*Вестник Сыктывкарского университета.*
*Сер.1.Вып.1.1995*

**УДК 536.46**

# Асимптотика стационарной волны горения для автокаталитической реакции 1-го порядка

*Т.В.Кондратьева, В.М.Холопов*

В настоящей работе излагается конструкция асимптотики стационарной волны горения для автокаталитической реакции первого порядка в конденсированной среде ($Le = 0$, $Le$ - число Льюиса) и в газе ($Le > 0$). Выписаны старшие члены асимптотики решения по малому параметру $\gamma$, имеющему смысл относительной ширины зоны химической реакции, а также асимптотика безразмерной скорости горения.

**1.Введение.** В системе координат, связанной с фронтом пламени, задача о стационарной волне горения описывается следующей системой относительно температуры T и относительной концентрации горючей компоненты $a$ [1]:

$$(\lambda T\,')' - cmT\,' + Qw = 0, \tag{1}$$

$$(D\rho a')' - ma' - w = 0, \tag{2}$$

где штрих означает дифференцирование по пространственной координате $\xi$, $\lambda$ - теплопроводность, $c$ - теплоемкость, $\rho$ - плотность, $D$ - коэффициент диффузии горючей смеси, $Q$ - тепловой эффект реакции, m - искомая массовая скорость горения. Скорость химической реакции w задается формулой:

$$w = k(T)\varphi(a).$$

Температурная зависимость $k(T)$ описывается так называемым законом Аррениуса:

$$k(T) = k_0 exp\left(-\frac{E}{RT}\right),$$

где $E$ - энергия активации, $R$ - универсальная постоянная, $k_0$ - предэкспоненциальный фактор. Функция $\varphi(a)$ характеризует скорость реакции в изотермических условиях. В случае автокаталитической реакции первого порядка $\varphi(a)$ задается формулой:

$$\varphi(a) = (a_* - a)a,$$

где $a_*$ - критерий автокаталитичности. При $1 < a_* < 2$ в интервале $a_*/2 < a < 1$ происходит самоускорение реакции.

Система уравнений (1) - (2) имеет первый интеграл

$$\lambda T\,' + cm(T_* - T) + QD\rho a' - Qma = 0,\ T_* = T_0 + \frac{Q}{c}, \tag{3}$$

записанный в предположении

$$\xi = -\infty :\ T = T_0,\ a = 1. \tag{4}$$

Это предположение, означающее, что при начальной температуре $T_0$ скорость реакции равна нулю, требует искусственного выполнения условия $k(T_0) = 0$ [2], при котором уравнения (1), (2) сохраняют смысл промежуточной асимптотики [3]. В силу $T\,' = a' = 0$ при $\xi = +\infty$ температура $T_* = T_0 + Q/c$ оказывается температурой полностью прореагировавшего вещества ( температура горения )

$$\xi = +\infty :\ T = T_*,\ a = 0. \tag{5}$$

С помощью $T_*$ введем следующие безразмерные переменные и параметры

$$t = \frac{T_* - T}{T_* - T_0},\quad p(t) = \frac{\lambda T\,'}{Qm},\quad a = a(t),$$

$$\gamma = \frac{RT_*{}^2 c}{QE},\quad \mu = \frac{T_* - T_0}{T_*},\quad Le = \frac{D\rho c}{\lambda},\quad \omega = \frac{m^2 c}{\gamma^2 \lambda k(T_*)}.$$

При этом система (1) - (2) с учетом (3), (4) и (5) примет вид:

$$\frac{dp}{dt} + 1 = \frac{(a_* - a)a}{\omega p \gamma^2} exp\left(-\frac{t}{\gamma(1 - \mu t)}\right),\quad p(0) = p(1) = 0; \tag{6}$$

$$Le\frac{da}{dt} = \frac{p + t - a}{p},\quad a(0) = 0,\quad a(1) = 1. \tag{7}$$

Наряду с неизвестными функциями p(t) и a(t) в системе (6) - (7) искомой является и величина $\omega$ - безразмерная скорость горения. Наличие лишнего граничного условия позволяет в принципе ее определить. Будем предполагать малость параметра $\gamma$ и с его помощью будем строить приближенное асимптотическое решение задачи. Этот параметр имеет ясный физический смысл. Легко убедиться, что при уменьшении температуры горения $T_*$ на величину $RT_*^2/E$ скорость реакции $k(T)$ уменьшается в $e \approx 2,718$ раз. Этот интервал температур, отнесенный к характерному интервалу $T_* - T_0 = Q/c$, и составляет величину $\gamma$. Таким образом, $\gamma$ имеет смысл относительной ширины зоны химической реакции. Требование малости $\gamma$ согласуется с представлениями о фронте пламени.

Переход от системы (1) - (2) к системе (6) - (7) предполагает монотонность температурного профиля $T(\xi)$. Существование такого решения для системы (1) - (2) (и единственность при $Le < 1$) доказаны в работе [4]. Для частного случая $Le = 1$ существование и единственность решения исследовались многими авторами ( смотри, например, [1,2] ). В особом случае $Le = 0$ эти вопросы и оценки скорости подробно обсуждаются в работе [5].

То обстоятельство, что правая часть уравнения (6) сосредоточена в малой (порядка $\gamma \ln 1/\gamma$) окрестности точки $t = 0$, а вне этой окрестности экспоненциально мала при $\gamma \to 0$, послужило основой для применения метода сращивания асимптотических разложений [6] при решении систем, подобных (6) - (7) [7,8], сущность которого заключается в сращивании так называемых "внешнего решения" $\overline{p}(t)$, $\overline{a}(t)$, справедливого вне этой окрестности, и "внутреннего" $\underline{p}(t)$, $\underline{a}(t)$, справедливого внутри данной окрестности.

**2.Решение задачи для конденсированной среды ( $Le = 0$ ).** В этом случае из (7) имеем $p \equiv a - t$ и задача сводится к одному уравнению относительно $a$

$$\frac{da}{dt} = \frac{a(a_* - a)}{\nu\gamma(a-t)} exp\left(-\frac{t}{\gamma(1-\mu t)}\right), \; a(0) = 0, \; a(1) = 1, \qquad (8)$$

где $\nu = \gamma \cdot \omega$. Устремляя в последнем $\gamma$ к нулю, для внешнего решения $\overline{a}$ получаем уравнение $\dfrac{da}{dt} = 0, \quad a(1) = 1$. Откуда находим $\overline{a}(t) \equiv 1$. Для построения внутреннего решения перейдем в (8) к переменной

$\tau = \dfrac{t}{\gamma}$:

$$\frac{d\underline{a}}{d\tau} = \frac{\underline{a}(a_* - \underline{a})}{\omega\gamma(\underline{a} - \tau\gamma)} exp\left(-\frac{\tau}{1-\mu\gamma\tau}\right), \ \underline{a}(0) = 0. \tag{9}$$

Внутреннее решение $\underline{a}$ будем искать в виде

$$\underline{a} = \underline{a}_0 + \gamma\underline{a}_1 + \gamma^2\underline{a}_2 + \ldots, \ \nu = \nu_0 + \gamma\nu_1 + \gamma^2\nu_2 + \ldots. \tag{10}$$

Условие сращивания внешнего решения $\overline{a} \equiv 1$ и внутреннего решения $\underline{a}(\tau)$ состоит в требовании $\overline{a}(0) = \underline{a}(\infty)$, то есть

$$\underline{a}_0(\infty) = 1, \ \underline{a}_i(\infty) = 0 \ (i \geq 1). \tag{11}$$

Подставляя (10) в (9), раскладывая правую часть по степеням $\gamma$ и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $\gamma$, получим уравнения для определения $\underline{a}_0, \underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots$. Для $\underline{a}_0$ имеем

$$\frac{d\underline{a}_0}{d\tau} = \frac{e^{-\tau}}{\nu_0}(a_* - \underline{a}_0), \ \underline{a}_0(0) = 0.$$

Откуда находим

$$\underline{a}_0 = a_*(1 - e^{(e^{-\tau}-1)/\nu_0}). \tag{12}$$

Из условия сращивания (11) получаем

$$\nu_0 = \frac{1}{\ln\dfrac{a_*}{a_* - 1}}. \tag{13}$$

Для $\underline{a}_1$ имеем уравнение

$$\frac{d\underline{a}_1}{d\tau} + \underline{a}_1\frac{e^{-\tau}}{\nu_0} = \frac{e^{-\tau}(\underline{a}_0 - a_*)}{\underline{a}_0\nu_0}\left(\frac{\underline{a}_0\nu_1}{\nu_0} - \tau + \underline{a}_0\mu\tau^2\right), \ \underline{a}_1(0) = 0.$$

Решая это линейное неоднородное уравнение, находим

$$\underline{a}_1 = e^{e^{-\tau}/\nu_0}\frac{\underline{a}_0 - a_*}{\nu_0}\left(f(\tau) + \int_0^\tau \left(\mu s^2 - \frac{s}{\underline{a}_0}\right) e^{-s-e^{-s}/\nu_0} ds\right), \tag{14}$$

где

$$f(\tau) = \nu_1\left(e^{-e^{-\tau}/\nu_0} - e^{-1/\nu_0}\right).$$

Из условия сращивания (11) находим значение $\nu_1$

$$\nu_1 = \frac{1}{1 - e^{-1/\nu_0}}\int_0^\infty (s - \mu s^2)e^{-s-e^{-s}/\nu_0} ds \tag{15}$$

Для $\underline{a}_2$ имеем следующее уравнение

$$\frac{d\underline{a}_2}{d\tau} + \underline{a}_2 \frac{e^{-\tau}}{\nu_0} = \frac{e^{-\tau}}{\underline{a}_0 \nu_0} \left( \frac{\underline{a}_1 \underline{a}_0 \nu_1}{\nu_0} - \frac{\underline{a}_0 \nu_2}{\nu_0}(a_* - \underline{a}_0) + \underline{a}_0 (a_* - \underline{a}_0) \frac{\nu_1^2}{\nu_0^2} + \right.$$

$$+\tau \left( \frac{\nu_1}{\nu_0}(\underline{a}_0 - a_*) - \frac{a_* \underline{a}_1}{\underline{a}_0} \right) + \tau^2 \left( \mu \underline{a}_0 \underline{a}_1 + \frac{\mu \underline{a}_0 a_* \nu_1}{\nu_0} - \frac{\mu \underline{a}_0^2 \nu_1}{\nu_0} + \right.$$

$$\left. \left. + \frac{a_*}{\underline{a}_0} - 1 \right) + \tau^3 (\underline{a}_0 - a_*)(\mu + \mu^2 \underline{a}_0) \right), \ \underline{a}_2(0) = 0.$$

Откуда находим

$$\underline{a}_2 = e^{e^{-\tau}/\nu_0} \left( (e^{-e^{-\tau}/\nu_0} - e^{-1/\nu_0}) \left( \frac{\underline{a}_1 \nu_1}{\nu_0} + (a_* - \underline{a}_0) \left( \frac{\nu_1^2}{\nu_0^2} - \frac{\nu_2}{\nu_0} \right) + \right. \right.$$

$$+ \int_0^\tau (s \left( \frac{\nu_1}{\nu_0}(\underline{a}_0 - a_*) - \frac{a_* \underline{a}_1}{\underline{a}_0} \right) + s^2 \left( \mu \underline{a}_0 \underline{a}_1 + \frac{\mu \underline{a}_0 \underline{a}_1 \nu_1}{\nu_0} - \frac{\mu \underline{a}_0^2 \nu_1}{\nu_0} + \right.$$

$$\left. \left. + \frac{a_*}{\underline{a}_0} - 1 \right) + s^3 (\underline{a}_0 - a_*)(\mu + \mu^2 \underline{a}_0) \right) \frac{e^{-s - e^{-s}/\nu_0}}{\underline{a}_0 \nu_0} ds \right). \qquad (16)$$

Из условия сращивания (11) получаем

$$\nu_2 = \frac{\nu_1^2}{\nu_0} - \frac{\nu_0}{(1 - a_*)(1 - e^{-1/\nu_0})} \int_0^\infty \left( s \frac{\nu_1}{\nu_0}(1 - a_*) + s^2 \left( \frac{\mu a_* \nu_1}{\nu_0} - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{\mu \nu_1}{\nu_0} + a_* - 1 \right) + s^3 (1 - a*) \mu (1 + \mu) \right) \frac{e^{-s - e^{-s}/\nu_0}}{\nu_0} ds. \qquad (17)$$

Итак, асимптотика $\nu$ имеет вид

$$\nu = \nu_0 + \nu_1 \gamma + \nu_2 \gamma^2 + o(\gamma^2),$$

где $\nu_0, \nu_1$ и $\nu_2$ определяются формулами (13), (15) и (17) соответственно.

Составное решение $a(t)$ определяется соотношением

$$a(t) = \overline{a}(t) + \underline{a}(t/\gamma) - \underline{a}(\infty)$$

или с учетом условия сращивания (11) и формул (12), (14), (16)

$$a(t) = a_*(1 - e^{(e^{-t/\gamma} - 1)/\nu_0}) - \frac{\gamma}{\nu_0} e^{(2e^{-t/\gamma} - 1)/\nu_0} \left( \nu_1 (e^{-e^{-t/\gamma}/\nu_0} - e^{-1/\nu_0}) + \right.$$

$$+\int_0^{t/\gamma}\left(\mu s^2-\frac{s}{a_*(1-e^{(e^{-s}-1)/\nu_0})}\right)e^{-s-e^{-s}/\nu_0}ds\Bigg)+\gamma^2 e^{e^{-t/\gamma}/\nu_0}\times$$

$$\times\left((e^{-e^{-t/\gamma}/\nu_0}-e^{-1/\nu_0}\right)\left(-\frac{\nu_1}{\nu_0}e^{(2e^{-t/\gamma}-1)/\nu_0}\left(\nu_1(e^{-e^{-t/\gamma}/\nu_0}-e^{-1/\nu_0})+\right.\right.$$

$$+\int_0^{t/\gamma}\left(\mu s^2-\frac{s}{a_*(1-e^{(e^{-s}-1)/\nu_0})}\right)e^{-s-e^{-s}/\nu_0}ds\Bigg)-e^{(e^{-t/\gamma}-1)/\nu_0}\times$$

$$\times\left(\frac{\nu_2}{\nu_0}-\frac{\nu_1^2}{\nu_0^2}\right)+\int_0^{t/\gamma}\left(s\left(\frac{e^{(2e^{-s}-1)/\nu_0}}{\nu_0(1-e^{(e^{-s}-1)/\nu_0})}\left(\nu_1(e^{-e^{-s}/\nu_0}-e^{1/\nu_0})+\right.\right.\right.$$

$$+\int_0^{s}\left(\mu z^2-\frac{z}{a_*(1-e^{(e^{-z}-1)/\nu_0})}\right)e^{-z-e^{-z}/\nu_0}dz\Bigg)-\frac{\nu_1}{\nu_0}e^{(e^{-s}-1)/\nu_0}\Bigg)+$$

$$+s^2\left(-\frac{a_*}{\nu_0}(e^{(2e^{-s}-1)/\nu_0}-e^{(3e^{-s}-1)/\nu_0}\right)\left(\nu_1(e^{-e^{-s}/\nu_0}-e^{-1/\nu_0})+\right.$$

$$+\int_0^{s}\left(\mu z^2-\frac{z}{a_*(1-e^{(e^{-z}-1)/\nu_0})}\right)e^{-z-e^{-z}/\nu_0}dz\Bigg)\times$$

$$\times\left(\mu+\frac{\mu\nu_1}{\nu_0}\right)-\frac{\mu\nu_1 a_*^2}{\nu_0}(1-e^{(e^{-s}-1)/\nu_0})^2+\frac{1}{1-e^{(e^{-s}-1)/\nu_0}}-1\Bigg)-$$

$$-s^3(\mu+\mu^2a_*(1-e^{(e^{-s}-1)/\nu_0}))e^{(e^{-s}-1)/\nu_0}\Bigg)\frac{e^{-s-e^{-s}/\nu_0}}{\nu_0 a_*(1-e^{(e^{-s}-1)/\nu_0})}ds+\ldots$$

где $\nu_0$, $\nu_1$, и $\nu_2$ находятся по формулам (13), (15), (17) соответственно.

**3.Решение задачи для газовой смеси** ( $Le=O(1)$ ). Устремляя $\gamma$ к нулю в (6) для внешнего решения $\overline{p}$, $\overline{a}$, имеем систему

$$\frac{d\overline{p}}{dt}+1=0,\ \overline{p}(1)=0, \tag{18}$$

$$Le\,\frac{d\overline{a}}{dt}=\frac{\overline{p}+t-\overline{a}}{\overline{p}},\ \overline{a}(1)=1. \tag{19}$$

Легко убедиться, что условие $\overline{a}(1)=1$ выполняется автоматически, а константа интегрирования второго уравнения позволяет удовлетворить дополнительному условию $\overline{a}(0)=0$. Из первого уравнения находим

$$\overline{p}(t)=1-t. \tag{20}$$

Подставляя в уравнение (19) полученное выражение для $\overline{p}$, получим:

$$Le\,\frac{d\overline{a}}{dt} = \frac{1-\overline{a}}{1-t},$$

Откуда находим

$$\overline{a}(t) = 1 - (1-t)^{1/Le}. \tag{21}$$

Для построения внутреннего решения перейдем в системе (18) - (19) к переменной $\tau = t/\gamma$. Получим

$$\frac{dp}{d\tau} + \gamma = \frac{(a_* - a)a}{\gamma\omega p} exp\left(-\frac{\tau}{1-\mu\gamma\tau}\right),\ p(0) = 0; \tag{22}$$

$$\frac{da}{d\tau} = \frac{\gamma}{Le}\frac{p+\gamma\tau - a}{p},\ a(0) = 0. \tag{23}$$

Будем искать решение в виде рядов

$$\underline{p} = \underline{p}_0 + \gamma\underline{p}_1 + \gamma^2\underline{p}_2 + \ldots,\ \ \underline{a} = \underline{a}_0 + \gamma\underline{a}_1 + \gamma^2\underline{a}_2 + \ldots,$$

$$\omega = \omega_0 + \gamma\omega_1 + \gamma^2\omega_2 + \ldots, \tag{24}$$

Условие сращивания внешнего решения $\overline{p} = 1 - t$ и внутреннего решения $\underline{p}(\tau)$ состоит в требовании $\overline{p}(0) = \underline{p}(\infty)$. Если в $\overline{p}(t)$ перейти к переменной $\tau$, получим $\overline{p} = 1 - \gamma\tau$. Следовательно,

$$\underline{p}_0 = 1,\ \underline{p}_1 \sim -\tau,\ \underline{p}_i = 0\ (i \geq 2),\ \text{при}\ \tau \to \infty. \tag{25}$$

Подставляя (24) в (18) - (19), раскладывая правые части по степеням $\gamma$ и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $\gamma$, получим уравнения для определения $\underline{a}_0, \underline{p}_0, \underline{a}_1, \underline{p}_1, \underline{a}_2, \underline{p}_2, \ldots$. Очевидно, что $\underline{a}_0 \equiv 0$.

Для коэффициентов $\underline{p}_0$ и $\underline{a}_1$ имеем систему уравнений

$$\frac{d\underline{p}_0}{d\tau} = \frac{e^{-\tau}\underline{a}_1 a_*}{\omega_0\underline{p}_0},\ \underline{p}_0(0) = 0;$$

$$\frac{d\underline{a}_1}{d\tau} = \frac{1}{Le},\ \underline{a}_1(0) = 0.$$

Решая ее, находим

$$\underline{a}_1 = \frac{\tau}{Le}; \tag{26}$$

$$\underline{p}_0 = \left( \frac{2a_*}{\omega_0 Le}(1 - e^{-\tau} - \tau e^{-\tau}) \right)^{1/2}. \tag{27}$$

Из условия сращивания (25) получаем значение $\omega_0$

$$\omega_0 = \frac{2a_*}{Le}, \tag{28}$$

Для коэффициента $\underline{a}_2$ получаем уравнение

$$\frac{d\underline{a}_2}{d\tau} = \frac{1}{Le}\frac{\tau - \underline{a}_1}{\underline{p}_0}, \ \underline{a}_2(0) = 0.$$

Подставляя в него найденные значения $\underline{p}_0$ и $\underline{a}_1$ и решая, находим

$$\underline{a}_2 = \sqrt{\frac{\omega_0}{2a_* Le}} \left(1 - \frac{1}{Le}\right) \int_0^\tau \frac{s}{\sqrt{1 - e^{-s} - se^{-s}}} ds. \tag{29}$$

Для коэффициента $\underline{p}_1$ получаем уравнение

$$\frac{d\underline{p}_1}{d\tau} + 1 = \frac{e^{-\tau}}{\omega_0 \underline{p}_0} \left( \underline{a}_2 a_* - \underline{a}_1^2 - \underline{a}_1 a_* \left( \frac{\omega_1}{\omega_0} + \frac{\underline{p}_1}{\underline{p}_0} + \mu\tau^2 \right) \right), \ \underline{p}_1(0) = 0.$$

Откуда имеем

$$\underline{p}_1(\tau) = -\frac{1}{\underline{p}_0(\tau)} \int_0^\tau \underline{p}_0(s) ds + \frac{1}{\omega_0 \underline{p}_0(\tau)} \int_0^\tau e^{-s} \left( \underline{a}_2 a_* - \underline{a}_1^2 - \right.$$

$$\left. - \underline{a}_1 a_* \left( \frac{\omega_1}{\omega_0} + \frac{\underline{p}_1(s)}{\underline{p}_0(s)} + \mu s^2 \right) \right) ds \tag{30}$$

или с учетом (26), (27) и (29)

$$\underline{p}_1(\tau) = -(1 - e^{-\tau} - \tau e^{-\tau})^{-1/2} \int_0^\tau (1 - e^{-s} - se^{-s})^{1/2} ds +$$

$$+ \sqrt{\frac{Le}{2a_*\omega_0}} (1 - e^{-\tau} - \tau e^{-\tau})^{-1/2} \int_0^\tau e^{-s} \left( \sqrt{\frac{\omega_0 a_*}{2Le}} \left(1 - \frac{1}{Le}\right) \times \right.$$

$$\left. \times \int_0^s \frac{z}{\sqrt{1 - e^{-z} - ze^{-z}}} dz - \frac{s^2}{Le^2} - \frac{sa_*}{Le} \left( \frac{\omega_1}{\omega_0} + \mu s^2 \right) \right) ds. \tag{31}$$

Из условия сращивания (25) с учетом (28) находим значение $\omega_1$.

$$\omega_1 = \frac{4a_*}{Le}\left(\int_0^{+\infty}(1-(1-e^{-s}-se^{-s})^{1/2})ds - \frac{1}{a_*Le} - 3\mu + \right.$$

$$\left. +\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{Le}\right)\int_0^{+\infty}e^{-s}\int_0^s \frac{z}{\sqrt{1-e^{-z}-ze^{-z}}}dzds\right). \qquad (32)$$

Для коэффициента $\underline{a}_3$ с учетом (27) и (29) имеем уравнение

$$\frac{d\underline{a}_3}{d\tau} = -\frac{\omega_0}{2a_*Le}\left(1-\frac{1}{Le}\right)(1-e^{-\tau}-\tau e^{-\tau})^{-1/2}\int_0^\tau \frac{s}{\sqrt{1-e^{-s}-se^{-s}}}ds -$$

$$-\frac{\omega_0}{2a_*}\left(1-\frac{1}{Le}\right)\frac{\tau}{1-e^{-\tau}-\tau e^{-\tau}}\underline{p}_1,\ \underline{a}_3(0)=0.$$

Откуда находим

$$\underline{a}_3 = -\frac{\omega_0}{2a_*Le}\left(1-\frac{1}{Le}\right)\int_0^\tau \frac{1}{\sqrt{1-e^{-s}-se^{-s}}}\times$$

$$\times\int_0^s \frac{z}{\sqrt{1-e^{-z}-ze^{-z}}}dzds - -\frac{\omega_0}{2a_*}\left(1-\frac{1}{Le}\right)\int_0^\tau \frac{s}{1-e^{-s}-se^{-s}}\times$$

$$\times(1-e^{-s}-se^{-s})^{-1/2}\left(-\int_0^s(1-e^{-z}-ze^{-z})^{1/2}ds + \right.$$

$$+\sqrt{\frac{Le}{2a_*\omega_0}}\int_0^s e^{-z}\left(\sqrt{\frac{\omega_0 a_*}{2Le}}\left(1-\frac{1}{Le}\right)\int_0^z \frac{ydy}{\sqrt{1-e^{-y}-ye^{-y}}} - \right.$$

$$\left.\left.-\frac{z^2}{Le^2}-\frac{za_*}{Le}\left(\frac{\omega_1}{\omega_0}+\mu z^2\right)\right)dz\right)ds. \qquad (33)$$

С учетом (33) для $\underline{p}_2$ имеем уравнение

$$\frac{d\underline{p}_2\underline{p}_0}{d\tau} = \frac{e^{-\tau}}{\omega_0}\left(\underline{a}_3a_* - 2\underline{a}_1\underline{a}_2(\underline{a}_2a_*-\underline{a}_1^2)\left(\frac{\omega_1}{\omega_0}+\frac{\underline{p}_1}{\underline{p}_0}\right) - \underline{a}_1a_*\times\right.$$

$$\times\left(\frac{\omega_2}{\omega_0}-\frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}-\frac{\underline{p}_1^2}{\underline{p}_0^2}-\frac{\omega_1\underline{p}_1}{\omega_0\underline{p}_0}\right) - \mu\tau^2\left(\underline{a}_2a_*-\underline{a}_1^2-\underline{a}_1a_*\times\right.$$

$$\left.\left.\times\left(\frac{\omega_1}{\omega_0}+\frac{\underline{p}_1}{\underline{p}_0}\right)\right) - \underline{a}_1a_*\mu^2\tau^3\right),\ \underline{p}_2(0)=0.$$

Откуда, учитывая (26), находим

$$\underline{p}_2(\tau)=\frac{1}{\omega_0\underline{p}_0(\tau)}\int_0^\tau e^{-s}\left(\underline{a}_3a_*-2\underline{a}_2\frac{s}{Le}-\left(\underline{a}_2a_*-\frac{s^2}{Le^2}\right)\times\right.$$

$$\times\left(\frac{\omega_1}{\omega_0}+\frac{\underline{p}_1(s)}{\underline{p}_0(s)}\right)-\frac{sa_*}{Le}\left(\frac{\omega_2}{\omega_0}-\frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}-\frac{\underline{p}_1^2(s)}{\underline{p}_0^2(s)}-\frac{\omega_1\underline{p}_1(s)}{\omega_0\underline{p}_0(s)}\right)-$$

$$\left.-\mu s^2\left(\underline{a}_2a_*-\frac{s^2}{Le^2}-\frac{sa_*}{Le}\left(\frac{\omega_1}{\omega_0}+\frac{\underline{p}_1(s)}{\underline{p}_0(s)}\right)\right)-\frac{a_*}{Le}s^4\mu^2\right)ds, \qquad (34)$$

где $\underline{p}_0$, $\underline{p}_1$, $\underline{a}_2$, и $\underline{a}_3$ находятся по формулам (27), (41), (29) и (33) соответственно. Из условия сращивания (25) с учетом (26) и (28) находим $\omega_2$

$$\omega_2=2\int_0^{+\infty}e^{-s}\left(\underline{a}_3a_*-2\underline{a}_2\frac{s}{Le}-\underline{a}_2a_*\left(\frac{\omega_1Le}{2a_*}+\mu s^2+\frac{\underline{p}_1}{\underline{p}_0}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{s^2\underline{p}_1}{Le^2\underline{p}_0}+\frac{sa_*}{Le}\left(\frac{\underline{p}_1^2}{\underline{p}_0^2}+\frac{\underline{p}_1\omega_1Le}{2\underline{p}_0a_*}+\frac{\underline{p}_1}{\underline{p}_0}\mu s^2\right)\right)ds+\frac{2\omega_1}{a_*Le}+\frac{48\mu}{Le^2}+$$

$$+\frac{\omega_1^2Le}{2a_*}+6\omega_1\mu-\frac{48\mu^2a_*}{Le}. \qquad (35)$$

Итак, с учетом (28), (32) и (35) асимптотика $\omega$ имеет вид

$$\omega=\omega_0+\omega_1\gamma+\omega_2\gamma^2+o(\gamma^2),$$

где $\omega_0,\omega_1$ и $\omega_2$ вычисляются по формулам (28), (32) и (35) соответственно.

Составное решение $p(t)$ определяется соотношением

$$p(t)=\overline{p}(t)+\underline{p}(t/\gamma)-\underline{p}(\infty)$$

или, с учетом (20), (27), (31), (34, а также (25),

$$p(t)=\left(1-e^{-t/\gamma}-\frac{t}{\gamma}e^{-t/\gamma}\right)^{1/2}-\gamma\left(\left(1-e^{-t/\gamma}-\frac{t}{\gamma}e^{-t/\gamma}\right)^{-1/2}\times\right.$$

$$\times\int_0^{t/\gamma}(1-e^{-s}-se^{-s})^{1/2}ds-\frac{Le}{2a_*}\left(1-e^{-t/\gamma}-\frac{t}{\gamma}e^{-t/\gamma}\right)^{-1/2}\times$$

$$\times` \int_0^{t/\gamma} e^{-s} \left( \frac{a_*}{Le} \left(1 - \frac{1}{Le}\right) \int_0^s \frac{z}{\sqrt{1 - e^{-z} - ze^{-z}}} dz - \frac{s^2}{Le^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{sa_*}{Le} \left( \frac{\omega_1 Le}{2a_*} + \mu s^2 \right) \right) ds \Bigg) + \gamma^2 \frac{Le}{2a_* \underline{p} *_0 (t/\gamma)} \int_0^{t/\gamma} e^{-s} \left( \underline{a}_3 a_* - \right.$$

$$-2\underline{a}_2 \frac{s}{Le} - \left( \underline{a}_2 a_* - \frac{s^2}{Le^2} \right) \left( \frac{\omega_1 Le}{2a_*} + \frac{*\underline{p}_1(s)}{\underline{p}_0(s)} \right) - \frac{a_*}{Le} s \left( \frac{\omega_2 Le}{2a_*} - \right.$$

$$\left. - \frac{\omega_1^2 Le^2}{4a_*^2} - \frac{\underline{p}_1^2(s)}{\underline{p}_0^2(s)} - \frac{\omega_1 \underline{p}_1(s) Le}{2a_* \underline{p}_0(s)} \right) - \mu s^2 \left( \underline{a}_2 a_* - * - \frac{s^2}{Le^2} - \right.$$

$$\left. \left. - \frac{a_*}{Le} s \left( \frac{\omega_1 Le}{2a_*} + \frac{\underline{p}_1(s)}{\underline{p}_0(s)} \right) \right) - \frac{a_*}{Le} s^4 \mu^2 \right) ds,$$

где $\omega_1$, $\underline{a}_2$, и $\underline{a}_3$ находятся по формулам (32), (29) и (33) соответственно.

Составное решение $a(t)$ определяется соотношением

$$a(t) = \overline{a}(t) + \underline{a}(t/\gamma) - \underline{a}(\infty).$$

Переходя в $\overline{a}(t)$ к переменной $\tau$, получим

$$\overline{a}(t) = 1 - (1-t)^{1/Le} = \frac{\tau}{Le}\gamma - \frac{1 - Le}{2Le^2}\tau^2\gamma^2 + \frac{1 - 3Le + 2Le^2}{6Le^3}\tau^3\gamma^3 + o(\gamma^3).$$

Условие сращивания внешнего решения $\overline{a}(t) = 1 - (1-t)^{1/Le}$ и внутреннего решения $\underline{a}(\tau)$ состоит в требовании $\overline{a}(0) = \underline{a}(\infty)$, то есть

$$a_0 \equiv 0, \; a_1 \sim \frac{\tau}{Le}, \; a_2 \sim \frac{1 - Le}{2Le^2}\tau^2, \; a_3 \sim \frac{1 - 3Le + 2Le^2}{6Le^3}\tau^3 \text{ при } \tau \to 0,$$

которые, как легко убедиться выполняются автоматически. Таким образом асимптотика a(t), с учетом (2.32.1), (26), (29) и (33) имеет вид

$$a(t) = 1 - (1-t)^{1/Le} + \frac{1}{Le}\left(1 - \frac{1}{Le}\right)\left(\gamma^2 \int_0^{t/\gamma} \frac{s}{\sqrt{1 - e^{-s} - se^{-s}}} ds - \right.$$

$$\left. - \frac{t^2}{2}\right) - \frac{1}{Le}\left(1 - \frac{1}{Le}\right)\left(\gamma^3 \frac{1}{Le} \int_0^{t/\gamma} \frac{1}{\sqrt{1 - e^{-s} - se^{-s}}} \times \right.$$

$$\times \int_0^s \frac{z}{\sqrt{1-e^{-z}-ze^{-z}}} dz ds + \int_0^{t/\gamma} \frac{s}{1-e^{-s}-se^{-s}} (1-e^{-s}-$$

$$-se^{-s})^{-1/2} \left( -\int_0^s (1-e^{-z}-ze^{-z})^{1/2} dz + \frac{Le}{2a_*} \int_0^s e^{-z} \left( \frac{a_*}{Le} \times \right.\right.$$

$$\times \left(1-\frac{1}{Le}\right) \int_0^z \frac{ydy}{\sqrt{1-e^{-y}-ye^{-y}}} - \frac{z^2}{Le^2} -$$

$$\left.\left. -\frac{za_*}{Le} \left( \frac{\omega_1 Le}{2a_*} + \mu z^2 \right) \right) dz \right) ds + \left( \left( \frac{1}{Le} - 2 \right) \frac{t^3}{6} \right) + \ldots ,$$

где $\omega_1$ вычисляется по формуле (32).

Несмотря на то, что здесь явно выписаны три члена асимптотики, построение дальнейших членов ряда не представляет принципиальных трудностей, а связано лишь с техническими трудностями.

## Литература


1. **Худяев С.И.** Математическая теория горения и взрыва. Черноголовка, 1980.46 с. Препринт отд. ИХФ АН СССР.

2. **Зельдович Я.Б.** К теории распространения пламени //*Ж. физ. химии.*1948.Т.22. № 1. С. 27–48.

3. **Баренблатт Г.И.** Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Л.: Гидрометеоиздат, 1978. 207 с.

4. **Канель Я.И.** О стационарном решении для системы уравнений теории горения //*Докл. АН СССР.*1963. Т. 149. № 2. С. 367–375.

5. **Ваганов Д.А., Худяев С.И.** Об одной стационарной задаче теории горения //*Физ. гор. и взрыва.* 1969. № 2. С. 167–176.

6. **Найфе А.Х.** Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.

7. **Худяев С.И.** К асимптотической теории стационарной волны горения //*Хим. физика.* 1987. Т.6. № 5. С. 681–691.

8. **Ильин А.М., Худяев С.И.** Об асимптотике стационарной волны горения в конденсированной среде // *Хим. физика.* 1989. Т.8. № 4. С. 525–532.

**Summary**

**Kondratieva T.V.,Kholopov V.M.** The asymptotic of Stationary Combustion Wave for Autocatalitic Reaction of the First Order

We suggest construction of asymptotic of stationary combustion wave for autocatalitic reaction of the first order in condensed phase ($Le = 0, Le$ is the Lewis number) and in gas ($Le > 0$). We find first terms of asymptotic of solution over small parameter $\gamma$. We also find asymptotic of rate of combustion.

*Сыктывкарский университет* *Поступила 8.02.95*