

УДК 539.3

НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ОВАЛЬНОСТЬЮ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

В.Л.Никитенков

В данной работе на основе полученных нелинейных уравнений решены две задачи для эллиптического кольца при произвольных внешних механических воздействиях.

В данной работе (следуя [1,2]) излагается вывод нелинейных (с удержанием квадратичных слагаемых) уравнений равновесия для цилиндрической оболочки с эллиптической овальностью поперечного сечения, на основе которых решены следующие задачи: - определение нагрузки, обеспечивающей переход от эллиптической формы поперечного сечения к круговой; - расчет деформированной конфигурации поперечного сечения под действием произвольной нагрузки (в частности, избыточного внутреннего давления). Полученные результаты могут быть использованы для уточненного прочностного анализа горизонтальных автоклавов - большегрузных горизонтальных сосудов давления, которые часто в силу ряда причин (технологические возможности оборудования, условия транспортировки и монтажа и др.) имеют некоторую овальность поперечного сечения (отклонение от круговой формы), достаточно хорошо аппроксимируемую эллипсом с полуосями a и b . Расчеты овальных автоклавов от действия избыточного внутреннего давления [3] дают завышенные значения параметров напряженно деформированного состояния (НДС), что привело к установлению жестких государственных норм по рабочему давлению для овальных автоклавов. Напротив опыт эксплуатации подтверждает длительные сроки безопасной наработки автоклавов со сверхнормативной (3%) овальностью и убеждает в необходимости пересмотра существующих норм

1. Вывод уравнений равновесия

Рассмотрим цилиндрическую оболочку, поперечное сечение которой есть эллипс с полуосями a и b (рис. 1). Материал, из которого изготовлена оболочка, согласуется с теоретическим материалом STM-2. Отнесем срединную поверхность недеформированной оболочки к ортогональным координатам $\{\alpha_1, \alpha_2\}$

$$\alpha_1 = \frac{z}{a}, \quad \alpha_2 = \varphi$$

Уравнение недеформированной срединной поверхности имеет вид

$$\mathring{\mathbf{r}} = a \sin \alpha_2 \mathbf{i} + b \cos \alpha_2 \mathbf{j} + a \alpha_1 \mathbf{k} \quad (1.1)$$

На основании (1.1) запишем выражения для следующих геометрических параметров недеформированной срединной поверхности:
- вектора основного и взаимного базисов;

$$\begin{aligned} \mathring{\mathbf{r}}_1 &= \frac{\partial \mathring{\mathbf{r}}}{\partial \alpha_1} = a \mathbf{k}, & \mathring{\mathbf{r}}_2 &= \frac{\partial \mathring{\mathbf{r}}}{\partial \alpha_2} = a \cos \alpha_2 \mathbf{i} - a \sqrt{1 - \varepsilon^2} \sin \alpha_2 \mathbf{j}; \\ \mathring{\mathbf{r}}^1 &= \frac{1}{a} \mathbf{k}, & \mathring{\mathbf{r}}^2 &= \frac{1}{a(\cdot)} (\cos \alpha_2 \mathbf{i} - \sqrt{1 - \varepsilon^2} \sin \alpha_2 \mathbf{j}); \\ \mathring{\mathbf{n}} &= \frac{1}{\sqrt{(\cdot)}} (\sqrt{1 - \varepsilon^2} \sin \alpha_2 \mathbf{i} + \cos \alpha_2 \mathbf{j}); \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$(\cdot) = 1 - \varepsilon^2 \sin^2 \alpha_2, \quad \varepsilon^2 = 1 - a^2/b^2$$

- компоненты метрического тензора срединной поверхности и параметры Ламе;

$$\begin{aligned} \mathring{a}_{11} &= a^2; \quad \mathring{a}_{12} = 0; \quad \mathring{a}_{22} = a^2(\cdot); \\ A_1 &= \sqrt{\mathring{a}_{11}} = a, \quad A_2 = \sqrt{\mathring{a}_{22}} = a \sqrt{(\cdot)}; \end{aligned} \quad (1.3)$$

- производные координатных векторов и физические компоненты тензора кривизны ($\mathring{b}_{\langle ij \rangle} = \mathring{\mathbf{r}}_{ij} \mathring{\mathbf{n}} / \sqrt{\mathring{a}_{ii} \mathring{a}_{jj}}$);

$$\mathring{\mathbf{r}}_{11} = \mathring{\mathbf{r}}_{12} = 0, \quad \mathring{\mathbf{r}}_{22} = -a \sin \alpha_2 \mathbf{i} - a \sqrt{1 - \varepsilon^2} \cos \alpha_2 \mathbf{j};$$

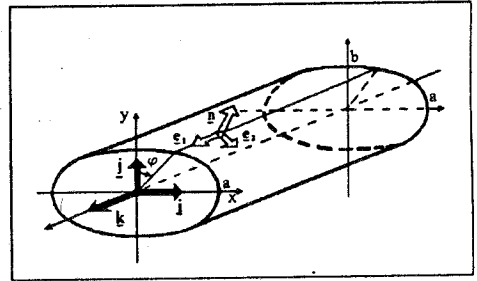


Рис. 1

$$\begin{aligned} \dot{b}_{\langle 11 \rangle} &= \dot{\sigma}_1 = -\frac{1}{R_1} = 0, \quad \dot{b}_{\langle 12 \rangle} = -\tau = \frac{1}{R_{12}} = 0, \\ \dot{b}_{\langle 22 \rangle} &= \dot{\sigma}_2 = -\frac{1}{R_2} = -\frac{g}{a\sqrt{(\cdot)}}; \quad \left(g = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{(\cdot)} \right) \end{aligned} \quad (1.4)$$

- поверхностные символы Кристоффеля второго рода;

$$\text{все } \Gamma_{ij}^k = 0 \quad \text{кроме} \quad \Gamma_{22}^2 = -\frac{\varepsilon^2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_2}{(\cdot)} \quad (1.5)$$

1.1. Деформация срединной поверхности

Предположим, что уравнение (1.1) в результате деформации принимает вид

$$\mathbf{r} = \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{u} = u_\alpha \dot{\mathbf{e}}_\alpha + w \mathbf{n}$$

В соответствии с правилами дифференцирования

$$\partial \dot{s}_1 = a \partial \alpha_1, \quad \partial \dot{s}_2 = a \sqrt{(\cdot)} \partial \alpha_2$$

после определения величин

$$\begin{aligned} e_{\langle 11 \rangle} &= \frac{1}{a} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1}, \quad e_{\langle 12 \rangle} = \frac{1}{a} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2}, \quad e_{\langle 21 \rangle} = \frac{1}{a \sqrt{(\cdot)}} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2}, \\ e_{\langle 22 \rangle} &= \frac{1}{a \sqrt{(\cdot)}} \left(\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + gw \right); \quad \vartheta_{\langle 1 \rangle} = -\frac{1}{a} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1}, \\ \vartheta_{\langle 2 \rangle} &= \frac{1}{a \sqrt{(\cdot)}} \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha_2} + gu_2 \right); \end{aligned} \quad (1.6)$$

приходим к следующим формулам для компонент метрического тензора деформированной поверхности и физических компонент тензора деформации Грина-Лагранжа, приведенных к недеформированной поверхности (ниже отбрасываются произведения, содержащие $(\partial^q u_i / \partial \alpha_j^q) \cdot (\partial^p w / \partial \alpha_k^p)$, т.к. в последующие выражения для усилий и моментов, а также в уравнения равновесия не входят (с учетом принятого допущения о сохранении только квадратичных слагаемых)):

$$\begin{aligned} a_{11} &= a^2 \left[1 + \frac{2}{a} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha_1} \right)^2 \right], \\ a_{12} &= a_{21} = a \sqrt{(\cdot)} \left(\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{\sqrt{(\cdot)}} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} \right) - \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2}, \end{aligned}$$

$$a_{22} = a^2(\cdot) \left\{ 1 + \frac{2}{a\sqrt{(\cdot)}} \left(\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + gw \right) + \frac{1}{a^2\sqrt{(\cdot)}} \left[g^2 w^2 - \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha_2} \right)^2 \right] \right\};$$

$$\varepsilon_{\langle 11 \rangle} = \frac{1}{2}(a_{11} - \dot{a}_{11}) = \frac{1}{a} \left[\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{2a} \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha_1} \right)^2 \right],$$

$$\varepsilon_{\langle 22 \rangle} = \frac{1}{2}(a_{22} - \dot{a}_{22}) = \frac{1}{a\sqrt{(\cdot)}} \left\{ \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + gw + \frac{1}{2a\sqrt{(\cdot)}} \left[g^2 w^2 - \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha_2} \right)^2 \right] \right\},$$

$$\varepsilon_{\langle 12 \rangle} = \varepsilon_{\langle 21 \rangle} = \frac{1}{2} a_{12} \quad (1.7)$$

В соответствии с [2] запишем выражения для физических компонент вектора нормали к деформированной поверхности

$$\tilde{e} = \frac{1}{a} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{a\sqrt{(\cdot)}} \left(\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + gw \right),$$

$$\tilde{\vartheta}_{\langle 1 \rangle} = -\frac{1}{a} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} - \frac{g}{a^2\sqrt{(\cdot)}} w \frac{\partial w}{\partial \alpha_1}, \quad \tilde{\vartheta}_{\langle 2 \rangle} = -\frac{1}{a\sqrt{(\cdot)}} \left(-\frac{\partial w}{\partial \alpha_2} + gu_2 \right) \quad (1.8)$$

Используя формулы (1.4) - (1.8), а также принятое определение

$$\kappa_{ij} = \dot{b}_{ij} - b_{ij} \quad (1.9)$$

(здесь полагаем $\lambda_\xi = 1$) на основании [2] нетрудно окончательно получить формулы для компонент тензора кривизны деформированной поверхности и параметров изменения кривизны

$$b_{\langle 11 \rangle} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2}, \quad b_{\langle 12 \rangle} = \frac{1}{a^2\sqrt{(\cdot)}} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} - g \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} \right) - \frac{g}{a\sqrt{(\cdot)}} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} \right],$$

$$b_{\langle 22 \rangle} = \frac{1}{a^2(\cdot)} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_2^2} - 2g \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} - g^2 w - g\sqrt{(\cdot)}a \right) - \frac{2g}{a\sqrt{(\cdot)}} \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha_2} \right)^2 \right],$$

$$\kappa_{\langle 11 \rangle} = -b_{\langle 11 \rangle}, \quad \kappa_{\langle 12 \rangle} = -b_{\langle 12 \rangle},$$

$$\kappa_{\langle 22 \rangle} = -\frac{1}{a^2\sqrt{(\cdot)}} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_2^2} - 2g \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} - g^2 w - \frac{2g}{a\sqrt{(\cdot)}} \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha_2} \right)^2 \right] \quad (1.10)$$

1.2. Усилия и моменты. Уравнения равновесия

Подставляя выражения (1.3), (1.7), (1.10) для \dot{a}_{ij} , a_{ij} , ε_{ij} , b_{ij} , κ_{ij} и получаемые на их основе формулы для смешанных компонент тензора кривизны b_i^j в определяющие соотношения упругости для STM-2 (при выводе которых вместо граничных условий на лицевых поверхностях используется модифицированная статическая гипотеза Кирхгофа), приходим к следующим формулам для усилий и моментов в оболочке (в квадратные скобки заключены нелинейные слагаемые и отброшены слагаемые порядка h/a по сравнению с единицей):

$$\begin{aligned}
 T^{11} &= \frac{B}{a^3} \left\{ \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\nu}{\sqrt{(\cdot)}} \left(\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + gw \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2a} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial \alpha_1} \right)^2 + \frac{\nu}{(\cdot)} \left(\left(\frac{\partial w}{\partial \alpha_2} \right)^2 - g^2 w^2 \right) \right] \right\}, \\
 T^{22} &= \frac{B}{a^3 (\cdot)} \left\{ \frac{1}{\sqrt{(\cdot)}} \left(\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + gw \right) + \nu \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} - \right. \\
 &\quad \left. - h_0 \frac{g}{\sqrt{(\cdot)}} \left(\frac{1}{(\cdot)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_2^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2} \right) \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2a} \left[\frac{1}{(\cdot)} \left(g^2 w^2 - \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha_2} \right)^2 \right) - \nu \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha_1} \right)^2 \right] \right\}, \\
 T^{12} &= (1 - \nu) \frac{B}{a^3 \sqrt{(\cdot)}} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{\sqrt{(\cdot)}} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} \right) - h_0 \frac{g}{(\cdot)} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2a \sqrt{(\cdot)}} \left[g^2 w^2 - \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha_2} \right)^2 + h_0 \frac{2g^2}{(\cdot)} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} \right] \right\}, \\
 T^{21} &= (1 - \nu) \frac{B}{a^3 \sqrt{(\cdot)}} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{\sqrt{(\cdot)}} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2a \sqrt{(\cdot)}} \left[g^2 w^2 - \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha_2} \right)^2 \right] \right\}; \\
 M^{11} &= -\frac{D}{a^4} \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2} + \frac{\nu}{(\cdot)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2} - 2g \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} - g^2 w \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \left[\frac{2g\nu}{a (\cdot)^{3/2}} \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha_2} \right)^2 \right] \right\},
 \end{aligned}$$

$$M^{22} = -\frac{D}{a^4(\cdot)} \left\{ \nu \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2} + \frac{1}{(\cdot)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_2^2} - 2g \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} - g^2 w \right) - \left[\frac{2g}{a(\cdot)^{3/2}} \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha_2} \right)^2 \right] \right\},$$

$$M^{12} = -(1-\nu) \frac{D}{a^4(\cdot)} \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} - g \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} - \left[\frac{g}{a\sqrt{(\cdot)}} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} \right] \right\} \quad (1.11)$$

Здесь

$$B = \frac{Eh}{(1-\nu^2)}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad h_0 = \frac{h^2}{12a^2} \quad (1.11')$$

Вычисляя поверхностные символы Кристоффеля второго рода для деформированной поверхности [2], имеем

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{a} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha_1^2}, \quad \Gamma_{11}^2 = \frac{1}{a\sqrt{(\cdot)}} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha_1^2}, \quad \Gamma_{22}^1 = \frac{1}{a} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha_2^2} - \frac{g}{\sqrt{(\cdot)}} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} \right),$$

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{a\sqrt{(\cdot)}} \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha_2^2} + g \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} \right) + \overset{\circ}{\Gamma}_{22}^2, \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{1}{a} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2},$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{a\sqrt{(\cdot)}} \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + g \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} \right) \quad (1.12)$$

Подставляя найденные величины в уравнения равновесия [1], в усилиях и моментах, приходим к системе трех нелинейных (в соответствии с принятой квадратичной аппроксимацией) разрешающих уравнений равновесия оболочки относительно трех перемещений u_1, u_2, w , в матричной форме записи

$$L\mathbf{u} + \frac{1}{a} \mathbf{G}(w) = -\frac{a^2(\cdot)}{B} \mathbf{q}, \quad (1.13)$$

где

$L = \|L_{ij}\|$, $i, j = 1:3$ - матрица из операторов дифференцирования соответствующих линейной теории оболочек;

$\mathbf{G}(w) = [G_1(w), G_2(w), G_n(w)]$ - вектор нелинейных добавок;

$\mathbf{q} = [q^1, q^2, q^n]$ - вектор действующих нагрузок;

$\mathbf{u} = [u_1, u_2, w]$ - вектор смещений.

Здесь

$$L_{11} = \frac{(1-\nu) \partial^2(\cdot)}{2 \partial \alpha_2^2} + (\cdot) \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial \alpha_1^2} - \frac{(1-\nu) \overset{\circ}{\Gamma}_{22}^2}{2} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2},$$

$$\begin{aligned}
L_{12} &= L_{21} = \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2}, \\
L_{13} &= -L_{31} = -g\sqrt{(\cdot)}\nu\frac{\partial(\cdot)}{\partial\alpha_1} \\
L_{22} &= \frac{(1-\nu)}{2}\sqrt{(\cdot)}\frac{\partial^2(\cdot)}{\partial\alpha_1^2} + \frac{1}{\sqrt{(\cdot)}}\frac{\partial^2(\cdot)}{\partial\alpha_2^2} - \overset{\circ}{\Gamma}_{22}^2\frac{1}{\sqrt{(\cdot)}}\frac{\partial(\cdot)}{\partial\alpha_2} + \\
&\quad + \frac{h_0}{\sqrt{(\cdot)}}\left(\frac{(2-\nu)}{2}\frac{\partial^2(\cdot)}{\partial\alpha_1^2} + 4\frac{g^2}{(\cdot)}\frac{\partial^2(\cdot)}{\partial\alpha_2^2} - \overset{\circ}{\Gamma}_{22}^2 18g^2\frac{\partial(\cdot)}{\partial\alpha_2}\right), \\
L_{23} &= \frac{g}{\sqrt{(\cdot)}}\frac{\partial(\cdot)}{\partial\alpha_2} - \overset{\circ}{\Gamma}_{22}^2\frac{g}{\sqrt{(\cdot)}}(\cdot) - \frac{h_0}{\sqrt{(\cdot)}}\left[2g\frac{\partial^3(\cdot)}{\partial\alpha_1^2\partial\alpha_2} + 2\frac{g}{(\cdot)}\frac{\partial^3(\cdot)}{\partial\alpha_2^3} + \right. \\
&\quad \left. + \overset{\circ}{\Gamma}_{22}^2\left(6\frac{g^3}{(\cdot)}(\cdot) - \nu g\frac{\partial^2(\cdot)}{\partial\alpha_1^2} - 5\frac{g}{(\cdot)}\frac{\partial^2(\cdot)}{\partial\alpha_2^2}\right)\right], \\
L_{32} &= -g\frac{\partial(\cdot)}{\partial\alpha_2} + h_0\left[2g\frac{\partial^3(\cdot)}{\partial\alpha_1^2\partial\alpha_2} + 2\frac{g}{(\cdot)}\frac{\partial^3(\cdot)}{\partial\alpha_2^3} + \right. \\
&\quad \left. + \overset{\circ}{\Gamma}_{22}^2\left(18\frac{g}{(\cdot)}\frac{\partial^2(\cdot)}{\partial\alpha_2^2} - 3(2-\nu)g\frac{\partial^2(\cdot)}{\partial\alpha_1^2}\right)\right], \\
L_{33} &= -g^2(\cdot) - h_0\left[\frac{\partial^4(\cdot)}{(\cdot)\partial\alpha_1^4} + 2\frac{\partial^4(\cdot)}{\partial\alpha_1^2\partial\alpha_2^2} + \frac{1}{(\cdot)}\frac{\partial^4(\cdot)}{\partial\alpha_2^4} - 2g^2\nu\frac{\partial^2(\cdot)}{\partial\alpha_1^2} - \right. \\
&\quad \left. - 2\frac{g^2}{(\cdot)}\frac{\partial^2(\cdot)}{\partial\alpha_2^2} + \overset{\circ}{\Gamma}_{22}^2\left((5-\nu)\frac{\partial^3(\cdot)}{\partial\alpha_1^2\partial\alpha_2} + \frac{5}{(\cdot)}\frac{\partial^3(\cdot)}{\partial\alpha_2^3}\right)\right]; \quad (1.13')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_2(w) &= \tilde{G}_2(w) + h_0\hat{G}_2(w), \\
\tilde{G}_2(w) &= (1-\nu)gw\frac{\partial w}{\partial\alpha_1} + \frac{g^2}{(\cdot)}w\frac{\partial w}{\partial\alpha_2} - \frac{1}{(\cdot)}\frac{\partial w}{\partial\alpha_2}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha_2^2} - \\
&\quad - (1-\nu)\frac{\partial w}{\partial\alpha_2}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2} + \nu\frac{\partial w}{\partial\alpha_1}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2} + \\
&\quad + \overset{\circ}{\Gamma}_{22}^2\left(\frac{1}{2}\frac{g^2}{(\cdot)}w^2 + \frac{1}{(\cdot)}\left(\frac{\partial w}{\partial\alpha_2}\right)^2\right), \\
\hat{G}_2(w) &= 2\frac{g^2}{(\cdot)}w\frac{\partial^3 w}{\partial\alpha_1^2\partial\alpha_2} + \frac{g^2}{(\cdot)}2(1-\nu)\frac{\partial w}{\partial\alpha_2}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha_1^2} + 2\frac{g^2}{(\cdot)^2}w\frac{\partial^3 w}{\partial\alpha_2^3} + \\
&\quad + \frac{\partial^2 w}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2}\frac{\partial^3 w}{\partial\alpha_1^3} + \frac{1}{(\cdot)^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha_2^2}\frac{\partial^3 w}{\partial\alpha_1^3} + \frac{1}{(\cdot)}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2}\frac{\partial^3 w}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2^2} + \\
&\quad + \frac{1}{(\cdot)}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha_2^2}\frac{\partial^3 w}{\partial\alpha_1^2\partial\alpha_2} + \overset{\circ}{\Gamma}_{22}^2\left(\frac{g^2}{(\cdot)^2}w\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha_2^2} - \frac{g^2}{(\cdot)}\nu w\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha_1^2} - \right.
\end{aligned}$$

$$-\frac{2}{(\cdot)^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_2^2} \right)^2 - \frac{(1-\nu)}{(\cdot)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} \right)^2 \Bigg);$$

$$G_n(w) = \tilde{G}_n(w) + h_0 \hat{G}_n(w),$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_n(w) = & \nu g \sqrt{(\cdot)} w \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2} + \frac{g}{\sqrt{(\cdot)}} w \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_2^2} + \frac{g\nu}{2\sqrt{(\cdot)}} \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha_1} \right)^2 + \\ & + \frac{g}{2\sqrt{(\cdot)}} \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha_2} \right)^2 - \frac{g^3}{2\sqrt{(\cdot)}} w^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{G}_n(w) = & g \sqrt{(\cdot)} w \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha_1^4} + \frac{2g}{\sqrt{(\cdot)}} w \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha_1^2 \partial \alpha_2^2} + \frac{g}{(\cdot)^{3/2}} w \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha_2^4} - \\ & - (1-6\nu) \frac{g}{\sqrt{(\cdot)}} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} \right)^2 + (2+3\nu) \frac{g}{\sqrt{(\cdot)}} \times \\ & \times \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha_1^2 \partial \alpha_2} + (2-4\nu + \frac{1}{(\cdot)}) \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_2^2} + \\ & + (\nu + \frac{1}{(\cdot)}) \frac{g}{\sqrt{(\cdot)}} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2^2} + \nu \frac{g}{\sqrt{(\cdot)}} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2} \right)^2 + \\ & + \frac{2g}{\sqrt{(\cdot)}} \frac{1}{(\cdot)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_2^2} \right)^2 + \nu \frac{g}{\sqrt{(\cdot)}} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha_1^3} + \frac{3g^3}{\sqrt{(\cdot)}} \frac{1}{(\cdot)} w \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} - \\ & - \overset{\circ}{\Gamma}_{22}^2 \left[(2+\nu) \frac{g}{\sqrt{(\cdot)}} w \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha_1^2 \partial \alpha_2} + (8-10\nu) \frac{g}{\sqrt{(\cdot)}} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2} + \right. \\ & + 6\nu \frac{g}{\sqrt{(\cdot)}} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + \frac{5g}{\sqrt{(\cdot)}} \frac{1}{(\cdot)} w \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha_2^3} - \frac{3g^3}{\sqrt{(\cdot)}} \frac{1}{(\cdot)} w \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} + \\ & \left. + \frac{38g}{\sqrt{(\cdot)}} \frac{1}{(\cdot)} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_2^2} \right] \quad (1.13'') \end{aligned}$$

При переходе к круговой цилиндрической оболочке, параметры ε^2 , $\overset{\circ}{\Gamma}_{22}^2$ обращаются в ноль, а g и (\cdot) становятся равными единице. При линеаризации в левой части (1.13) отбрасывается второе слагаемое. Линейная часть операторов L_{ij} для круговой цилиндрической оболочки приведена в таблице, где слагаемые, отмеченные сдвоенной линией, отличаются коэффициентами от соответствующих членов в известных уравнениях линейной теории (см. [4], стр.41), а подчеркнутые штриховой линией в них отсутствуют.

Таблица

	1	2	3
1	$\frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial \alpha_2^2} + \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial \alpha_1^2}$	$\frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}$	$\nu \frac{\partial(\cdot)}{\partial \alpha_1}$
2	$\frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}$	$\frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial \alpha_1^2} + \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial \alpha_2^2} + h_0 \times$ $\times \left[2(1-\nu) \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial \alpha_1^2} + 4 \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial \alpha_2^2} \right]$ =====	$\frac{\partial(\cdot)}{\partial \alpha_2} - h_0 \times$ $\times \left[2 \frac{\partial^3(\cdot)}{\partial \alpha_1^2 \partial \alpha_2} + 2 \frac{\partial^3(\cdot)}{\partial \alpha_2^3} \right]$ =====
3	$-\nu \frac{\partial(\cdot)}{\partial \alpha_1}$	$-\frac{\partial(\cdot)}{\partial \alpha_2} + h_0 \left[2 \frac{\partial^3(\cdot)}{\partial \alpha_1^2 \partial \alpha_2} + \right.$ $\left. + 2 \frac{\partial^3(\cdot)}{\partial \alpha_2^3} - 2 \frac{\partial(\cdot)}{\partial \alpha_2} \right]$ ===== - - -	$-(\cdot) - h_0 \left[\Delta^2(\cdot) - \right.$ $\left. - 2\nu \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial \alpha_1^2} - 2 \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial \alpha_2^2} \right]$ -----

Причина здесь заключается в том, что в линейной теории упрощающие предположения делаются в процессе вывода разрешающих уравнений. Так в [4] (стр. 30) параметр κ_2 ($\hat{\kappa}_2 = a\kappa_{(22)}$ в (1.10)) берется в виде

$$\hat{\kappa}_2 = \frac{1}{R} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_2^2} + \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} \right) = \hat{\kappa}_2 - \frac{\varepsilon_2}{R} \quad (1.14)$$

(отбрасывается слагаемое, связанное с удлинением срединной поверхности). Если в линейном варианте последней формулы (1.10) отбросить слагаемое $-g^2 w$ (т.е. положить $\hat{\kappa}_2 = \hat{\kappa}_2$) и подсчитать заново усилия и моменты, то придем к разрешающей системе, полностью совпадающей с приведенной в [4]. Вообще, что касается уравнений линейной теории оболочек, то следует отметить, что существуют два пути их вывода. В первом различные допущения и упрощающие предположения делаются в процессе получения соотношений для геометрических и силовых параметров путем их дополнительного анализа. Второй путь состоит в том, что после вывода разрешающих уравнений в рамках нелинейной теории, производится их непосредственная линеаризация.

2. Две задачи для эллиптического кольца под действием произвольной нагрузки

Запишем разрешающую систему (1.13) для эллиптического кольца

($\partial^k u_2 / \partial \alpha_1^k = 0$, $\partial^k w / \partial \alpha_1^k = 0$, $\partial^k / \partial \alpha_2^k = 0$) под действием произвольной нагрузки, взяв для этого второе и третье уравнения системы и исключив из последнего $\partial u_1 / \partial \alpha_1$ с помощью соотношения $T_{11} = 0$. Тогда имеем

$$\frac{1}{\sqrt{(\cdot)}} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha_2^2} + \frac{g}{\sqrt{(\cdot)}} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} - h_0 \frac{2g}{(\cdot)\sqrt{(\cdot)}} \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha_2^3} + \frac{1}{a} G_2(\alpha_2) = -P_2(\alpha_2) \frac{a^2 (\cdot)}{B}$$

$$-g(1 - \nu^2) \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + h_0 \frac{2g}{(\cdot)} \frac{\partial^3 u_2}{\partial \alpha_2^3} - g^2(1 - \nu^2) w -$$

$$-\frac{h_0}{(\cdot)} \left[\frac{\partial^4 w}{\partial \alpha_2^4} - 2g^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_2^2} \right] + \frac{1}{a} G_n(\alpha_2) = -P_n(\alpha_2) \frac{a^2 (\cdot)}{B} \quad (2.1)$$

Здесь P_2 , P_n - тангенциальная и нормальная составляющие нагрузки на кольцо; $G_2(\alpha_2)$, $G_n(\alpha_2)$ - нелинейные добавки;

$$G_2(\alpha_2) = \frac{1}{(\cdot)} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} \left(g^2 w - \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_2^2} \right) + \frac{h_0}{(\cdot)^2} \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha_2^3} \left(2g^2 w + \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_2^2} \right),$$

$$G_n(\alpha_2) = \frac{g}{\sqrt{(\cdot)}} \left\{ w \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_2^2} + \frac{(1 - \nu^2)}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha_2} \right)^2 - \frac{(1 - \nu^2)}{2} g^2 w^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{h_0}{(\cdot)} \left[w \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha_2^4} + 2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_2^2} \right)^2 + 3 \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha_2^3} \right] \right\} \quad (2.1')$$

Добавляя к (2.1) условия периодичности по α_2 на перемещения u_2 , w и их производные, получим краевую задачу в перемещениях для эллиптического кольца.

Сначала рассмотрим вопрос об отыскании нагрузки, при которой деформированной конфигурацией является круговое сечение, контур которого удлиняется на величину, соответствующую нормальному перемещению

$$w_0 = Pr_0^2 / Eh, \quad (2.2)$$

где r_0 - радиус кругового кольца с длиной окружности, равной длине контура исходного эллипса.

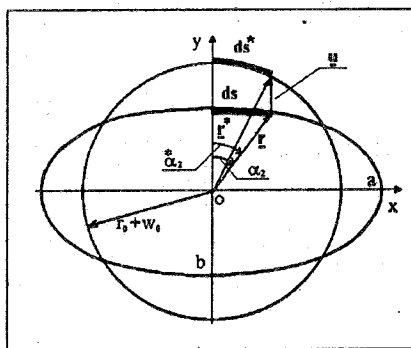


Рис. 2

⊙ В случае кругового кольца искомой нагрузкой будет избыточное внутреннее давление

$$P_0 = \frac{w_0 E h}{r_0^2}$$

⊙ В соответствии с рис.2 запишем условие нерастяжимости контура (без учета раздувания)

$$r_0 d\alpha^* = ds = a \sqrt{(\cdot)} d\alpha_2 \quad (2.3)$$

Откуда находим

$$r_0 = \frac{2}{\pi} a E(\varepsilon), \quad \alpha_2^* = \frac{a}{r_0} E(\varepsilon, \alpha_2), \quad \partial \alpha_2^* / \partial \alpha_2 = \frac{a}{r_0} \sqrt{(\cdot)} \quad (2.4)$$

($E(\varepsilon)$, $E(\varepsilon, \alpha_2)$) - полный и неполный эллиптические интегралы второго рода). Так как известна деформированная конфигурация, легко можно выписать компоненты вектора перемещений

$$\begin{aligned} u_2(\alpha) = & \frac{r}{\sqrt{(\cdot)}} \left(\sin(\alpha_2^*) \cos(\alpha_2) - \sqrt{1 - \varepsilon^2} \cos(\alpha_2^*) \sin(\alpha_2) \right) - \\ & - \frac{a}{\sqrt{(\cdot)}} \varepsilon^2 \sin(\alpha_2) \cos(\alpha_2) \\ w(\alpha_2) = & \frac{r}{\sqrt{(\cdot)}} \left(\sqrt{1 - \varepsilon^2} \sin(\alpha_2^*) \sin(\alpha_2) + \cos(\alpha_2^*) \cos(\alpha_2) \right) - \\ & - \frac{a}{\sqrt{(\cdot)}} \sqrt{1 - \varepsilon^2} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь $r = r_0 + w_0$.

Используя формулы (2.4) для дифференцирования выражений (2.5) и подставляя найденные производные во второе уравнение (2.1), получаем искомую нагрузку $P(\alpha_2) = (P_2(\alpha_2), P_n(\alpha_2))$. Эпюра нормальной и касательной нагрузок, обеспечивающих переход эллиптического кольца в круговое, приведена на рис.3,4,5. В расчетном примере взято кольцо со следующими параметрами:

$a \in [100.5, 110]$ (см.), $b \in [90, 99.5]$ (см.), $h = 1.4$ см., $P_0 = 1.2$ МПа.

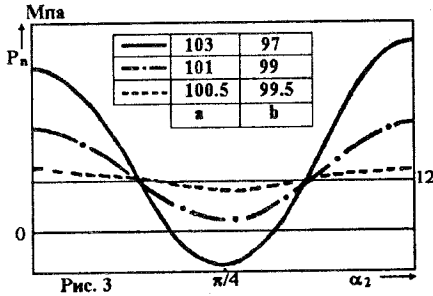


Рис. 3

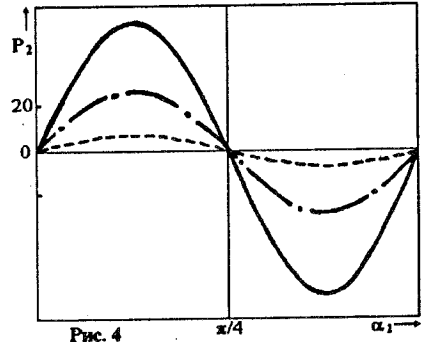


Рис. 4

На рис. 3,4 показано изменение нагрузок, с увеличением эксцентриситета исходного эллипса. Интересно отметить, что при $P_0 = 0$ искомые нагрузки достаточно хорошо аппроксимируются функциями $\bar{P}_2 = C_2 \sin(2\alpha_2)$, $\bar{P}_n = C_n \cos(2\alpha_2)$. Из рис. 5 (левая половина) хорошо видно, что уже при небольших эксцентриситетах нагрузка в

нелинейном случае значительно отличается от линейной не только по величине, но и качественно. Имея первоначально характер растяжения, нормальная нагрузка при увеличении эксцентриситета переходит в сжатие для точек дуг эллипса в средней части между полюсами (см. рис. 3 и 5 (правая половина)).

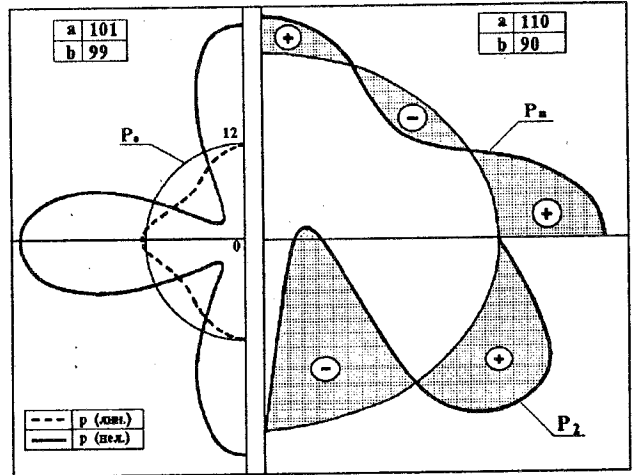


Рис. 5

Рассмотрим теперь задачу отыскания перемещений, удовлетворяющих системе (2.1) с условиями периодичности. Используя метод Фурье (перемещение u_2 ищется в виде тригонометрического ряда по функциям $\sin(k\alpha_2)$, а прогиб w по функциям $\cos(k\alpha_2)$), приходим к следующей нелинейной системе алгебраических уравнений:

$$A\bar{u} + \bar{G}(\bar{u}) = q \quad (2.6)$$

где A - квадратная матрица порядка $2k_0+1$ (k_0 - число гармоник, удерживаемых при разложении перемещений в тригонометри-

ческие ряды Фурье);

$$\bar{u} = [u_{21}, \dots, u_{2k_0}, w_0, w_1, \dots, w_{k_0}];$$

$$\bar{G} = \left[\left(\frac{1}{a} G_2 \right)_1, \dots, \left(\frac{1}{a} G_2 \right)_{k_0}, \left(\frac{1}{a} G_n \right)_0, \left(\frac{1}{a} G_n \right)_1, \dots, \left(\frac{1}{a} G_n \right)_{k_0} \right];$$

$$q = [P_2^1, \dots, P_2^{k_0}, P_n^0, P_n^1, \dots, P_n^{k_0}]$$

(\bar{G} , q - вектора коэффициентов Фурье нелинейных добавок и правой части в (2.1)). Попытки применения итерационных схем для решения системы (2.6) успехом не увенчались, по причине неустойчивости решения. Так, подстановка в (2.6) нагрузки найденной из решения предыдущей задачи и "почти" соответствующих им перемещений (измененных на незначительные приращения) приводила к расходимости итерационного процесса. Это обстоятельство побудило обратиться для решения системы (2.6) к постановке задачи оптимизации

$$f(x) = \frac{1}{2} \|x - x_0 + \bar{x}\| \rightarrow \min, \quad (2.7)$$

где

$$Lx_0 = q, \quad L\bar{x} = G(x)$$

К последней применялся метод наискорейшего спуска в комбинации с методом сопряженных градиентов. Эпюры $r^*(\alpha_2)$ для эллипса под действием избыточного внутреннего давления приведены на рис. 6 и 7, из которых видно отклонение формы кольца от круговой при различных значениях давления.

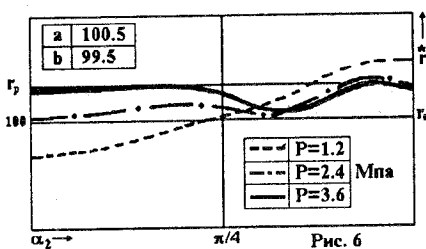


Рис. 6

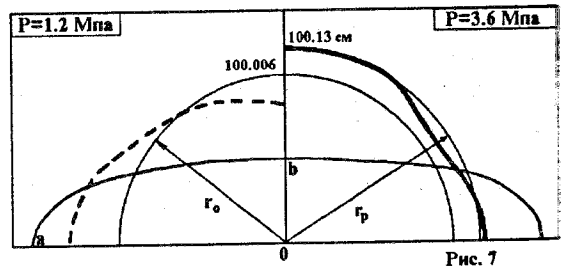


Рис. 7

Причем, $r^*(\alpha_2)$ на рис.7 (правая половина) можно рассматривать в качестве радиус-вектора деформированной конфигурации чисто условно, так как напряжения для кругового кольца при заданном давлении превышают предел текучести материала кольца.

Отметим также, что система (2.6) имеет не единственное решение. В частности, использование линейного приближения x_0 в качестве начального для задачи (2.7) приводит к решению, которое качественно отличается от истинного (последнее проверено, используя решение предыдущей задачи о переходе эллиптического сечения в круговое).

Литература

1. Черных К.Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Л.: Машиностроение, 1986.336с.
2. Никитенков В.Л. Деформационный вариант нелинейных уравнений статики ребристых оболочек// Автоклавы. Расчет, проектирование, опыт эксплуатации:Тр. Всесоюзного семинара "Автоматизация инженерных расчетов при проектировании автоклавов" /Под ред. проф. Е.И.Михайловского. Сыктывкар, 1992.С.168-197.
3. Доценко В.Д. Исследование влияния овальности на напряженно-деформированное состояние автоклавов: Автореф. дис... канд. техн. наук. Гатчина, 1986. 14 с.
4. Новожилов В.В., Черных К.Ф., Михайловский Е.И. Линеиная теория тонких оболочек. Л.: Политехника, 1991.656с.

Summary

Nikitenkov V.L. Nonlinear equations for cylindrical shell with elliptic ovality of the cross section.

In this paper nonlinear equations are obtained for cylindrical shell with elliptic ovality of the cross section. On their basis two problems for elliptic ring under action arbitrary mechanical loads are solved.

Сыктывкарский университет

Поступила 11.02.94