Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1.Вып.1.1995

УДК 517.972.5

Максимизация первого собственного значения уравнения малых колебаний неоднородной мембраны

А.Ю. Казаков

Рассматриваются собственные краевые задачи для самосопряженного эллиптического оператора с непрерывными коэффициентами в ограниченной связной области. Для I и III краевых задач ищется максимум первого собственного значения относительно ступенчатой функции $\rho(x)$ с заданной L_1–нормой, присутствующей множителем в правой части уравнения. Показано, что максимум достигается в этом классе, и максимизирующая функция описывается в терминах множества уровней соответствующей собственной функции.

Введение.

Рассмотрим равномерно эллиптический самосопряженный оператор с непрерывными коэффициентами в $\bar{\Omega}$, где $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ — ограниченная связная область:

$$Lu \equiv \sum_{i,j} \partial_j(a_{ij}(x)\partial_i u) = -\lambda\rho(x)u.$$

Здесь $\rho \in L_1(\Omega)$. Пусть даны 2 числа: $0 < \alpha < \beta$. Мембрану мы определяем выбором $\omega \subseteq \Omega$, где ρ принимает значение α, соответственно на $\Omega \setminus \omega$ $\rho \equiv \beta$. Следовательно, допустимым множеством для ρ будет $ad = \{\alpha\chi_\omega + \beta(1-\chi_\omega),\ x \in \Omega\}$; причем будем рассматривать такие $\rho(x)$, что $|\omega| = \gamma$ — фиксированное число: $\rho \in ad_\gamma = \{\alpha\chi_\omega + \beta(1-\chi_\omega) : |\omega| = \gamma\}$.

Например, для $L \equiv \Delta$ $\rho(x)$ будет плотностью мембраны, ad_γ — множество плотностей мембран, имеющих заданную массу. Задача Дирихле для такого уравнения рассматривалась в [1].

Нас интересует максимизация $\lambda_1(\rho)$ — собственного значения I и III краевых задач — в классе функций ad_γ.

1. Вспомогательные утверждения.

Приведенные в этом пункте сведения более подробно будут рассмотрены автором в другой статье ([2]), где решается задача минимизации собственных значений. Поэтому соответствующие доказательства, либо ссылки, которые можно найти в [2] здесь опущены.

Сначала будем искать экстремум в более широком классе функций:

$$\rho \in ad^*_\gamma = \Big\{\rho \in L_\infty(\Omega) : \alpha \le \rho \le \beta \text{ п.в. в } \Omega, \int\limits_\Omega \rho dx = \alpha\gamma + \beta(|\Omega| - \gamma)\Big\},$$

и затем (см.п.3) будет доказано, что $\hat{\rho}^\gamma_1$, на которой достигается $\sup\limits_{ad^*_\gamma} \lambda_1(\rho)$, лежит в ad_γ. Для нас важно, что это ad^*_γ, являющееся w^*-замыканием в $L_\infty(\Omega)$ множества ad_γ, будет w^*-компактным и выпуклым (w^* означает $*$ - слабую сходимость).

Лемма 1. *Множество экстремальных точек ad^*_γ совпадает с ad_γ.*

Слабыми решениями краевых задач с однородными граничными условиями на $\partial\Omega$ ($u\ |_{\partial\Omega} = 0$ и $(\sum\limits_{i,j=1}^N a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\nu_j + \sigma u)\ |_{\partial\Omega} = 0$), как обычно называем $u \in W$, удовлетворяющее $l(u,v) = \lambda(u,v)_\rho$ для $\forall v \in W$. (Здесь и далее обозначаем через $(u,v)_\rho$ скалярное произведение в $L_2(\Omega)$ с весом $\rho(x)$; $W = H^1(\Omega)$, $l(u,v) \equiv$ $\equiv \sum\limits_{i,j}\int\limits_\Omega a_{ij}(x)\partial_i u \partial_j v dx + \int\limits_{\partial\Omega} \sigma uv dS$ — для третьей краевой задачи, для задачи Дирихле второе слагаемое отсутствует и $W = H^1_0(\Omega)$.)

Лемма 2. *Для $\forall\rho \in ad^*_\gamma$ $\exists$ дискретный спектр $\{\lambda_k(\rho)\}$, $\lambda_k \to \infty$ при $k \to \infty$. Собственные значения выражаются через формулы:*

$$\lambda_1(\rho) = \inf_W R(\rho, u), \qquad -\frac{1}{\lambda_1(\rho)} = \inf_W A(\rho, u),$$

где $R(\rho,u) = \frac{l(u,u)}{\|u\|^2_\rho}$ — отношение Рэлея, а $A(\rho,u) = \frac{1}{2}l(u,u) - \|u\|_\rho$ — функционал Очмьюти, причем min достигается на 1-й собственной функции, нормализованной соответствующим образом (в последнем случае $\lambda_1^{-1}(\rho) = \|u_1\|_\rho = l(u_1,u_1)$).

Лемма 3. *$u_1 \in W \cap L_\infty(\Omega) \cap H^2_{loc}(\Omega) \cap C^1(\Omega)$ и удовлетворяет уравнению $Lu + \lambda\rho u = 0$ п.в. в Ω. Если $\partial\Omega \in C^2$, то $u_1 \in H^2(\Omega)$*

$\cap C^1(\Omega)$. *(Мы предполагали здесь ограниченность коэффициентов a_{ij} в Ω.)*

Лемма 4. *λ_1 простое, а $u_1 \neq 0$ в Ω и может быть взята положительной.*

Лемма 5. *Для $\partial\Omega \in C^2$, $\forall t \neq 0 \quad |u_1^{-1}\{t\}| = 0$.*

Лемма 6. *Пусть $(\rho^n) \xrightarrow{*} \rho$ в $L_\infty(\Omega)$. Тогда:*

1) $(\lambda_1(\rho^n)) \to \lambda_1(\rho)$;

2) $\exists n_0\ \forall n > n_0 \quad \lambda_1(\rho^n)$ простое и $(u_1(\rho^n)) \to u_1(\rho)$ в W.

Следствие из последней леммы. *Поскольку отображение $\rho \mapsto \lambda_1(\rho)$ является w^*-непрерывной функцией на w^*-компактном $ad_\gamma^*(\Omega)$, то для всякого γ найдутся $\hat{\rho}_1^\gamma \in ad_\gamma^*$ и $u \in W$, такие что*

$$\hat{\lambda}_1^\gamma \equiv \lambda_1(\hat{\rho}_1^\gamma) = \sup_{ad_\gamma^*} \lambda_1(\rho) \qquad \left(-\frac{1}{2\hat{\lambda}_1^\gamma} = A(\hat{\rho}_1^\gamma, \hat{u}_1^\gamma)\right).$$

Замечание. *Результаты п.1 можно перенести и на случай II краевой задачи. Однако функционал Очмьюти A для задачи Неймана имеет вид:*

$$A(\rho, u) = \frac{1}{2} l(u,u) + \frac{1}{2}\|u\|_\rho^2 - \|u\|_\rho,$$

и не все условия теоремы из пункта 2 для него будут выполнены, поэтому этот случай здесь далее не рассматривается.

2. Седловая точка.

Целью этого пункта будет установление равенства:

$$\sup_{\rho \in ad_\gamma^*} \inf_{u \in W} A(\rho, u) = A(\hat{\rho}_1^\gamma, \hat{u}_1^\gamma) = \inf_{u \in W} \sup_{\rho \in ad_\gamma^*} A(\rho, u).$$

Из [4.VI] имеем: $\sup_{\mathcal{A}} \inf_{\mathcal{B}} F \le \inf_{\mathcal{B}} \sup_{\mathcal{A}} F$; $(\rho_1, u_1) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ называется седловой точкой F на $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$, если для $\forall u \in \mathcal{B}\ \forall \rho \in \in \mathcal{A} \quad F(\rho, u_1) \le F(\rho_1, u_1) \le F(\rho_1, u)$.

Хотя на $ad_\gamma^* \times W$ не выполняются вогнутость $A(\rho)$ и выпуклость $A(u)$, можно воспользоваться более общей теоремой о седловой точке, требующей квазивогнутости (вогнутости на множествах уровней; это более слабое условие).

Определения. *Действительнозначная функция F квазивогнута на выпуклом множестве V, если для $\forall c \in \mathbf{R} \quad \{v \in V : F(v) \ge c\}$ выпукло. $F : V \to \mathbf{R}$ полунепрерывна снизу на V, если она удовлетворяет одному из равносильных условий:*

а. $\forall a \in \mathbf{R}$ $\quad \{u \in V : F(u) \le a\}$ *замкнуто, или*

б. $\forall \bar u \in V$ $\quad \liminf\limits_{u \to \bar u} F(u) \ge F(\bar u)$.

Полунепрерывность F сверху эквивалентна полунепрерывности $-F$ снизу.

Утверждение 1. *$A(\rho)$ квазивогнута на ad^*_γ.*

Доказательство. Пусть $\forall i \in \{1;2\}$ $A(\rho,u) \ge c$. Тогда

$$\frac{1}{2}l(u,u) - c \ge \|u\|_{\rho_i} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad A(t\rho_1 + (1-t)\rho_2, u) = \frac{1}{2}l(u,u) - \|u\|_{t\rho_1+(1-t)\rho_2} \ge$$

$$\ge \frac{1}{2}l(u,u) - \Big(t\big(\frac{1}{2}l(u,u)-c\big)^2 + (1-t)\big(\frac{1}{2}l(u,u)-c\big)^2\Big)^{\frac{1}{2}} = c.$$

Принцип Очмьюти дает нам $u_1(\rho)$: $\frac{1}{2\lambda_1(\rho)} = \inf\limits_W A(\rho,u) = A(\rho,u_1)$. Т.к. $A_1(\rho,0)=0$ и $A_1(\rho,\pm u_1) < 0$, то $A_1(u)$ не будет квазивыпуклой на W. Чтобы избежать эту трудность, рассмотрим выпуклое множество вне шара, содержащего $-u_1$,u_1. Таким множеством будет открытое $\Pi_\rho = \{v \in W : \lambda_1^2(\rho)(u_1,v)_\rho > 1\}$.

Утверждение 2. *$A(u)$ выпукла на Π_ρ .*

Доказательство.

$$D_2A(\rho,\overline{u})v \;=\; l(\overline{u},v) - \frac{(\overline{u},v)_\rho}{\|\overline{u}\|_\rho} ,$$

$$(D_2^2A(\rho,\overline{u})v,v) \;=\; \frac{d}{d\mu}\big(\mu l(v,v) - \frac{(\overline{u}+\mu v,v)_\rho}{\|\overline{u}+\mu v\|_\rho}\big)\,|_{\mu=0} =$$

$$= \; l(v,v) - \frac{\|v\|_\rho^2}{\|\overline{u}\|_\rho} + \frac{1}{\|\overline{u}\|_\rho^3}(\overline{u},v)_\rho^2 \;\ge$$

$$\ge R(\rho,v)\|v\|_\rho^2 - \frac{\|v\|_\rho^2}{\|\overline{u}\|_\rho} \;\ge\; \big(\lambda_1(\rho) - \frac{1}{\|\overline{u}\|_\rho}\big)\|v\|_\rho^2 .$$

Нам остается доказать: $\overline{u} \in \Pi_\rho \;\Rightarrow\; \lambda_1(\rho) > \|\overline{u}\|_\rho^{-1}$. Достаточно убедиться, что $(u_1,\overline{u})_\rho > \lambda_1^{-2}(\rho) = \|u_1\|_\rho^2 \;\Rightarrow\; \|\overline{u}\|_\rho > \|u_1\|_\rho$. Действительно, $\|\overline{u}\|_\rho\|u_1\|_\rho \ge (u_1,u)_\rho > \|u_1\|_\rho^2 \;\Rightarrow\; \|\overline{u}\|_\rho > \|u_1\|_\rho$.

Теорема о седловой точке [3,II.3.7]. *Пусть вещественнозначная функция F полунепрерывна сверху/снизу, квази-вогнуто-выпуклая на $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$. Если существует y_0 из $\mathcal{B}$ и $\alpha_0 < \inf_{y\in\mathcal{B}}\sup_{x\in\mathcal{A}} F$,* *такие что* $\{x \in A : F(x, y_0) \geq \alpha_0\}$ *компактно,то*

$$\sup_{x \in \mathcal{A}} \inf_{y \in \mathcal{B}} F(x, y) = \inf_{y \in \mathcal{B}} \sup_{x \in \mathcal{A}} F(x, y).$$

Формулировка и доказательство теоремы от противного для нашего случая приведено ниже.

Для того, чтобы получить выпуклость по u на всем W , не зависящем от ρ, в отличие от Π_ρ, будем рассматривать вместо A $A(\rho, u) + \pi(\rho, u)$, где $\pi(\rho, u)$ — индикатор множества Π_ρ, т.е.

$$\pi(\rho, u) = \begin{cases} 0, & u \in \Pi_\rho; \\ \infty, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Утверждение 3. $A(\rho) + \pi(\rho)$ *w^*-полунепрерывна сверху на* ad^*_γ.

Доказательство. A w^*-непрерывен на ad^*_γ (см. следствие в п.1). Возьмем $(\rho^n) \subset ad^*_\gamma$, $(\rho^n) \xrightarrow{*} \bar{\rho} \in ad^*_\gamma$. Покажем, что для всех U из W $\limsup\limits_{n \to \infty} \pi(\rho^n, u) \leq \pi(\bar{\rho}, u)$. Ясно, что надо рассматривать лишь $u \in \Pi_{\bar{\rho}}$. Из леммы 6 $\lambda_1^2(\rho^n)\big(u_1(\rho^n), u\big)^n_\rho \to \lambda_1^2(\bar{\rho})\big(u_1(\rho), u\big)_{\bar{\rho}}$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ $\exists n_0\ \forall n > n_0\ \lambda_1^2(\rho^n)\big(u_1(\rho^n), u\big)^n_\rho > 1 \Leftrightarrow \pi(\rho^n, u) = 0$. Полунепрерывность сверху конечно аддитивна.

Рассмотрим последовательность $(u_n) \subset \Pi_{\bar{\rho}}$, $u_n = (1 + \frac{1}{n})u_1(\rho)$. Для нее

$$A(\rho, u_n) + \pi(\rho, u_n) = (1 + \frac{1}{n})^2 \frac{1}{2\lambda_1(\rho)} + (1 + \frac{1}{n}) \frac{1}{2\lambda_1(\rho)} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{2\lambda_1(\rho)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \inf_W A(\rho, u) = \inf_W \big(A(\rho, u) + \pi(\rho, u)\big)$$

и, поскольку минимум достигается на Π_ρ , то

$$\sup_{\rho \in ad^*_\gamma} \inf_{u \in W} A(\rho, u) = \sup_{\rho \in ad^*_\gamma} \inf_{u \in W} \big(A(\rho, u) + \pi(\rho, u)\big) \leq \inf_{u \in W} \sup_{\rho \in ad^*_\gamma} A(\rho, u).$$

Обозначим через $\mathcal{A}'$ и $\mathcal{B}'$ соответственно $conv\{x^1, ..., x^m\}$ и $conv\{y^1, ..., y^n\}$, где $convC = \{\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i c^i \mid n \in \mathbf{N},\ \lambda_i \geq 0,\ c^i \in C,\ \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\}$. Определим на $\mathcal{A}' \times \mathcal{B}'$ отображение

$$\Phi(u, v) = \big\{(w, s) \in \mathcal{A}' \times \mathcal{B}',\ F(w, v) \geq a \text{ или } F(u, s) \leq a\big\}$$

(F — функция из теоремы [3.II.3.7]).

Теорема о фиксированной точке [3.II.3.6]. *Возьмем произвольное множество U в конечноразмерном линейном топологическом пространстве E. Пусть для всех u из U $\Phi(u) \subset E$ будет компактным множеством, таким что для всякого конечного подмножества $\{u^1; ...; u^n\} \subset U$ $conv\{u^1; ...; u^n\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \Phi(u^i)$. Тогда* $\bigcap_{u \in U} \Phi(u) \neq \emptyset$.

Это доказано в [5].

Теорема. $\sup_{ad^*_\gamma} \inf_W A = \inf_W \sup_{ad^*_\gamma} A$.

Доказательство. Пусть найдется такое c, что

$$\sup_{\rho \in ad^*_\gamma} \inf_{u \in W} \left(A(\rho, u) + \pi(\rho, u)\right) < c < \inf_{u \in W} \sup_{\rho \in ad^*_\gamma} A(\rho, u) .$$

Положим

$$\mathcal{A}_u = \left\{\rho \in ad^*_\gamma \ : \ A(\rho, u) + \pi(\rho, u) \geq c\right\},$$

$$\mathcal{B}_\rho = \left\{u \in W \ : \ A(\rho, u) \leq c\right\} .$$

Имеем: $\bigcap_{u \in W} \mathcal{A}_u = \bigcap_{\rho \in ad^*_\gamma} \mathcal{B}_\rho = \emptyset$. Согласно утверждению 3, $\mathcal{A}_u$ — w^*-замкнутое подмножество w^*-компактного ad^*. Подобным образом (заметим, что c можно взять из $\mathbf{R}_-$), $A(u)$ слабо полунепрерывен снизу. Это следует из [6]: $l(u, u)$ непрерывна, следовательно, слабо полунепрерывна снизу по u, $\|u\|_\rho \sim \|u\|_{L_2(\Omega)}$, которая слабо полунепрерывна на W (т.к. вложение $W \subset L_2(\Omega)$ компактно). Отсюда получаем, что для всех ρ $\mathcal{B}_\rho$ будет слабо замкнутым подмножеством слабо компактного множества $\left\{u \in W \ : \ \frac{1}{2} l(u, u) \leq \frac{1}{\lambda_1(\beta)}\right\}$. (Здесь $\lambda_1(\beta)$ — собственное заначение для $\rho \equiv const = \beta$. Очевидно, что $\lambda_1(\beta) \leq \lambda_1(\rho) \leq \lambda_1(\alpha)$.) Равенство $\emptyset$ пересечений влечет:

$$\exists \left\{u^1; \ldots; u^n\right\} \subset W \ \exists \left\{\rho^1; \ldots; \rho^m\right\} \subset ad^*_\gamma, \quad \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{A}_{u^i} = \bigcap_{i=1}^{m} \mathcal{B}_{\rho^i} = \emptyset.$$

Приведем это к противоречию с теоремой о фиксированной точке. $\mathcal{A}' = conv\{\rho^1; \ldots; \rho^m\}$, $\mathcal{B}' = conv\{u^1; \ldots; u^n\}$; $\Phi : \mathcal{A}' \times \mathcal{B}' \to \mathcal{A}' \times \mathcal{B}'$,

$$\Phi(\phi, v) = \{(\rho, u) \in \mathcal{A}' \times \mathcal{B}' \ : \ A(\rho, v) + \pi(\rho, v) \geq c \text{ или } A(\phi, u) \leq c\} .$$

$\mathcal{A}'$ и $\mathcal{B}'$, будучи конечно порожденными, компактны. **Проверим**, что Φ удовлетворяет условиям теоремы о фиксированной **точке**. Ее множество значений непусто: $(\phi, v) \in \Phi(\phi, v)$. Компактность же образа следует из полунепрерывности $A(\rho) + \pi(\rho)$ сверху и $A(u)$ снизу. Пусть $\{(\phi^1, v^1); \ldots; (\phi^p, v^p)\} \subset \mathcal{A}' \times \mathcal{B}'$, $t_i \in [0, +\infty)$, $\sum t_i = 1$, $i \in \{1; \ldots; p\}$, но

$$\sum_{j=1}^{p} t_j(\phi^j, v^j) \notin \Phi(\phi^i, v^i) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad A(\sum_{j=1}^{p} t_j\phi^j, v^i) + \pi(\sum_{j=1}^{p} t_j\phi^j, v^i) < c \quad \text{и} \quad A(\phi^i, \sum_{j=1}^{p} t_j v^j) > c\,.$$

Выпуклость $A(u) + \pi(u)$ и квазивогнутость $A(\rho)$ давали бы тогда:

$$c \;<\; A(\sum_{j=1}^{p} t_j\phi^j, \sum_{i=1}^{p} t_i v^i) + \pi(\sum_{j=1}^{p} t_j\phi^j, \sum_{i=1}^{p} t_i v^i) \;<\; c\,;$$

поэтому все-таки $conv\{(\phi^1, v^1), \ldots, (\phi^p, v^p)\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{p} \Phi(\phi^i, v^i)$ и, следовательно, $\exists(\overline{\rho}, \overline{u}) \in \mathcal{A}' \times \mathcal{B}'\ \forall(\rho, u) \in \mathcal{A}' \times \mathcal{B}'\ (\overline{\rho}, \overline{u}) \in \Phi(\rho, u)$, т.е.

$A(\overline{\rho}, u) + \pi(\overline{\rho}, u) \geq c$, либо $A(\rho, \overline{u}) \leq c$, $\Rightarrow$ $\overline{\rho} \in \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{A}_{u^i}$ или $\overline{u} \in \bigcap_{i=1}^{m} \mathcal{B}_{\rho^i}$ — противоречие.

Таким образом, получили, что $(\hat{\rho}_1^\gamma, \hat{u}_1^\gamma) = \sup_{ad_\gamma^*} \inf_W A(\rho, u)$ — седловая точка функционала Очмьюти.

3. Максимизация λ_1 в исходном классе ad_γ.

Из последней теоремы следует:

$$\text{для } \forall\rho\ \forall u \quad A(\rho, \hat{u}_1^\gamma) \leq A(\hat{\rho}_1^\gamma, \hat{u}_1^\gamma) \leq A(\hat{\rho}_1^\gamma, u)\,.$$

Второе неравенство просто утверждает, что $\hat{u}_1^\gamma$ — первая собственная функция, соответствующая $\rho(x) = \hat{\rho}_1^\gamma(x)$. Первое же неравенство намного интереснее, оно дает нам принцип минимума:

$$\text{для } \forall\rho \in ad_\gamma^* \quad \|\hat{u}_1^\gamma\|_{\hat{\rho}_1^\gamma} \leq \|\hat{u}_1^\gamma\|_\rho\,.$$

Получили следующее: на ad_γ^* в точке $\rho = \hat{\rho}_1^\gamma$ достигается минимум линейного непрерывного функционала $f(\rho) = \|\hat{u}_1^\gamma\|_\rho^2$.

Теорема. *Найдется* $\bar{l} \in \mathbf{R}$ *(его еще называют множителем Лагранжа), такое что в* $\rho = \hat{\rho}_1^\gamma$ *достигается и минимум функционала* $\|\hat{u}_1^\gamma\|_\rho^2 - \bar{l}\|\rho\|_{L_1(\Omega)}$.

Доказательство. Рассмотрим $\Phi : L_\infty(\Omega) \to \mathbf{R}^2$, Φ непрерывно и задается формулой:

$$\Phi(\rho) = \left(\|\hat{u}_1^\gamma\|_\rho^2, \|\rho\|_{L_1(\Omega)}\right) = (\xi_1, \xi_2).$$

Пусть $G = \Phi(ad^*) \subset \mathbf{R}^2$. Из непрерывности Φ и замкнутости ad^* получаем замкнутость G, а из выпуклости ad^* $\big(\rho^1, \rho^2 \in ad^* \Rightarrow \alpha\theta \leq \leq \rho^1\theta \leq \beta\theta,\ \alpha(1-\theta) \leq \rho^2(1-\theta) \leq \beta(1-\theta) \Rightarrow \alpha \leq \rho^1\theta + \rho^2(1-\theta) \leq \leq \beta \Rightarrow \rho^1\theta + \rho^2(1-\theta) \in ad^*\big)$ и линейности Φ по ρ — выпуклость; кроме того, G ограничено в $\mathbf{R}^2$. $\Phi(\hat{\rho}_1^\gamma) = (\xi_1^0, \xi_2^0) \in G$, причем $\xi_1^0 = = \min\limits_{(\xi_1, m_\gamma)} \xi_1$, а m_γ возьмем равным $\alpha\gamma = \beta(|\Omega| - \gamma)$.

$$\|\hat{u}_1^\gamma\|_{\hat{\rho}_1^\gamma}^2 = \min_{ad_\gamma^*} \|\hat{u}_1^\gamma\|_\rho^2 = \min_{(\xi_1, m_\gamma)} \|\hat{u}_1^\gamma\|_\rho^2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow (\xi_1^0, \xi_2^0) \in \partial G$ и $\exists \bar{l}$ (это $\bar{l}$ будет связано с углом наклона касательной к G в (ξ_1^0, ξ_2^0), если она существует), что $\forall (\xi_1, \xi_2) \in G \quad \xi_1^0 - \bar{l}\xi_2^0 \leq \leq \xi_1 - \bar{l}\xi_2$.

Следствие:

$$\exists \bar{l} \quad \forall \rho \in ad^* \qquad \int_\Omega \hat{\rho}_1^\gamma\big((\hat{u}_1^\gamma)^2 - \bar{l}\big)dx \leq \int_\Omega \rho\big((\hat{u}_1^\gamma)^2 - \bar{l}\big)dx.$$

Лемма. $f(\rho)$ *достигает на* ad_γ^* *соей верхней границы, по крайней мере, в одной точке* ad_γ.

Докажем это, используя лемму 1. Рассмотрим F — семейство $\emptyset \neq X \subseteq ad_\gamma^*$ — замкнутых подмножеств, таких что всякий содержащийся в ad_γ^* интервал, имеющий точки в X, обязан лежать в X. Имеем:

$$\forall \rho \in ad_\gamma^* \quad \{\rho\} \in F \Leftrightarrow \rho \in ad_\gamma.$$

Кроме того, F обладает следующим свойством:

$$X \in F \Rightarrow Y = \left\{x \in X : f(x) = \sup_X f\right\} \in F.$$

Действительно, как полунепрерывная сверху функция, f достигает на замкнутом X $\sup\limits_X f(x) = a \Rightarrow Y \neq \emptyset$; причем Y замкнуто. Пусть $\sigma, \tau \in ad_\gamma^*$, $\sigma \neq \tau$,

$$\rho = \lambda\sigma + (1-\lambda)\tau \in Y,\ \lambda \in (0;1) \quad \Rightarrow \quad \sigma, \tau \in X,$$

из линейности: $a = \lambda f(\sigma) + (1-\lambda) f(\tau) \le \lambda a + (1-\lambda) a \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(\sigma) = f(\tau) = a \Rightarrow \sigma, \tau \in Y \Rightarrow Y \in F.$$

В качестве X можно взять ad^*_γ. Соответствующее $Y \in F$. Из замкнутости ad^*_γ и из того, что $\emptyset \ne X \equiv \bigcap\limits_\alpha X_\alpha \in F$ (если $\forall \alpha \; X_\alpha \in F$) следует, что F индуктивно в отношении операции $\supset$. Поэтому Y содержит N — минимальный элемент F. Остается доказать, что N состоит из 1 точки ρ (это ρ тогда будет из ad^*_γ.) Т.к. $L_\infty(\Omega)$ хаусдорфово, локально выпуклое, то достаточно показать, что любая непрерывная линейная форма w на $L_\infty(\Omega)$ будет $const$ в N. Это следует из свойства:

$$M \equiv \{x \in N : w(x) = \sup_N w\} \in F,$$

и, в силу минимальности, $M = N$.

Следствие из принципа минимума дает нам важную геометрическую информацию на искомую функцию $\hat\rho^\gamma_1$:

$$\begin{cases} (\hat u^\gamma_1)^2 > \bar l \Rightarrow \hat\rho^\gamma_1 = \alpha, \\ (\hat u^\gamma_1)^2 < \bar l \Rightarrow \hat\rho^\gamma_1 = \beta, \\ (\hat u^\gamma_1)^2 = \bar l \text{ — не можем ничего сказать о } \hat\rho^\gamma_1. \end{cases}$$

На самом деле, как легко видеть, верно и обратное: из существования $\bar l$, для которого $\begin{cases} (\hat u^\gamma_1)^2 > \bar l \Rightarrow \hat\rho^\gamma_1 = \alpha, \\ (\hat u^\gamma_1)^2 < \bar l \Rightarrow \hat\rho^\gamma_1 = \beta, \end{cases}$ следует принцип минимума для ad^*_γ. Поэтому принцип минимума для $\rho \in ad^*_\gamma$ эквивалентен утверждению:

$$\exists \hat l > 0 \; \forall x \in \Omega \quad \begin{cases} \hat\rho^\gamma_1 = \beta \Rightarrow \hat u^\gamma_1(x) \le \hat l, \\ \alpha < \hat\rho^\gamma_1 < \beta \Rightarrow \hat u^\gamma_1(x) = \hat l, \\ \hat\rho^\gamma_1 = \beta \Rightarrow \hat u^\gamma_1(x) \ge \hat l. \end{cases}$$

Здесь воспользовались леммой 4. Для всякого $\gamma \in (0; |\Omega|)$ $\hat u^\gamma_1$ не меняет знак $\Rightarrow$ $\hat\rho^\gamma_1$ определяет $\hat u^\gamma_1$ с точностью до знака.

Утверждение 4. *$\hat\rho^\gamma_1$ может быть выбрано из ad_γ. Если $\partial\Omega \in \in C^2$, то $\hat u^\gamma_1$ однозначно определяет $\hat\rho^\gamma_1$.*

Доказательство. Принцип минимума дает: $\hat\rho^\gamma_1$ минимизирует непрерывный линейный функционал $f(\rho)$ на выпуклом компактном множестве, и первая часть утверждения следует из доказанной выше леммы. Вторая часть следует из леммы 5.

Доказательство единственности $\hat\rho^\gamma_1 \in ad_\gamma$ дословно совпадает с доказательством утверждения 7.10 из [1].

Литература

1. **Cox S., McLaughlin J.,** Extremal Eigenvalue Problems for Composite Membranes, //*Appl.Math.Optim.* 22, 1990, P.169-187.

2. **Казаков А.Ю.** Минимизация собственных значений уравнения малых колебаний составной мембраны//*Вестник МГУ.* 1995. В печати.

3. **Bapbu V., Precupanu T.** Convexity and Optimization in Banach Spaces. Reidel. Boston. 1986.

4. **Экланд И., Темам Р.** Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979.

5. **Knaster B., Kuratowski C. and Mazurkiewicz S.** Eine beweis des fixpunksatzes für n-dimensionale simplexe//*Fund.Math.* 14. 1929. P.132-137.

6. **Auchmuty G.** Dual variational principles for eigenvalue problems, in *Nonlinear Functional Analysis and Its Applications, F. Browder, ed.* American Mathematical Society. Providence. RI. 1986. P.55-71.

Summary

Kazakov A.Y. The maximazation of the first eigenvalue for the little displacement equation of a composite membrane.

Extremazing boundary eigenvalue problems for elliptic selfadjoint operators with continuous coefficients in a bounded connected set are solved in the class of functions of fixed L_1- norm, being present in the right part of the equation. This article generalizes results of S.Cox and J.McLaughlin.

Сыктывкарский университет

Поступила 8.02.95