Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1.Вып.1.1995

УДК 519.717

О НЕКОТОРОМ ИНВАРИАНТЕ ГРАФОВ, ОПРЕДЕЛЯЕМОМ ЧЕРЕЗ ОПТИМАЛЬНЫЕ НУМЕРАЦИИ ВЕРШИН[1]

П.А.Головач

В настоящей работе рассматривается новый инвариант графов, названный нами суммарной величиной вершинного разделения. В работе показано, что задача распознавания: по графу G и неотрицательному целому числу k проверить, верно ли, что $sv(G) \leq k$, где $sv(G)$ — суммарная величина вершинного разделения графа G, является NP-полной даже для реберных графов.

1.Основные определения. В этом разделе будут даны осно ные определения, которые потребуются нам в этой работе.

Пусть $G = (V, E)$ — простой граф с n вершинами. Сразу от тим, что мы будем рассматривать только простые графы, не ого ривая этого в дальнейшем.

Взаимно однозначное отображение $f: V \to \{1, \ldots, n\}$ называе нумерацией вершин графа G.

Положим

$$S_i(G, f) = |\{\, v: v \in V, f(v) \leq i \text{ и существует}$$

$$\text{ребро } (v, u) \text{ такое, что } f(u) > i\}|,$$

где f — нумерация вершин графа G, $i \in \overline{1, n}$, а через $|A|$ обозна ется число элементов конечного множества A.

Величиной вершинного разделения графа G при нумерации шин f называется величина

$$vs(G, f) = \max_{i \in \overline{1,n}} S_i(G, f),$$

[1]Работа выполнена при частичной поддержке программы "Университеты Росс

а величиной вершинного разделения графа G — величина

$$vs(G) = \min vs(G, f),$$

где минимум берется по всевозможным нумерациям f вершин графа G (см., например, работы [3,4]).

Мы в этой работе рассмотрим другую "норму". Положим

$$sv(G, f) = \sum_{i=1}^{n} S_i(G, f),$$

где f — нумерация вершин графа G, и назовем суммарной величиной вершинного разделения графа G величину

$$sv(G) = \min sv(G, f),$$

где минимум берется по всевозможным нумерациям f вершин графа G.

Напомним (см., например, [2]) в этой связи, что шириной ленты графа G при нумерации f называется величина

$$bw(G, f) = \max\{\, |f(u) - f(v)| \colon (u, v) \in E\},$$

а шириной ленты графа G — величина

$$bw(G) = \min bw(G, f),$$

где минимум берется по всевозможным нумерациям f вершин графа G. Соответственно, суммарной шириной ленты графа G называется величина

$$bws(G) = \min \sum_{(u,v)\in E} |f(u) - f(v)|,$$

где минимум берется по всевозможным нумерациям f вершин графа G. Таким образом, введенный нами инвариант находится в том же отношении к величине вершинного разделения, в каком ширина ленты графа находится к суммарной ширине ленты.

2.Сложность. В этом разделе мы рассмотрим вопрос о сложности вычисления суммарной величины вершинного разделения.

Оценим сначала наш инвариант снизу.

Теорема 1. *Пусть G — граф с m ребрами. Тогда $sv(G) \geq m$.*

Рассмотрим произвольную нумерацию вершин f графа G. Обозначим через r_i число ребер, соединяющих вершину, получившую номер i, с вершинами с номерами меньшими, чем i, $i \in \overline{1,n}$, где n — число вершин G. Легко видеть, что $r_i \leq S_{i-1}(G,f)$ при $i \in \overline{2,n}$. Поскольку $r_1 = 0$ и $S_n = 0$, то получаем, что $sv(G,f) = \sum_{i=1}^{n} S_i \geq \sum_{i=1}^{n} r_i = m$. Так как f — произвольная нумерация, то и $sv(G) \geq m$.

Оказывается, что эта оценка является точной для графов интервалов.

Теорема 2. *Пусть G — граф интервалов с m ребрами. Тогда $sv(G) = m$.*

Поскольку G — граф интервалов, то вершинам G соответствуют интервалы действительной прямой и две вершины графа G смежны тогда и только тогда, когда соответствующие им интервалы пересекаются. Будем считать (очевидно, что это не приводит к умалению общности), что левые концы всех интервалов, соответствующих вершинам G, различаются. Перенумеруем вершины G в порядке возрастания величин левых концов соответствующих им интервалов и обозначим получившуюся нумерацию вершин через f. Заметим, что если вершина с номером i смежна вершине с номером j и $i < j$, то для любого $k \in \overline{i+1,j}$ вершина с номером i смежна вершине с номером k. Из этого замечания вытекает, что $r_i \geq S_{i-1}(G,f)$ при $i \in \overline{2,n}$, где r_i, как и в доказательстве предыдущей теоремы, это число ребер, соединяющих вершину с номером i с вершинами с номерами меньшими, чем i. Так как $r_i = 0$ и $S_n(G,f) = 0$, то $sv(G,f) = \sum_{i=1}^{n} S_i(G,f) \leq \sum_{i=1}^{n} r_i = m$. Поскольку, по предыдущей теореме, $sv(G) \geq m$, то очевидно, что нумерация f является оптимальной и $sv(G) = m$.

Охарактеризуем теперь с помощью графов интервалов суммарную величину вершинного разделения произвольного графа. Для этого нам потребуется следующая простая лемма.

Лемма. *Пусть G_1,G_2 — графы и G_1 — подграф G_2. Тогда $sv(G_1) \leq sv(G_2)$.*

Пусть f — оптимальная нумерация вершин графа G_2, то есть $sv(G_2) = sv(G_2, f)$. Рассмотрим нумерацию g вершин графа G_1 такую, что вершины G_1 нумеруются в той же последовательности, что и вершины G_2 при нумерации f. Легко видеть, что $sv(G_1) \leq sv(G_1, g) \leq sv(G_2, f) = sv(G)$.

Сформулируем теперь основное утверждение этого пункта.

Теорема 3. *Пусть G — граф. Суммарная величина вершинного разделения графа G совпадает с числом ребер минимального по числу ребер графа интервалов, содержащего граф G в качестве подграфа.*

Ясно, что для доказательства этой теоремы достаточно построить граф интервалов, содержащий граф G в качестве подграфа, суммарная величина вершинного разделения которого совпадает с $sv(G)$.

Рассмотрим оптимальную нумерацию f вершин графа G. Обозначим через v_i вершину с номером i при $i \in \overline{1,n}$, где n — число вершин графа G. Для каждого $i \in \overline{1,n}$ сопоставим вершине v_i интервал $[i, a_i]$, где $a_i = i + \frac{1}{2}$, если вершина v_i не смежна вершинам с номерами большими, чем i, и $a_i = \max\{k \colon k \in \overline{i+1,n}$ и вершина v_i смежна вершине $v_k\} + \frac{1}{2}$. Обозначим порожденный этими интервалами граф интервалов через $I(G)$.

Докажем, что граф G является подграфом графа $I(G)$. Для этого достаточно показать, что если две вершины графа G являются смежными, то соответствующие им интервалы пересекаются. Пусть (v_i, v_j) — ребро графа G и $i < j$. Вершине v_i сопоставлен интервал $[i, a_i]$, а вершине v_j — интервал $[j, a_j]$. Из определения этих интервалов, а также из того, что $i < j$ сразу следует, что $i < j < a_i$ и, следовательно, эти интервалы пересекаются.

Поскольку граф G является подграфом $I(G)$, то, по нашей лемме, $sv(G) \leq sv(I(G))$. Докажем, что имеет место и обратное неравенство: $sv(G) \geq sv(I(G))$. Ясно, что для этого достаточно доказать, что $sv(G, f) \geq sv(I(G), f)$. Покажем, что для любого $i \in \overline{1,n}$ $S_i(G, f) \geq S_i(I(G), f)$. Это вытекает из того, что если вершина v_j, где $j \leq i$ смежна в графе $I(G)$ вершине v_k, где $k > i$, то $j < k < a_j$, а по определению a_j из этого следует, что вершина v_j смежна в графе G некоторой вершине v_p, где $p \in \overline{k,n}$.

Из полученных неравенств вытекает, что $sv(G) = sv(I(G))$. Из этого равенства, а также из того, что граф G является подграфом графа интервалов $I(G)$, сразу следует утверждение теоремы.

Таким образом, задача вычисления суммарной величины вершинного разделения графа свелась к задаче о минимальном числе ребер, добавление которых к исходному графу делает его графом интервалов.

Из теоремы 3 немедленно вытекает следующее утверждение.

Следствие. *Пусть G — граф с m ребрами. $sv(G) = m$ тогда и* *только тогда, когда G является графом интервалов.*

Известно (см.[1]), что проверить является ли граф графом интервалов, можно с помощью полиномиального алгоритма. Поэтому проверить верно ли, что $sv(G) = m$, можно за полиномиальное время. Однако в общем случае задача оказывается более сложной.

Теорема 4. *Задача распознавания: по графу G и неотрицательному целому числу k проверить, верно ли, что $sv(G) \leq k$, является NP-полной даже для реберных графов.*

Принадлежность нашей задачи классу NP очевидна.

Согласно [1] задача распознавания: по графу $G = (V, E)$ и неотрицательному целому числу k определить, существует ли множество E', содержащее E, такое, что $|E' \setminus E| \leq k$ и граф $G' = (V, E')$ является графом интервалов, является NP-полной даже для реберных графов. Из теоремы 3 сразу следует, что эта задача полиномиально преобразуется к нашей.

Литература

1. **Гэри М.,Джонсон Д.** Вычислительные машины и труднорешаемые задачи.М.:Мир,1982.

2. **Chinn P.Z.,Chvatalova J.,Dewdeny A.K.,Gibbs N.E.** Bandwidth Problem for Graphs and Matrices. — A survey//*J. of Graph Theory.* 1982. V.6. P.223–254.

3. **Ellis J.A.,Sudborough I.H.,Turner J.S.** Graph Separation and Search Number//*Proc. of the Allerton Conf. on Communication, Control and Computig.* 1983. P.224–233.

4. **Kinnersly N.G.** The vertex separation number of a graph equals its pathwidth//*Inform. Process Lett.* 1992. V.42. P.345–350.

Summary

Golovach P.A. On one invariant of graphs defined through optimal numbering of vertices

A new invariant of graphs defined through optimal numbering of vertexes is considered. The problem of computation of this invariant is proved to be NP-hard.

Сыктывкарский университет

Поступила 11.02.94