|_H^2,$$

Последние неравенства выписаны с учетом того, что

$$F(u_i) - h_i = 0, \ i = 1, 2.$$

Складывая эти неравенства $i = 1,\, 2$, (т.е. $u_i = F^{-1}(h_i)$), получаем

$$(h_2 - h_1, u_2 - u_1) \geq \gamma \|u_2 - u_1\|_H^2.$$

Из неравенства Коши-Буняковского будет следовать

$$\|u_1 - u_2\|_H \leq \frac{c_0}{\gamma} \|h_1 - h_2\|.$$

2. Сформулируем алгоритм отыскания стационарных точек. Пусть $u_0 \in M$, $\lambda_0 \in \mathbf{R}^1$ — некоторое начальное приближение. Пусть уже найдена точка $u_k \in M$ и число λ_k. Тогда положим

$$v_{k+1} = \arg\min_{u \in M_k} f(u), \quad M_k = \{u \in H : (Qu_k, u) = 2\}; \tag{6}$$

$$u_{k+1} = v_{k+1}S_{k+1}^{-1}, \quad S_{k+1} = \sqrt{g(v_{k+1})}; \quad \lambda_{k+1} = f(u_{k+1}).$$

Докажем сходимость алгоритма (6) к некоторой стационарной точке. Так как Q – – неотрицательно определенный оператор, то очевидно

$$\begin{aligned} S_{k+1}^2 &= g(v_{k+1}) = g(u_k) + Q(u_k, v_{k+1} - u_k) + \frac{1}{2}g(v_{k+1} - u_k) = \\ &= g(u_k) + \frac{1}{2}g(v_{k+1} - u_k) \geq g(u_k) = 1. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $f(u_{k+1}) = S_{k+1}^{-2}f(v_{k+1}) \leq f(u_k)$. Нетрудно видеть, что $S_k \to 1$ при $k \to \infty$. В самом деле, если бы это было не так, то $f(u_k) \to 0$. Из полной непрерывности оператора Q следует, что M — слабо замкнутое множество. Последовательность $\{u_k\} \in M$, очевидно, является ограниченной в H, следовательно, она содержит слабо сходящуюся подпоследовательность $\{u_{k_i}\}$. Обозначим предел этой подпоследовательности через $\bar{u}$. Очевидно, что $\bar{u} \neq 0$. Так как функционал $f(u)$ выпуклый и непрерывный , то он слабо полунепрерывен снизу, следовательно,

$$\underline{\lim}_{k_i \to \infty} f(u_{k_i}) \geq f(\bar{u}) > 0.$$

Получили противоречие.

Последовательность λ_k монотонно убывает, а поскольку она ограничена снизу, то имеет предел, который обозначим через λ_*.

Докажем, что при $k \to \infty$

$$\|u_{k+1} - u_k\|_H \to 0. \tag{7}$$

Очевидно, что для всех $u \in M_k$ $(F(v_{k+1}), u - v_{k+1}) = 0$. Отсюда и из неравенства (3) следует, что

$$f(v_{k+1}) \leq f(u_k) - \frac{1}{2}\gamma\|v_{k+1} - u_k\|^2{}_H. \tag{8}$$

Из последнего неравенства получаем, при $k \to \infty$

$$\|v_{k+1} - u_k\|_H \to 0. \tag{9}$$

Так как

$$\begin{aligned} \|u_{k+1} - u_k\|_H &\leq \|v_{k+1} - u_k\|_H + \|v_{k+1} - u_{k+1}\|_H = \\ &= \|v_{k+1} - u_k\|_H + (S_{k+1} - 1)\|u_{k+1}\|_H, \end{aligned}$$

откуда с учетом (9) приходим к (7).

Из последовательности u_k можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность u_{k_i}. Выписывая правило множителей Лагранжа для задачи (6)

$$F(u_{k_i}) = \bar{\lambda}_{k_i} Q u_{k_i - 1}, \tag{10}$$

где $\bar{\lambda}_{k_i} = \lambda_{k_i}/S_{k_i}$. Вследствие компактности оператора Q последовательность Qu_{k_i} сильно сходится в $L_2(\Omega)$ к некоторому элементу $\bar{u} \in L_2(\Omega)$. Для любого $m > 0$ выполнено неравенство

$$\|u_{k_i} - u_{k_i+m}\|_H = \|F^{-1}(\bar{\lambda}_{k_i} Q u_{k_i-1}) - F^{-1}(\bar{\lambda}_{k_i+m} Q u_{k_i+m-1})\|_H \leq$$

$$\leq \frac{c_0}{\gamma} \|\bar{\lambda}_{k_i} Q u_{k_i-1} - \bar{\lambda}_{k_i+m} Q u_{k_i+m-1}\|.$$

Так как последовательность $\bar{\lambda}_{k_i}$ сходится и последовательность Qu_{k_i-1} сходится в себе в $L_2(\Omega)$, то из последнего неравенства получаем, что последовательность u_{k_i} является фундаментальной в H, т.е. сходится. Очевидно, что $u_{k_i} \to u_*$, ибо сильный и слабый пределы (если они оба существуют) совпадают.

Переходя к пределу в (10), получаем

$$F(u_*) = \lambda_* Q u_*, \quad g(u_*) = 1,$$

т.е. u_* — стационарная точка.

Замечание. *При применении данного алгоритма на каждом шаге необходимо решать задачу минимизации сильно выпуклого функционала при линейных ограничениях. Эта задача значительно проще исходной задачи (4). Если H — конечномерное пространство, то вспомогательная задача (6) будет задачей квадратичного программирования, которая может быть решена за конечное число шагов.*

В дальнейшем будем считать, что $H = \mathbf{R}^n$

Не ограничивая общности можно считать, что матрица $D-$ нулевая. В самом деле, введем в рассмотрение матрицу $\bar{A}$ с элементами

$$\bar{a}_{ij} = a_{ij}, \text{ если } i \neq j, \quad \bar{a}_{ij} = a_{ij} + b_i, \text{ если } i = j,$$

где $b_i = \min\{c_i, d_i\}$. С учетом того, что для любого числа $t = t_+ + t_-$, получим,

$$F(u) = \bar{A}u + \bar{C}u_+ + \bar{D}u_-,$$

где $\bar{C} = \mathrm{diag}[\bar{c}_1, \bar{c}_2, ..., \bar{c}_n]$, $\bar{D} = \mathrm{diag}[\bar{d}_1, \bar{d}_2, ..., \bar{d}_n]$ — диагональные матрицы, $\bar{c}_i = c_i - \min\{c_i, d_i\}$, $\bar{d}_i = d_i - \min\{c_i, d_i\}$. Очевидно, что $\min\{\bar{c}_i, \bar{d}_i\} = 0$. Пусть

$$R_- = \{i \in 1:n |\ \bar{d}_i > 0\}, \quad R_+ = \{i \in 1:n |\ \bar{c}_i > 0\}.$$

Далее учитывая, что $t * t_- = -t * (-t)_+$, и выполняя замену переменных $u = Tx$, $T = \mathrm{diag}[t_i]_{i=1}^n$, где $t_i = -1$, $i \in R_-$, $t_i = 1$, $i \in R_+$, придем к задаче вида:

$$f(x) = \frac{1}{2}(T\bar{A}Tx, x) + \frac{1}{2}(Bx_+, x) \to \min_{x \in M},$$

где $\qquad M = \{x \in R^n |\ (TQTx, x) = 1\}.$

В дальнейшем будем считать, что такое преобразование уже проделано и вместо матрицы $T\bar{A}T$ будем писать A, вместо TQT — Q, вместо B — C.

Рассмотрим задачу (см. (6)):

$$f(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) + (Cx_+, x) \to \min_{(Qx_k, x) = 1}.$$

Вводя новые дополнительные переменные y_j, $j \in 1:n$, получаем эквивалентную задачу квадратичного программирования

$$\frac{1}{2}(Ax, x) + \frac{1}{2}(Cy, y) \to \min_{x,y},$$

при ограничениях: $(Qx_k, x) = 2, \quad 0 \le y_j, \quad x_j \le y_j, \quad j \in 1:n.$

Обобщенную задачу на собственные значения в конечномерных пространствах можно решить способом перебора вариантов. Зафиксируем некоторое множество индексов $R_k \in 1:n$ и образуем матрицу $\bar{C} = \mathrm{diag}[\bar{c}_1, \bar{c}_2, ..., \bar{c}_n]$, где $\bar{c}_i = c_i$, для $i \in R_k$, $\bar{c}_i = 0$ для всех остальных i. Решив задачу на собственные значения

$$(A + \bar{C})x = \lambda Qx \tag{11}$$

известными методами линейной алгебры поиска собственных чисел и собственных векторов, проверяем выполнение равенства

$$Ax + Cx_+ = \lambda Qx, \tag{12}$$

где x – – какое-либо решение системы (11), а λ — соответствующее ему собственное число. Таким образом, рассмотрев 2^n вариантов, можно получить все обобщенные собственные числа уравнения

(12). Отсюда следует, что число различных обобщенных собственных чисел уравнения (12) не превосходит $n * 2^n$, а при $Q = E$, (E– единичная матрица), в следствие того, что собственные векторы любой симметричной матрицы ортогональны (и поэтому имеют разный набор положительных и отрицательных компонент), число различных λ, при которых существует нетривиальное решение уравнения (12), не превосходит 2^n. Ниже приводится пример, когда это реализуется. $n = 4$; $Q = E$, В таблице 1 λ– обобщенное собственное число, (x_1, x_2, x_3, x_4)–компоненты соответствующего ему обобщенного собственного вектора.Таким образом в данном примере получается 16 различных обобщенных собственных чисел.

$$A = \begin{pmatrix} 2.50000 & 0.86603 & 0.61237 & 0.35355 \\ 0.86603 & 1.50000 & 0.35355 & 0.20412 \\ 0.61237 & 0.35355 & 2.50000 & 0.28868 \\ 0.35355 & 0.20412 & 0.28868 & 3.50000 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{C} = \mathrm{diag}(4 \quad 3 \quad 2 \quad 1).$$

Таблица 1

N^0	λ	x_1	x_2	x_3	x_4
1	4.00000	-0.50000	-0.28868	-0.40825	-0.70711
2	3.50775	0.17045	-0.05856	-0.19324	0.96466
3	3.52698	-0.11893	0.36683	-0.19794	-0.90117
4	3.47771	0.09873	0.16614	-0.16371	-0.96739
5	3.46618	-0.17295	-0.09985	0.38785	-0.89983
6	3.41196	0.07453	-0.02833	0.22491	-0.97111
7	3.41811	-0.06353	0.15242	0.24131	-0.95630
8	3.40542	0.04943	0.07653	0.20465	-0.97459
9	3.29289	-0.65328	-0.37717	-0.53340	0.38268
10	2.42017	0.17193	-0.18032	-0.96077	0.12182
11	2.66974	-0.50579	0.36654	-0.76063	0.17679
12	2.36014	0.11425	0.10619	-0.98232	0.10351
13	2.67643	-0.80465	-0.46456	0.33576	0.15485
14	1.32962	0.15313	-0.98445	0.07662	0.03933
15	2.07012	-0.93279	0.29862	0.18104	0.08913
16	7.10032	0.88039	0.34434	0.27381	0.17713

3. Сформулированный выше метод последовательных приближений позволяет находить какое-либо, не обязательно минимальное, обобщенное собственное число уравнения (2). Однако на практике чаще всего представляет интерес именно минимальное обобщенное собственное число, которое в задачах устойчивости конструкций имеет смысл наименьшей критической нагрузки. Метод перебора вариантов не может быть реализован в пространствах большой размерности, т.к. число вариантов становится слишком большим.

Образуем функцию

$$\Psi(x,y,\lambda) = \frac{1}{2}(Ax,x) + \frac{1}{2}(Cy,y) - \frac{1}{2}\lambda(Qx,x), \quad . \tag{13}$$

и введем в рассмотрение конус

$$K = \{z = (x,y) \in R^{2n} | 0 \ \le y_j, \ x_j \le y_j, \ j \in 1:n\}.$$

Обозначим через λ_* минимальное собственное число уравнения (12). Ясно, что если $\Psi(x,y,\lambda) > 0$ для всех $z = (x,y) \in K$, то $\lambda < \lambda_*$, и, если найдется точка $z = (x,y) \in K$ такая, что $\Psi(x,y,\lambda) < 0$, то $\lambda > \lambda_*$.

Введем новые переменные $v_j = y_j - x_j$, $j \in 1:n$, и положим $v_{j+n} = y_j$, $j \in 1:n$. Пусть $\bar{A}$, $\bar{Q}$ — матрицы порядка $2n$ следующего вида

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A & -A \\ -A & A+B \end{pmatrix}, \quad \bar{Q} = \begin{pmatrix} Q & -Q \\ -Q & Q \end{pmatrix}.$$

Пусть $\varphi(v) = (\bar{A}v, v)$, и v_* — решение экстремальной задачи:

$$\varphi(v) \to \min_{v \in G}, \tag{14}$$

где

$$G = \{v \in R^{2n} | \quad v_j \ge 0, \ , j \in 1:2n, \ \frac{1}{2}(\bar{Q}v, v) = 1\}.$$

Ясно, что $\lambda_* = \varphi(v_*)$, и при $\lambda \le \lambda_*$ квадратичная форма

$$\bar{\psi}(\lambda; v) = \varphi(v) - \lambda\frac{1}{2}(\bar{Q}v, v)$$

неотрицательно определена на положительном ортанте

$$K_+ = \{v \in R^{2n} | \ v_j \ge 0, \ j \in 1:2n\}.$$

Если же $\lambda > \lambda_*$, то существует вектор $v \in K_+$, такой, что $\bar{\psi}(\lambda; v) < 0$.

Таким образом, задача поиска минимального собственного числа сводится к проблеме идентификации условной положительности квадратичных форм на неотрицательных ортантах. Вопросам получения критериев условной положительности квадратичных форм на неотрицательных ортантах посвящены работы [3,4] . В данных работах проверка критериев неотрицательности сводится к вычислению большого количества определителей и в этом отношении крайне неэкономична.

Известно, что матрицы A и Q неособым преобразованием одновременно можно привести к диагональному виду. Пусть T — матрица такого преобразования, а t_j, $j \in 1:n$ — ее строки. Тогда $T^*AT = \mathrm{diag}[l_1, l_2, ..., l_n]$, $T^*QT = \mathrm{diag}[\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n]$. Сделаем замену переменных в (13) $x = Tv$ и рассмотрим задачу квадратичного программирования

$$\widetilde{\Psi}(v, y, \lambda) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} l_j v_j^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} c_j y_j^2 - \frac{1}{2}\lambda \sum_{j=1}^{n} \mu_j v_j^2 \to \min_{(v,y)\in\widetilde{\Omega}}, \tag{15}$$

где

$$\widetilde{\Omega} = \{z = (v, y) \in R^{2n} |\ y_j \geq 0, \quad (t_j, v) \leq y_j, \quad |v_j| \leq 1, \quad j \in 1:n\}.$$

Пусть $\widetilde{\Psi}_\lambda$ — минимальное значение целевой функции в задаче (15). Если $\widetilde{\Psi}_{\bar\lambda} < 0$, то $\bar\lambda > \lambda_*$. Таким образом можно установить оценку сверху для λ_*. Далее, используя решение задачи (15) методом дихотомии, можно получить последовательность λ_k, сходящуюся к λ_*. Задача (15) представляет собой задачу сепарабельного (вообще говоря невыпуклого) квадратичного программирования. Для ее решения удобно применять метод ветвей и границ [2].

4. Предложенными выше методами можно исследовать задачи на устойчивость упругих систем при жестких односторонних ограничениях на перемещения. В качестве примера рассмотрим задачу о равновесии кольца, находящегося под действием равномерного внешнего гидростатического давления, подкрепленного нитями одностороннего действия. Предполагается, что нити являются нерастяжимыми и оба конца нитей прикреплены к некоторым точкам кольца (таким образом, в процессе деформации кольца расстояние между этими точками не может увеличиваться). Для упрощения записи примем радиус кольца равным 1. Введем обозначения: s — длина дуги кольца $x(s)$, $y(s)$ — декартовы координаты точек деформированного кольца, $\varphi(s)$ — угол между касательной к деформированной оси кольца и осью x, θ — центральный угол, отсчитываемый от оси x, $k(s)$ — кривизна кольца.

Запишем уравнения (см.[1])

$$x'(\theta) = \cos\theta, \quad y'(\theta) = \sin\theta, \quad k(\theta) = \varphi'(\theta). \tag{16}$$

Полная потенциальная энергия кольца имеет вид

$$\widetilde{V} = \frac{B}{2}\int_0^{2\pi}(k-1)^2\,d\theta - \widetilde{W}, \tag{17}$$

где B — жесткость кольца при изгибе, а $\widetilde{W}$ — работа внешних гидростатических сил:

$$\widetilde{W} = -\frac{P}{2}\left[\int_0^{2\pi}(xy' - yx')d\theta - \pi\right].$$

(Выражение в квадратных скобках представляет собой разность площадей, ограниченных кольцом в деформированном и недеформированном состоянии). Пусть $w(\theta)$ и $v(\theta)$ — радиальное и касательное перемещения точек кольца. Тогда, используя формулы

$$x = (1+w)\cos\theta - v\sin\theta, \quad y = (1+w)\sin\theta + v\cos\theta,$$

можно получить:

$$(w' - v)^2 + (1 + w + v')^2 = 1, \tag{18}$$

$$k^2 = (w'' - w - 2v' - 1)^2 + (2w' + v'' - v)^2, \tag{19}$$

$$xy' - yx' = 1 + 2w + w^2 + v' + wv' - vw' + v^2.$$

Уравнение (18) представляет собой условие несжимаемости оси кольца. Из (19) (оставляя в выражении для $k(\theta)$ только линейные слагаемые) получим приближенное выражение для изменения кривизны кольца: $(k(\theta) - 1)^2 \simeq (w'' + w)^2$, и функционал

$$V = \frac{B}{2}\int_0^{2\pi}(w'' + w)^2 d\theta + \frac{p}{2}\int_0^{2\pi} w'(v - w')d\theta. \tag{20}$$

Функционал (20) является квадратичным приближением для функционала (17).

Обратимся теперь к нитям. Пусть один конец j—той нити прикреплен к точке кольца, соответствующей углу $\theta = \tau_{1j}$, а второй — $\theta = \tau_{2j}$. Соответствующие перемещения обозначим: $w_1 = w(\tau_{1j})$, $v_1 = w(\tau_{1j})$, $w_2 = w(\tau_{2j})$, $v_2 = w(\tau_{2j})$, $\alpha_j = \tau_{2j} - \tau_{1j}$, и пусть $\rho_J = 2\sin\frac{\alpha_j}{2}$ — первоначальная длина растяжки. Тогда расстояние между точками прикрепления нити после деформации будет равным

$$\begin{aligned}\rho_J^* &= [(-\rho_J \sin\frac{\alpha_j}{2} + w_2\cos\alpha_j - v_2\sin\alpha_j)^2 + \\ &+ (\rho_J\cos\frac{\alpha_j}{2} + w_2\sin\alpha_j - v_1 \ \ \text{in}\,\alpha_j)^2]^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Или после необходимых преобразований

$$\rho_j^* = \left[\rho_j^2 + 2\rho_j((w_2 + w_1)\sin\frac{\alpha_j}{2} + (v_2 - v_1)\cos\frac{\alpha_j}{2}) + \delta_1^2 + \delta_2^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

где $\delta_1 = w_2\cos\alpha_j - v_2\sin\alpha_j - w_1$, $\delta_2 = w_2\sin\alpha_j - v_2\cos\alpha_j - v_1$. Считая деформации малыми, можно приближенно положить

$$\rho_j^* = \rho_j + (w_2 + w_1)\sin\frac{\alpha_j}{2} + (v_2 - v_1)\cos\frac{\alpha_j}{2}.$$

Если отказаться от условия, что радиус кольца равен 1, функционал (20) будет иметь вид

$$V = \frac{B}{2R^3}\int\limits_0^{2\pi}(w'' + w)^2 d\theta + \frac{p}{2}\int\limits_0^{2\pi} w'(v - w')d\theta$$

Введем безразмерный параметр $\lambda = PR^3/B$. Тогда задача об устойчивости кольца в этом случае формулируется следующим образом: найти минимальное значение параметра λ, при котором вариационная задача

$$V = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}(w'' + w)^2 d\theta + \frac{\lambda}{2}\int\limits_0^{2\pi} w'(v - w')d\theta \to \min \qquad (21)$$

при ограничениях

$$\Delta = (w_2 + w_1)sin\frac{\alpha_j}{2} + (v_2 - v_1)\cos\frac{\alpha_j}{2} \le 0$$

имеет нетривиальное решение.

Функцию $v(\theta)$ будем искать в виде частичной суммы ряда Фурье:

$$v(\theta) = \sum_{j=2}^{N}(a_k \sin k\theta + b_k \cos k\theta),$$

(гармоники $k = 0$ и $k = 1$ соответствуют перемещению кольца как жесткого целого). Тогда, с учетом линеаризованного условия несжимаемости ($w = -v'$), получим конечномерную аппроксимацию задачи (21) :

$$\widetilde{V} = \sum_{k=2}^{N} k^2(k^2-1)^2(a_k^2+b_k^2) - \lambda \sum_{k=2}^{N} k^2(k^2-1)(a_k^2+b_k^2) \to \min_{a_k, b_k} \qquad (22)$$

при ограничениях

$$\Delta\rho_j = \sum_{k=2}^{N} a_k c_k^j + b_k d_k^j \leq 0,$$

где

$$c_k^j = \cos\frac{\alpha_j}{2}(\sin(k\tau_{2j}) - \sin(k\tau_{1j})) - \sin\frac{\alpha_j}{2}(k\cos(k\tau_{2j}) + k\cos(k\tau_{1j})),$$

$$d_k^j = \cos\frac{\alpha_j}{2}(\cos(k\tau_{2j}) - \cos(k\tau_{1j})) + \sin\frac{\alpha_j}{2}(k\sin(k\tau_{2j}) + k\sin(k\tau_{1j})).$$

Задача (22) была решена методом, предложенным в п.3 (в сочетании с методом ветвей и границ), для случая, когда растяжки расположены по сторонам правильного n–угольника ($\alpha_j = \alpha = \frac{2\pi}{M}$, $\tau_{1j} = (j-1)\alpha$, $\tau_{2j} = j\alpha$), M — количество растяжек. Результаты расчетов приведены в Таблице 2.

Таблица 2

M	0	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	8	8	8	8	10	10	12	12	16	16	16
λ_{kp}	3.00	4.32	3.00	4.57	5.27	6.28	6.50	7.26	7.37	7.89	8.05

Для того чтобы вычислить значение критической силы, нужно воспользоваться формулой

$$P_{kp} = \frac{\lambda B}{R^3}.$$

Литература

1. Теория ветвления и нелинейные задачи на собственные значения/ Под ред. Келлера Дж.Б.,Антмана С. М.: Мир, 1974. 255 с.

2. **Сухарев А.Г.** Глобальный экстремум и методы его отыскания// Математические методы в исследовании операций. МГУ, 1983.193 с.

3. **Крепс В.Л.** О квадратичных формах, неотрицательных на ортанте//*ЖВМ и МФ.* 1984. Т.24.№4. С.497–503.

4. **Рапопорт Л.Б.** Устойчивость по Ляпунову и знакоопределенность квадратичной формы на конусе//*ПММ.* 1986. Т.50. Вып.4. С.674–679.

Summary

Tarasov V.N. The problems on eigenvalues for positively homogeneous operators.

The problem on eigenvalues for positively homogeneous operators and its application for stability calculation of elastic systems under onesided constraints for displacements is considered.

Сыктывкарский университет

Поступила 12.01.95