Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1.Вып.1.1995

УДК 539.3

Нелинейная теория ребристых оболочек при малых трансверсальных сдвигах[1]

Е.И.Михайловский

В работе [1] выведены граничные условия подкрепленного края жестко-гибкой оболочки, т.е. изготовленной из жесткого сжимаемого материала и допускающей конечные (большие) перемещения при малых деформациях за счет конечных углов поворота. Названные граничные условия получены синтезом нелинейных теорий жестко-гибких оболочек и стержней, учитывающих трансверсальные сдвиги в линейном приближении, и деформационных условий сопряжения края оболочки со стержнем. В данной статье строится нелинейная теория типа Тимошенко-Рейсснера жестко-гибких ребристых оболочек, в значительной мере опирающаяся на результаты работы [1]. Поэтому ниже приводятся основные сведения из [1], снабженные краткими комментариями. Предлагаемая здесь нелинейная теория ребристых оболочек линейного аналога не имеет. Используемые обозначения в основном совпадают с принятыми в монографии [2].

1. Предположим, что радиус-вектор точки $(\alpha^1, \alpha^2, \xi)$

$$\overset{\circ}{\mathbf{R}}(\alpha^i, \xi) = \overset{\circ}{\mathbf{r}}(\alpha^i) + \xi \overset{\circ}{\mathbf{n}}(\alpha^i) \tag{1.1}$$

в результате деформации принимает вид

$$\mathbf{R}(\alpha^i, \xi) = \mathbf{r}(\alpha^i) + \lambda_\xi(\alpha^i)(\xi + \frac{1}{2}\xi^2\kappa_\xi)\,\mathbf{n}(\alpha^i) + \xi\omega^\beta(\alpha^i)\,\mathbf{r}_\beta(\alpha^i) \tag{1.2}$$

[1] Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 94–01–00375.

При этом считаем, что криволинейные координаты α^1, α^2 являются ортогональными на недеформированной срединной поверхности, т.е.

$$\mathring{\mathbf{r}}_1 \cdot \mathring{\mathbf{r}}_2 = \mathring{a}_{12} = 0 \quad \left(\mathbf{r}_i = \frac{\partial \mathring{\mathbf{r}}}{\partial \alpha^i} \equiv \partial_i \mathring{\mathbf{r}}\right).$$

Помимо (1.1)–(1.2) принимаем следующие допущения:

i) оболочка является тонкой, т.е.

$$\xi \mathring{b}_{<ij>} \ll 1 \tag{1.3}$$

($b_{<ij>}$ — физическая компонента тензора кривизны срединной поверхности);

ii) производными параметров $\lambda_\xi(\alpha^i)$, $\kappa_\xi(\alpha^i)$ можно пренебрегать;

iii) деформации изменяются линейно по толщине оболочки;

iv) слагаемые, связанные с поперечными сдвигами, учитываются по линейной теории.

Тогда придем к следующим формулам для компонент тензора деформации Грина-Лагранжа:

$$\varepsilon^\xi_{ij} = \varepsilon_{ij} + \xi(\kappa_{ij} + \mu_{ij}), \quad \varepsilon^\xi_{33} = \frac{1}{2}(\lambda^2_\xi - 1) + \xi\lambda^2_\xi\kappa_\xi, \quad \varepsilon^\xi_{i3} = \frac{1}{2}\omega_i, \tag{1.4}$$

где

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} - \mathring{a}_{ij}), \quad \kappa_{ij} = -\lambda_\xi b_{ij} - \mathring{b}_{ij},$$

$$\mu_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i\omega_j + \nabla_j\omega_i), \quad a_{ij} = \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j \tag{1.4$'$}$$

(∇_i — ковариационная производная).

2. Определяющие уравнения строятся на основе упругого потенциала стандартного материала 2-го порядка (STM-2). Параметры λ_ξ, κ_ξ, характеризующие поперечное обжатие, определяются из граничных условий

$$J\sigma^{33}(\mathring{h}/2) = q^+_n, \quad J\sigma^{33}(-\mathring{h}/2) = q^-_n. \tag{2.1}$$

В результате приходим к следующим уравнениям:

$$S^{ij} = CA^{ij,\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}, \quad M^{ij} = \lambda_\xi DA^{ij,\alpha\beta}\kappa_{\alpha\beta},$$

$$\widehat{M}^{ij} = \lambda_\xi DA^{ij,\alpha\beta}\mu_{\alpha\beta}, \quad \widetilde{M}^{ij} = M^{ij} + \widehat{M}^{ij}, \quad T_{\cdot n} = \mu\mathring{a}^{ii}\omega_i h, \tag{2.2}$$

где

$$A^{ij,\alpha\beta}=(1-\nu)\overset{\circ}{a}{}^{i\alpha}\overset{\circ}{a}{}^{j\beta}+\nu\overset{\circ}{a}{}^{ij}\overset{\circ}{a}{}^{\alpha\beta},\quad C=\frac{E\overset{\circ}{h}}{1-\nu^2},\quad D=\frac{E\overset{\circ}{h}{}^3}{12(1-\nu^2)},$$

$$S^{ij}=\int\limits_{-\overset{\circ}{h}/2}^{\overset{\circ}{h}/2}\left(J\sigma^{ij}-\frac{\nu}{1-\nu}\overset{\circ}{a}{}^{ij}J\sigma^{33}\right)d\xi,\quad T^i_{.n}=\lambda_\xi\int\limits_{-\overset{\circ}{h}/2}^{\overset{\circ}{h}/2}J\sigma^{i3}\,d\xi,$$

$$\widetilde{M}^{ij}=\lambda_\xi\int\limits_{-\overset{\circ}{h}/2}^{\overset{\circ}{h}/2}\left(J\sigma^{ij}-\frac{\nu}{1-\nu}\overset{\circ}{a}{}^{ij}J\sigma^{33}\right)\xi\,d\xi. \qquad (2.2')$$

Формулам (2.2) можно придать вид:

$$T_i=C(\varepsilon_i+\nu\varepsilon_j),\quad S=(1-\nu)C\omega/2,\quad M_i=\lambda_\xi D(\kappa_i+\nu\kappa_j),$$

$$H=(1-\nu)D\tau,\quad \widehat{M}_i=\lambda_\xi D(\mu_i+\nu\mu_j),\quad \widehat{H}=(1-\nu)D\zeta. \qquad (2.3)$$

Здесь

$$T_i=S_{<ii>},\quad S=S_{<12>},\quad M_i=M_{<ii>},\quad H=M_{<12>},$$

$$\varepsilon_i=\varepsilon_{<ii>},\quad \omega/2=\varepsilon_{<12>},\quad \kappa_i=\kappa_{<ii>},\quad \tau=\kappa_{<12>},$$

$$\widehat{M}_i=\widehat{M}_{<ii>},\quad \widehat{H}=\widehat{M}_{<12>},\quad \mu_i=\mu_{<ii>},\quad \zeta=\mu_{<12>}.$$

Соотношения (2.3) являются обобщением на нелинейный случай (параметры деформации в (2.3) нелинейно связаны с перемещениями) определяющих уравнений Новожилова-Балабуха [3] и формально совпадают с ними при $\omega^i=0$, $i=1,2$, $\lambda_\xi=1$. При этом заметим, что линеаризованные параметры $\kappa_{<ij>}$ связаны с параметрами кривизны и кручения классической теории оболочек так (N — Novozhilov):

$$\kappa_i=\overset{N}{\kappa}_i+\frac{\varepsilon_i}{R_i}-\frac{\omega}{2R_{ij}},\quad \tau=\overset{N}{\tau}-\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{R_{12}}.$$

3. Предполагая (для упрощения записи), что боковая поверхность оболочки свободна от нагрузки, вариационное уравнение Лагранжа можно принять в виде

$$\delta\Phi-\delta A=0, \qquad (3.1)$$

где

$$\delta\Phi = \int\limits_{\overset{\circ}{\Omega}} \int\limits_{-\overset{\circ}{h}/2}^{\overset{\circ}{h}/2} \delta\overline{\Phi}\, d\xi d\overset{\circ}{\Omega}, \quad \delta A = \int\limits_{\overset{\circ}{\Omega}} (\mathbf{q}^+ \cdot \delta\mathbf{R}^+ - \mathbf{q}^- \cdot \delta\mathbf{R}^-)\sqrt{a}\, d\alpha^1 d\alpha^2,$$

$$\delta\overline{\Phi} = J\sigma^{\alpha\beta}\delta\varepsilon^{\xi}_{\alpha\beta} + 2J\sigma^{\alpha 3}\delta\varepsilon^{\xi}_{\alpha 3} + J\sigma^{33}\delta\varepsilon^{\xi}_{33}. \tag{3.1'}$$

Произведя преобразования, аналогичные тем, что выполнены в работе [2], и приравнивая к нулю коэффициенты при $\delta\mathbf{r}$ и $\delta\omega_j$, $j = 1,2$ в интегралах по области $\overset{\circ}{\Omega}$, получим

$$\partial_\beta \left[\sqrt{\overset{\circ}{a}}\, T^{\beta\alpha}\mathbf{r}_\alpha + \nabla_\alpha(\sqrt{\overset{\circ}{a}}\, \widetilde{M}^{\alpha\beta})\mathbf{n} \right] = -\sqrt{a}\,\mathbf{q},$$

$$\nabla_\beta(\sqrt{\overset{\circ}{a}}\, \widetilde{M}^{i\beta}) - \sqrt{\overset{\circ}{a}}\, T^{j}_{.n} = -\lambda_\xi \sqrt{a}\, m^j. \tag{3.2}$$

Заметим, что при отсутствии поперечных сдвигов ω_j, $j = 1,2$ уравнения (3.2) формально совпадают с уравнениями $(11.59)_1, (11.57)_3$ [2] (если пренебречь поверхностным моментом m^j, $j = 1,2$). Однако на основании (2.2) условие $\omega^i = 0$ приводит к исчезновению перерезывающих сил $T^i_{.n}$. Тем не менее представляемую здесь теорию можно считать обобщающей квазикирхгофовскую теорию К.Ф.Черныха [2], если два скалярных уравнения из (3.2) использовать для вычисления $T^i_{.n}$, оставляя без внимания последнюю формулу в (2.2). При этом полное совпадение с квазикирхгофовской теорией будет иметь место, если (2.1) заменить условием $J\sigma^{33}(\xi) = 0$.

4. Если уравнения (3.2) выполняются, то условие (3.1) сводится к равенству

$$\int\limits_{\partial\overset{\circ}{\Omega}} \left[\mathbf{Q}_\nu \cdot \delta\mathbf{u} + \widetilde{M}_{\nu\nu}\boldsymbol{\nu} \cdot \delta(\mathbf{n} + \boldsymbol{\omega}) + \widetilde{M}_{\nu t}\mathbf{t} \cdot \delta\boldsymbol{\omega} \right] d\overset{\circ}{s}_t = 0, \tag{4.1}$$

где [1]

$$\mathbf{Q}_\nu = Q_{\nu\nu}\boldsymbol{\nu} + Q_{\nu t}\mathbf{t} + Q_{\nu n}\mathbf{n},$$

$$Q_{\nu\nu} = T_{\nu\nu} + \tau_t \widetilde{M}_{\nu\nu}, \quad Q_{\nu t} = T_{\nu t} - \sigma_t \widetilde{M}_{\nu t},$$

$$Q_{\nu n} = \frac{d\widetilde{M}_{\nu t}}{ds_t} + \frac{\overset{\circ}{\nu}_\beta}{\sqrt{\overset{\circ}{a}}}\, \nabla_\alpha (\sqrt{\overset{\circ}{a}}\widetilde{M}^{\alpha\beta}). \tag{4.1'}$$

Таким образом, статические и пятая геометрическая граничные величины усматриваются из следующей таблицы (величины в скобках со знаком приближенного равенства соответствуют линейной теории):

$\boldsymbol{\nu}\cdot\delta\mathbf{r}\quad(\approx\delta u_\nu)$	$\mathbf{t}\cdot\delta\mathbf{r}\quad(\approx\delta u_t)$	$\mathbf{n}\cdot\delta\mathbf{r}\quad(\approx\delta w)$
$Q_{\nu\nu}$	$Q_{\nu t}$	$Q_{\nu n}$

$\boldsymbol{\nu}\cdot\delta(\mathbf{n}+\boldsymbol{\omega})\quad(\approx\delta(\theta_\nu+\omega_\nu))$	$\delta\omega_t$
$\widetilde{M}_{\nu\nu}$	$\widetilde{M}_{\nu t}$

(4.2)

5. Поворот нормального элемента $d\overset{\circ}{s}_t\times\overset{\circ}{h}$ в результате деформации складывается из поворота, обусловленного переходом ортов $\{\overset{\circ}{\boldsymbol{\nu}},\overset{\circ}{\mathbf{t}},\overset{\circ}{\mathbf{n}}\}$ в $\{\boldsymbol{\nu},\mathbf{t},\mathbf{n}\}$ в соответствии с модифицированной гипотезой Кирхгофа [2] и дополнительного поворота за счет поперечных сдвигов. Переход ортов $\{\overset{\circ}{\boldsymbol{\nu}},\overset{\circ}{\mathbf{t}},\overset{\circ}{\mathbf{n}}\}$ в $\{\boldsymbol{\nu},\mathbf{t},\mathbf{n}\}$ описывает двойной тензор [2]

$$\mathbf{Q}_t=\boldsymbol{\nu}\overset{\circ}{\boldsymbol{\nu}}+\mathbf{t}\overset{\circ}{\mathbf{t}}+\mathbf{n}\overset{\circ}{\mathbf{n}}. \tag{5.1}$$

Обусловленный малыми поперечными сдвигами переход ортов $\{\boldsymbol{\nu},\mathbf{t},\mathbf{n}\}$ к приближенно ортонормированной системе $\{\check{\boldsymbol{\nu}},\check{\mathbf{t}},\check{\mathbf{n}}\}$, ортогонально связанной с деформированным боковым элементом, определяется тензором [3]

$$\Omega_t^{\mathrm{v}}=\mathbf{1}+\omega_\nu(\boldsymbol{\nu}\mathbf{n}-\mathbf{n}\boldsymbol{\nu})+\omega_t(\mathbf{t}\mathbf{n}-\mathbf{n}\mathbf{t}). \tag{5.2}$$

Таким образом, преобразование ортов $\{\overset{\circ}{\boldsymbol{\nu}},\overset{\circ}{\mathbf{t}},\overset{\circ}{\mathbf{n}}\}$ в $\{\check{\boldsymbol{\nu}},\check{\mathbf{t}},\check{\mathbf{n}}\}$ осуществляется тензором

$$\mathbf{Q}_t^{\mathrm{v}}=\Omega_t^{\mathrm{v}}\cdot\mathbf{Q}_t$$

и, следовательно, тензор изменения кривизны нормального элемента в теории типа Тимошенко-Рейсснера можно представить так:

$$\mathbf{K}_t^{\mathrm{v}}=\frac{d\mathbf{Q}_t^{\mathrm{v}}}{ds_t}=-\kappa_{tt}^{\mathrm{v}}(\mathbf{n}\overset{\circ}{\mathbf{t}}-\mathbf{t}\overset{\circ}{\mathbf{n}})+\kappa_{t\nu}^{\mathrm{v}}(\boldsymbol{\nu}\overset{\circ}{\mathbf{n}}-\mathbf{n}\overset{\circ}{\boldsymbol{\nu}})-\kappa_{tn}^{\mathrm{v}}(\mathbf{t}\overset{\circ}{\boldsymbol{\nu}}-\boldsymbol{\nu}\overset{\circ}{\mathbf{t}}), \tag{5.3}$$

$$\kappa_{tt}^{\mathrm{v}}=\kappa_{tt}+\rho_t\omega_\nu+\frac{d\omega_t}{ds_t},\quad \kappa_{t\nu}^{\mathrm{v}}=\kappa_{t\nu}-\rho_t\omega_t+\frac{d\omega_\nu}{ds_t},$$

$$\kappa_{tn}^{\mathrm{v}}=\kappa_{tn}-\sigma_t\omega_\nu-\tau_t\omega_t. \tag{5.3'}$$

Добавляя к параметрам изменения кривизны бокового элемента (5.3′) его относительное удлинение

$$\varepsilon_{tt} = \frac{ds_t - d\overset{\circ}{s}_t}{d\overset{\circ}{s}_t} = \lambda_t - 1, \tag{5.4}$$

получим набор из четырех деформационных величин. Однако в теории типа Тимошенко-Рейсснера необходимо иметь пять величин. Благодаря выполненным в п.4 преобразованиям, соответствующим в теории Кирхгофа переходу от пяти граничных величин к четырем, пятым обобщенным смещением в рассматриваемой здесь теории является дополнительный угол поворота ω_t. При этом ω_t имеет деформационный характер, т.е. без интегрирования выражается через силовые величины. Действительно, на основании (2.2) имеем

$$\omega_t = \frac{T_{tn}}{\mu h}, \tag{5.5}$$

где

$$T_{tn} = -T_{<1n>} \sin\gamma + T_{<2n>} \cos\gamma, \quad T_{<in>} = T^i_{.n}\sqrt{\overset{\circ}{a}_{ii}}.$$

6. В работе [2] предложена нелинейная теория тонких стержней, основанная на допущении, что радиус-вектор материальной точки стержня

$$\overset{\circ}{\mathbf{R}}(\boldsymbol{\xi}, \overset{\circ}{s}) = \overset{\circ}{\mathbf{r}}(\overset{\circ}{s}) + \boldsymbol{\xi}(\overset{\circ}{s}), \quad \boldsymbol{\xi}(\overset{\circ}{s}) = \xi_\alpha \overset{\circ}{\mathbf{e}}_\alpha(\overset{\circ}{s}) \tag{6.1}$$

после деформации принимает вид

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \lambda_0(\overset{\circ}{s}) \left[(\xi_1 + \frac{1}{2}\chi_{\alpha\beta}\xi_\alpha\xi_\beta)\, \overset{\circ}{\mathbf{e}}_1 + (\xi_2 + \frac{1}{2}\rho_{\alpha\beta}\xi_\alpha\xi_\beta)\, \overset{\circ}{\mathbf{e}}_2 \right]. \tag{6.2}$$

Описание геометрии деформированного стержня формулой (6.2) соответствует принятию модифицированной гипотезы Кирхгофа: сечение после деформации остается плоским и ортогональным к деформированной оси, но изменяет свою форму.

В работе [1] названная теория тонких упругих стержней уточняется путем учета депланации по Сен-Венану и поперечных сдвигов по Тимошенко. При этом вместо (6.2) используется формула

$$\mathbf{R}^{\text{v}} = \mathbf{R} + [\lambda_0(\boldsymbol{\omega}^c \times \boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{t} + \kappa^c_{t\nu}\varphi(\boldsymbol{\xi})]\, \mathbf{t} \tag{6.3}$$

($\kappa^c_{t\nu}$ — изменение кручения оси стержня, $\varphi(\boldsymbol{\xi})$ — функция кручения Сен-Венана).

Получены следующие уравнения упругости для жестко-гибкого стержня (STM-2):

$$\begin{bmatrix} B_\nu^c \\ B_t^c \\ B_n^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_\nu & 0 & -K_{\nu n} \\ 0 & K_t & 0 \\ -K_{\nu n} & 0 & K_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\lambda_0^2\lambda_s^3\kappa_{tt}^c \\ \lambda_0^2\lambda_s\kappa_{t\nu}^c \\ -\lambda_0^2\lambda_s^3\kappa_{tn}^c \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} F_\nu^c \\ F_t^c \\ F_n^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_\nu & 0 & 0 \\ 0 & C_t & 0 \\ 0 & 0 & C_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_0^2\lambda_s\omega_n^c \\ \frac{1}{2}\lambda_s(\lambda_s^2-1) \\ -\lambda_0^2\lambda_s\omega_\nu^c \end{bmatrix}. \tag{6.4}$$

Здесь

$$K_\nu = E_c \int\limits_{(\mathring{S})} \xi_n^2\, d\mathring{S}, \quad K_n = E_c \int\limits_{(\mathring{S})} \xi_\nu^2\, d\mathring{S}, \quad K_{\nu n} = E_c \int\limits_{(\mathring{S})} \xi_\nu \xi_n\, d\mathring{S},$$

$$C_\nu = C_n = \mu_c \mathring{S}, \quad K_t = \mu_c\Big[(\lambda_0^2-1)\, I_p + 2\int\limits_{(\mathring{S})} \Phi\, d\mathring{S}\Big], \quad I_p = \frac{K_\nu + K_n}{E_c}$$

(Φ — функция напряжения Прандтля).

В уравнениях равновесия стержня, подкрепляющего оболочку,

$$\frac{d\mathbf{F}^c}{dS} + \mathbf{q}^c = 0, \quad \frac{d\mathbf{B}^c}{dS} + \mathbf{t}\times\mathbf{F}^c + \mathbf{m}^c = 0 \tag{6.5}$$

на основании (4.1), (4.2) и третьего закона Ньютона можно принять (отождествляя ось стержня с соответствующей линией на срединной поверхности оболочки и предполагая, что внешняя нагрузка на стержень отсутствует)

$$\mathbf{q}^c = -\mathbf{Q}_\nu, \quad \mathbf{m}^c = -\widetilde{M}_{\nu\nu}\mathbf{t}. \tag{6.6}$$

Интегрируя уравнения (6.5) по дуге оси деформированного стержня, получим

$$\mathbf{F}^c = \mathbf{F}, \quad \mathbf{B}^c = \mathbf{B}. \tag{6.7}$$

Здесь

$$\mathbf{F} = \int\limits_{S_0}^{S_t} \mathbf{Q}_\nu\, dS_t', \quad \mathbf{B} = \int\limits_{S_0}^{S_t} (\widetilde{M}_{\nu\nu}\mathbf{t}' + \mathbf{F}\times\mathbf{t}')\, dS_t'.$$

Равенства (6.7) представляют собой преобразованные с использованием уравнений (6.5) статические условия сопряжения оболоч и стержня (6.6), традиционно используемые при расчете оболочек, подкрепленных ребрами.

7. В соответствии с принятыми предположениями на деформацию стержня, отвечающую модифицированной гипотезе плоских сечений [2], накладываются малые сдвиги по Тимошенко. В целом переход ортов $\{\overset{\circ}{\boldsymbol{\nu}}, \overset{\circ}{\mathbf{t}}, \overset{\circ}{\mathbf{n}}\}$ в $\{\check{\boldsymbol{\nu}}, \check{\mathbf{t}}, \check{\mathbf{n}}\}$ осуществляется по формулам

$$\check{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\Omega}_c \cdot \boldsymbol{\Omega}_t \cdot \overset{\circ}{\boldsymbol{\nu}}, \quad \check{\mathbf{t}} = \boldsymbol{\Omega}_c \cdot \boldsymbol{\Omega}_t \cdot \overset{\circ}{\mathbf{t}}, \quad \check{\mathbf{n}} = \boldsymbol{\Omega}_c \cdot \boldsymbol{\Omega}_t \cdot \overset{\circ}{\mathbf{n}},$$

где

$$\boldsymbol{\Omega}_c^{\mathrm{v}} = \mathbf{1} + \omega_\nu^c(\mathbf{nt} - \mathbf{tn}) + \omega_n^c(\mathbf{t}\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\nu}\mathbf{t}).$$

Отсюда следует, что тензор изменения кривизны стержня можно представить так:

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_c^{\mathrm{v}} &= \frac{d\boldsymbol{\Omega}_c^{\mathrm{v}} \cdot \mathbf{Q}_t}{ds} = [\kappa_{t\nu}^c + (\lambda_0^{-1} - \lambda_s^{-1})\overset{\circ}{\tau}_t]\,(\boldsymbol{\nu}\overset{\circ}{\mathbf{n}} - \mathbf{n}\overset{\circ}{\boldsymbol{\nu}}) - \\ &-[\kappa_{tt}^c - \omega_\nu^c - (\lambda_0^{-1} - \lambda_s^{-1})\overset{\circ}{\sigma}_t]\,(\mathbf{n}\overset{\circ}{\mathbf{t}} - \mathbf{t}\overset{\circ}{\mathbf{n}}) - \\ &-[\kappa_{tn}^c - \omega_n^c - (\lambda_0^{-1} - \lambda_s^{-1})\overset{\circ}{\rho}_t]\,(\mathbf{t}\overset{\circ}{\boldsymbol{\nu}} - \boldsymbol{\nu}\overset{\circ}{\mathbf{t}}).\end{aligned}$$

Учитывая, что стержень деформируется совместно с оболочкой, следует принять $(ds \approx ds_t)$

$$\lambda_s = \lambda_t, \quad \boldsymbol{\Omega}_c^{\mathrm{v}} = \boldsymbol{\Omega}_t^{\mathrm{v}} \quad K_c^{\mathrm{v}} = K_t^{\mathrm{v}}$$

или

$$\begin{aligned}\kappa_{tt}^c &= \kappa_{tt} + (\lambda_0^{-1} - \lambda_t^{-1})\overset{\circ}{\sigma}_t + \omega_t' + \rho_t\omega_\nu, \\ \kappa_{tn}^c &= \kappa_{tn} + (\lambda_0^{-1} - \lambda_t^{-1})\overset{\circ}{\rho}_t - \sigma_t\omega_\nu - \tau_t\omega_t, \\ \kappa_{t\nu}^c &= \kappa_{t\nu} - (\lambda_0^{-1} - \lambda_t^{-1})\overset{\circ}{\tau}_t + \omega_\nu', \\ \lambda_s &= 1 + \varepsilon_{tt}, \quad \omega_\nu^c = -\omega_t, \quad \omega_n^c = 0.\end{aligned} \tag{7.1}$$

Исключая с помощью соотношений (6.7) и (7.1) параметры напряженно-деформированного состояния стержня из уравнений (6.4), получим

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= -\lambda_0^2\lambda_t^3[(K_\nu\kappa_{tt}^c - K_{\nu n}\kappa_{tn}^c)\,\boldsymbol{\nu} + (K_n\kappa_{tn}^c - K_{\nu n}\kappa_{tt}^c)\,\mathbf{n}] + \\ &+ \lambda_0^2\lambda_t K_t[\kappa_{t\nu} - (\lambda_0^{-1} - \lambda_t^{-1})\overset{\circ}{\tau}_t + \omega_\nu']\,\mathbf{t}, \\ \mathbf{F} &= \tfrac{1}{2}(1 + \lambda_t)\lambda_t C_t\varepsilon_{tt}\mathbf{t} + \lambda_0^2\lambda_t C_n\omega_t\mathbf{n}\end{aligned} \tag{7.2}$$

(Здесь κ_{tt}^c, κ_{tn}^c следует рассматривать как обозначение, раскрываемое с помощью первых двух равенств (7.1)).

8. Пусть область контакта j-го ребра и оболочки представляет собой полосу со срединной линией s_t $(s_\nu^{(j)} = \mathrm{const})$, параллельной оси ребра. Если на ось ребра действуют погонные сила $\mathbf{q}^c(s)$ и момент $m_t^c(s)$, то на оболочку передаются распределенные вдоль полосы контакта удельные силы, эквивалентные следующим погонным:

$$\mathbf{q}_1^{(j)} = -\mathbf{q}, \quad m_t^{(j)} = -m_t^c$$

или

$$\mathbf{q}_1^{(j)} = \frac{d\mathbf{F}}{ds_t}, \quad m_t^{(j)} = \frac{d\mathbf{B}}{ds_t} \cdot \mathbf{t}. \tag{8.1}$$

Заменим действие изгибающего момента $m_t^{(j)}$ нагрузкой $\mathbf{q}_2^{(j)}$, распределенной по ширине полосы контакта

$$s_\nu^{(j)} - a_j \leq s_\nu \leq s_\nu^{(j)} + a_j.$$

В соответствии со сказанным выше должно выполняться условие

$$\int\limits_{s_\nu^{(j)}-a_j}^{s_\nu^{(j)}+a_j} (\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(j)}) \times \mathbf{q}_2^{(j)}\, ds_\nu = m_t^{(j)} \mathbf{t}^{(j)}, \tag{8.2}$$

где

$$\mathbf{r}^{(j)} = \mathbf{r}(s_\nu^{(j)}, s_t), \quad \mathbf{t}^{(j)} = \mathbf{t}(s_\nu^{(j)}, s_t).$$

Нетрудно убедиться, что условию (8.2) удовлетворяет нагрузка

$$q_2^{(j)} = \delta'(s_\nu - s_\nu^{(j)})\, m_t^{(j)}, \quad (\cdot)' = \frac{d(\cdot)'}{ds_\nu}.$$

Окончательную реакцию j-го ребра на деформацию оболочки в случае достаточно узкой полосы контакта можно выразить формулой

$$\mathbf{q}^{(j)} = \mathbf{q}_1^{(j)} + \mathbf{q}_2^{(j)} = \frac{d\mathbf{F}}{ds_t}\delta(s_\nu - s_\nu^{(j)}) + \left(\frac{d\mathbf{B}}{ds_t} \cdot \mathbf{t}\right) \mathbf{n}\, \delta'(s_\nu - s_\nu^{(j)}).$$

Исключая отсюда $\mathbf{F}$ и $\mathbf{B}$ с помощью формул (7.2) можно в конечном счете выразить реакцию ребер через перемещения оболочки.

Векторное уравнение равновесия оболочки, подкрепленной системой из n ребер, отличается от $(3.2)_1$ тем, что в его правой части вместо $-\sqrt{a}\,\mathbf{q}$ содержится выражение

$$-\sqrt{a}\left(\mathbf{q} + \sum_{j=1}^{n} \mathbf{q}(j)\right).$$

Литература

1. **Михайловский Е.И.** Граничные условия подкрепленного края жестко-гибкой оболочки в нелинейной теории типа Тимошенко-Рейсснера //*Изв. РАН. МТТ.* 1995. №2. С. 109–119.

2. **Черных К.Ф.** Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Л.: Машиностроение, 1986. 336 с.

3. **Новожилов В.В., Черных К.Ф., Михайловский Е.И.** Линейная теория тонких оболочек. Л.: Политехника, 1991. 656 с.

Summary

Mikhailovskii E.I. Nonlinear theory of ridge shells under small transversal shears.

Nonlinear Timoshenko-Reissner type theory of rigid-flexible ridge shells taking into account small transversal shears is derived on base deformation conditions of shell and rod conjugation.

Сыктывкарский университет *Поступила 8.02.95*