Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1.Вып.1.1995

УДК 539.3

Устойчивость цилиндрической оболочки с односторонним подкреплением

М.Л.Герасин

Рассматривается задача об устойчивости круговой цилиндрической оболочки, подкрепленной абсолютно жесткими ребрами одностороннего действия, для случая внешнего нормального давления. Используется энергетический критерий устойчивости. Вычисляется минимальное значение нагрузки, при котором задача невыпуклого квадратичного программирования имеет нетривиальное решение. Поставленная задача решается сочетанием метода дихотомии и метода ветвей и границ. Приводятся результаты численных экспериментов.

Рассмотрим задачу об устойчивости замкнутой круговой цилиндрической оболочки, подвергающейся действию равномерно распределенного по боковой поверхности внешнего давления q. Такой вид нагружения характерен, например, для корпусов подводных лодок и корпусов авиационных двигателей. Будем считать, что оболочка шарнирно оперта по концам, толщина оболочки равна h, длина — L, радиус — R. Координата срединной поверхности x отсчитывается вдоль образующей, y — по дуге. Оболочка подкреплена внутренними абсолютно жесткими кольцами. Кольца свободно вложены в оболочку, при ее деформации допускается отход оболочки от колец подкрепления в наружную сторону. Аналогичная задача была решена в [1] для случая сжатия оболочки вдоль образующей.

Требуется найти минимальное значение q, при котором оболочка теряет устойчивость. Для нахождения критического значения q воспользуемся энергетическим критерием устойчивости. Вычислим полную энергию системы

$$Э = U_с + U_и - W,$$

где U_c — потенциальная энергия деформации срединной поверхности, $U_и$ — потенциальная энергия изгиба, W — работа внешних сил.

Величины U_c и $U_и$ определяются следующими формулами [2, с.497,527]:

$$U_c = \frac{h}{2E} \int\limits_0^L \int\limits_0^{2\pi R} \left[(\Delta\Phi)^2 - (1+\nu)\mathbf{L}(\Phi, \Phi) \right] dx\, dy,$$

$$U_и = \frac{D}{2} \int\limits_0^L \int\limits_0^{2\pi R} \left[(\Delta w)^2 - (1-\nu)\mathbf{L}(w, w) \right] dx\, dy.$$

Здесь w — прогиб, считающийся положительным, если он отсчитывается к центру кривизны, Φ — функция напряжений, ν — коэффициент Пуассона, E — модуль Юнга, $D = Eh^3/[12(1-\nu^2)]$, Δ — оператор Лапласа:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2};$$

оператор $\mathbf{L}$ задается следующей формулой:

$$\mathbf{L} = 2 \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right)^2 \right].$$

Величину работы внешних сил W будем вычислять по приближенной формуле [2, с.551]

$$W = q \int\limits_0^L \int\limits_0^{2\pi R} w\, dx\, dy. \tag{1}$$

Функция напряжений Φ определяется следующими соотношениями:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \tau = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\, \partial y}.$$

Известно [2, с.509], что функция напряжений Φ и прогиб w удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\frac{1}{E} \Delta^2 \Phi = -\frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \tag{2}$$

Если круговая оболочка подвергается действию внешнего давления q и изгиб оболочки отсутствует, то из уравнений равновесия следует, что напряжение вдоль дуги равно $\sigma_y = -qR/h$.

В рассматриваемой задаче функции w и Φ должны удовлетворять следующим граничным условиям:

$$w(x,y) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x = 0, L, \quad \text{для всех } y;$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \sigma_x = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \sigma_y = -qR/h, \quad \text{при } x = 0, L, \text{ для всех } y;$$

функции $w(x,y)$, $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}$ и $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$ периодические по y с периодом $2\pi R$.

Прогиб w будем искать в виде двойного тригонометрического ряда

$$w = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} w_{ij} \sin \psi_i x \cos \phi_j y, \tag{3}$$

где $\psi_i = \frac{\pi i}{L}$, $\phi_j = \frac{j}{R}$.

После подстановки (3) в (2) получим

$$\frac{1}{E} \Delta^2 \Phi = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} w_{ij} \psi_i^2 \sin \psi_i x \cos \phi_j y.$$

Отсюда можно найти Φ:

$$\Phi = \frac{E}{R} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \frac{\psi_i^2}{(\psi_i, \phi_j)} w_{ij} \sin \psi_i x \cos \phi_j y - \frac{qR}{Eh} \frac{x^2}{2},$$

где $(\psi_i, \phi_j) = (\psi_i^2 + \phi_j^2)^2$.

Зная w и Φ, нетрудно вычислить U_c и $U_и$:

$$U_c = \frac{h}{2E} \left(\frac{2\pi R^3 L}{h^2} + \frac{\pi E^2 L q^2}{2R} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \frac{\psi_i^4}{(\psi_i, \phi_j)} w_{ij}^2 \right), \tag{4}$$

$$U_{\text{и}} = \frac{\pi RLD}{4} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (\psi_i, \phi_j) w_{ij}^2. \tag{5}$$

Если подставить выражение (3) для прогиба w в формулу (1), то получим $W = 0$. Необходимо учесть нелинейную составляющую деформации. Формула для деформации срединной поверхности в этом случае имеет вид [2, с.527]

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 - \frac{w}{R}. \tag{6}$$

Приняв условие нерастяжимости срединной поверхности в направлении дуги, положим $\varepsilon_y = 0$. Тогда из (6) получим, что

$$w = R\left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]. \tag{7}$$

Из условия периодичности следует, что приращение v при изменении y на $2\pi R$ должно быть равно нулю

$$\int_0^{2\pi R} \frac{\partial v}{\partial y}\, dy = 0. \tag{8}$$

Подставив w из формулы (7) с учетом соотношения (8) в выражение (1), будем иметь

$$W = q\frac{R}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi R} \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 dx\, dy.$$

Подставив сюда w из (3), получим

$$W = \frac{\pi Lq}{4} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} j^2 w_{ij}^2.$$

Согласно энергетическому критерию задача об устойчивости цилиндрической оболочки сводится к вычислению минимального значения q, при котором следующая экстремальная задача имеет нетривиальное решение:

$$\text{Э} \;\to\; \min_{w_{ij}}, \tag{9}$$

$$w(x_k, y) \;\leq\; 0, \quad k \in 1 : K, \tag{10}$$

где x_k - координаты колец жесткости, K - число колец.

В формуле (4) для U_c имеется слагаемое, не зависящее от w_{ij}. При решении экстремальной задачи (9)–(10) оно никакого влияния не оказывает, поэтому учитывать его не будем.

При численном решении задачи (9)–(10) непрерывные ограничения (10) для прогиба w заменим на дискретные на сетке из M точек по координате y.

В формуле (3) значение $j = 1$ соответствует смещению оболочки как жесткого целого, поэтому при вычислении функции ограничений суммирование будем начинать с индекса $j = 2$.

С учетом сделанных замечаний задачу (9)–(10) можно записать так:

$$\frac{\pi}{4}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\pi^4 hE}{RL^3(\psi_i,\phi_j)}i^4 + RLD(\psi_i,\phi_j)\right]w_{ij}^2 -$$

$$-\frac{\pi}{4}Lq\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} j^2 w_{ij}^2 \to \min_{w_{ij}}, \tag{11}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=2}^{n} w_{ij}\,\sin\psi_i x_k\,\cos\phi_j y_l \le 0, \quad k\in 1:K, \quad l\in 1:M. \tag{12}$$

Задача (11)–(12) представляет собой задачу квадратичного программирования относительно неизвестных w_{ij}. Изменим систему обозначений, перейдя к привычной для подобных задач символике. Двумерные переменные w_{ij} заменим на обычные одномерные x_t ($t \in 1 : N$, $N = mn$), коэффициенты слагаемых в суммах целевой функции обозначим b_t и d_t, параметр q заменим на λ. Ограничения (12) запишем в матричной форме, объединив коэффициенты в матрицу A (слагаемым целевой функции с $j = 1$ соответствуют нулевые столбцы матрицы).

В новых обозначения задача примет вид ($t \to j$):

$$f(x,\lambda) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}(b_j - \lambda d_j)x_j^2 \to \min_x, \tag{13}$$

$$Ax \le \mathbf{0}. \tag{14}$$

Задача (13)–(14) - это задача невыпуклого квадратичного программирования, при достаточно больших значениях λ некоторые коэффициенты $c_j := (b_j - \lambda d_j)$ целевой функции (13) будут иметь отрицательные значения. В отличие от задач выпуклого квадратичного программирования, которые имеют единственную точку минимума и методы решения которых хорошо разработаны, решение задач невыпуклого квадратичного программирования представляет собой сложную проблему.

Отметим некоторые особенности задачи (13)–(14). Целевая функция (13) *сепарабельная*, т.е. представляет собой сумму квадратичных функций одной переменной. Ограничения задачи *положительно однородны*, т.е. если вектор x удовлетворяет ограничениям (14), то для любого $k > 0$ вектор kx тоже будет удовлетворять ограничениям, при этом $f(kx, \lambda) = k^2 f(x, \lambda)$. Коэффициенты $b_j > 0$, $d_j > 0$, $j \in 1 : N$.

Векторы x, удовлетворяющие ограничениям (14), образуют конус

$$\mathbf{C} = \{x \in \mathbf{R}^N : Ax \leq \mathbf{0}\}.$$

Если $x_0 \neq \mathbf{0}$, $x_0 \in \mathbf{C}$ и $f(x_0, \lambda) = 0$ для некоторого $\lambda > 0$, то $f(kx_0, \lambda) = 0$ для любого $k > 0$.

Если $x_0 \neq \mathbf{0}$, $x_0 \in \mathbf{C}$ и $f(x_0, \lambda) < 0$ для некоторого $\lambda > 0$, то $f(kx_0, \lambda) < 0$ для любого $k > 0$, и $f(kx_0, \lambda) \to -\infty$ при $k \to \infty$.

При достаточно больших λ выполняются условия $c_j < 0$, $j \in 1 : N$. Отсюда следует, что в этом случае

$$\inf_{x \in \mathbf{C}} f(x, \lambda) = -\infty.$$

При $\lambda = 0$ все $c_j > 0$, $j \in 1 : N$. В этом случае задача (13)–(14) имеет единственное тривиальное решение $x^* = \mathbf{0}$.

Предположим, что в задаче (13)–(14) отсутствуют ограничения (14). Тогда искомым значением λ является то, при котором какой-либо коэффициент c_j обращается в нуль. В этом случае соответствующая переменная x_j может принимать любые значения, все остальные переменные можно считать равными нулю, при этом целевая функция тоже равна нулю. Величина критического значения λ^* определяется по формуле

$$\lambda^* = \min_{j \in 1:N} \frac{b_j}{d_j}. \tag{15}$$

При наличии же ограничений (14) найденное значение

$$x^* = (0, \cdots, 0, x_j, 0, \cdots)$$

может не принадлежать конусу ограничений.

Разобъем множество индексов $\mathbf{N} := \{1, \ldots, N\}$ на два подмножества (при некотором значении λ):

$$\mathbf{N}_+ := \{j \in \mathbf{N} : c(j) > 0\}, \quad \mathbf{N}_- := \{j \in \mathbf{N} : c(j) \le 0\}$$

и рассмотрим задачу

$$f(x, \lambda) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} c_j x_j^2 \to \min_x, \tag{16}$$

$$Ax \le \mathbf{0}, \tag{17}$$

$$-p \le x(i) \le p, \quad i \in \mathbf{N}_-, \tag{18}$$

где p — некоторое положительное число.

В отношении проблемы устойчивости задачи (16)–(18) и (13)–(14) эквивалентны: если задача (16)–(18) имеет нетривиальное решение, то и задача (13)–(14) также имеет нетривиальное решение. Если же задача (16)–(18) имеет только тривиальное решение $x^* = \mathbf{0}$, то и в задаче (13)–(14) имеется только тривиальное решение. Но первая задача, в отличие от второй, всегда имеет конечное решение.

Обозначим через $F(\lambda)$ значение функции $f(x^*, \lambda)$ в точке глобального минимума x^* задачи (16)–(18). Можно доказать, что существует единственное значение λ^*, обладающее следующими свойствами:

I. Если $\lambda < \lambda^*$, то задача (16)–(18) имеет единственное решение $x^* = \mathbf{0}$ и $F(\lambda) = 0$.

II. Если $\lambda = \lambda^*$, то существует нетривиальное решение задачи (16)–(18) $x^* \ne \mathbf{0}$, при этом $F(\lambda^*) = 0$.

III. Если $\lambda > \lambda^*$, то существует нетривиальное решение задачи (16)–(18) $x^* \ne \mathbf{0}$, при этом $F(\lambda) < 0$.

Опишем алгоритм решения подобных задач, предложенный в [3]. Для отыскания λ^* применим *метод половинного деления*. Локализуем интервал неопределенности для λ^*. Вначале выберем λ_l таким. чтобы выполнялось условие $F(\lambda_l) = 0$ (можно взять $\lambda_l = 0$). Затем выберем λ_r столь большим, чтобы $F(\lambda_r) < 0$. Вычислим значение $F(\lambda_c)$ в середине интервала неопределенности: $\lambda_c = (\lambda_l + \lambda_r)/2$. Если $F(\lambda_c) = 0$, то полагаем $\lambda_l := \lambda_c$, если $F(\lambda_c) < 0$, тогда $\lambda_r := \lambda_c$.

На каждом шаге длина интервала неопределенности сокращается в два раза. Вычисления прекращаются, когда его длина станет меньше заданной малой величины δ.

Заметим, что в случае III глобальный минимум искать фактически не надо. Достаточно найти любое x_0 такое, что $f(x_0, \lambda) < 0$. Напротив, в случае I необходимо найти именно глобальный минимум, так как для любого значения λ в точке $x = 0$ выполняются необходимые условия экстремума в задаче (16)–(18), и необходимо убедиться, что это точка глобального минимума.

Глобальный минимум в задаче (16)–(18) будем искать *методом ветвей и границ* [4,5]. Идея метода состоит в построении "выпуклых огибающих" целевой функции и разбиении множества допустимых значений на выпуклые множества. "Выпуклая огибающая" представляет собой нижнюю аппроксимацию целевой функции и на каждом выпуклом множестве имеет единственную точку минимума. Наименьшее значение "выпуклой огибающей" дает оценку глобального минимума в задаче невыпуклого программирования.

Целевая функция (16) является сепарабельной. Функции одной переменной $\frac{1}{2}c_j x_j^2$ при $j \in \mathrm{N}_+$ выпуклы, при $j \in \mathrm{N}_-$ вогнуты. Заменим вогнутые функции линейными (выпуклыми) функциями $l_j(x_j)$ на отрезках $[a_j, b_j]$ так, чтобы их значения на концах отрезков совпадали:

$$l_j(x_j) = d_j x_j + e_j,$$

где

$$d_j = \frac{1}{2}c_j(a_j + b_j), \quad e_j = -\frac{1}{2}c_j a_j b_j.$$

Введем в рассмотрение функцию

$$G(x) = \frac{1}{2}\sum_{j \in \mathrm{N}_+} c_j x_j^2 + \sum_{j \in \mathrm{N}_-} (d_j x_j + e_j), \tag{19}$$

для заданного набора отрезков $[a_j, b_j]$, $j \in \mathrm{N}_-$.

Обозначим через Π координатный многомерный параллелепипед

$$\Pi = \{x_j \in \mathrm{R}^{\mathrm{N}_-} : a_j \leq x_j \leq b_j, \quad j \in \mathrm{N}_-\}.$$

На начальном шаге метода ветвей и границ $a_j = -p$, $b_j = p$ для всех $j \in \mathrm{N}_-$.

На k-м шаге координатный параллелепипед разбит на меньшие координатные параллелепипеды Π_i, объединение которых совпадает с начальным. На каждом из них определим функцию $G_i(x)$, $i \in 1:k$, по формуле (19). Очевидно, что справедливо неравенство

$$G_i(x) \leq f(x, \lambda) \tag{20}$$

для всех допустимых x, принадлежащих параллелепипеду.

Для каждого параллелепипеда решается задача выпуклого квадратичного программирования (в случае, когда множество допустимых значений не пусто)

$$G_i(x) \to \min_{x \in \Pi_i \cap \mathbf{C}}, \quad i \in 1:k. \tag{21}$$

Методы решения таких задач хорошо разработаны (см., например, [6-8]).

Обозначим через x_*^i, $i \in 1:k$, точки минимума в задачах (21), а через x_* — точку, которой соответствует минимум по всем i:

$$x_* := \arg\min_i G_i(x_*^i).$$

Этот минимум достигается на некотором индексе i_0. Из неравенства (20) следует, что

$$G_{i_0}(x_*) \leq f(x, \lambda) \quad \text{для всех} \quad x \in \Pi \cap \mathbf{C}.$$

Если $G_{i_0}(x_*) = f(x_*, \lambda)$, то x_* будет точкой глобального минимума задачи невыпуклого квадратичного программирования, в противном случае значение функции $G_{i_0}(x_*)$ дает для него оценку снизу. При практических расчетах вычисления прекращаются, как только

$$f(x_*, \lambda) - G_{i_0}(x_*) \leq \varepsilon, \tag{22}$$

где ε — заданное малое число.

Если неравенство (22) не выполняется, то процесс разбиения продолжается. В параллелепипеде с номером i_0 находим координату с наибольшим уклонением значения линейной функции от квадратичной в точке минимума x_*:

$$\Delta = \max_{j \in \mathbf{N}_-} \left[\frac{1}{2} c_j x_j^2 - l_j(x_j)\right].$$

Пусть этот максимум достигается на индексе j_0. Значение x_{j_0} принимаем за новую точку разбиения параллелепипеда i_0 по коорди-

j_0 на два меньших, другие его границы оставляем без изменения. Остальные параллелепипеды на меняются. Переходим к $k+1$ шагу.

Заметим, что на $k+1$ шаге нужно решить только две задачи выпуклого квадратичного программирования для двух новых параллелепипедов, в связи с изменением границ для них изменились и формулы вычисления функции $G_i(x)$. Для остальных параллелепипедов все осталось прежним. В качестве начальной точки для методов последовательных приближений решения этих задач удобно выбирать точку x_*, она является допустимой, т.е. удовлетворяет ограничениям (17)–(18) и лежит на границе новых параллелепипедов.

В [4] утверждается, что любая предельная точка последовательности $\{x_*^k\}$, построенная таким способом, является решением задачи невыпуклого квадратичного программирования.

В качестве примера применения описанного выше метода приведем результаты расчетов устойчивости оболочки с различным количеством и расположением колец подкрепления. Расчеты проводились для оболочки из стали со следующими параметрами: $L = 4$ м, $R = 0.5$ м, $h = 0.005$ м, $E = 1.96 \cdot 10^{11}$ н/м^2, $\nu = 0.3$. Число коэффициентов двойного ряда Фурье (3) выбиралось равным $m = 8$, $n = 10$, число точек сетки по кольцам $M = 20$.

Для вычисления критической нагрузки для оболочки без подкрепления воспользуемся формулой (15). При заданных выше параметрах оболочки минимальное значение получается при $i = 1$, $j = 3$, где i и j соответствуют формуле (3). В этом случае $w = w_{13} \sin\frac{\pi x}{L}\cos\frac{3y}{R}$, где w_{13} может принимать произвольные значения. Критическое давление $q_в$ равно $2.29 \cdot 10^5$н/м^2. Заметим, что исходя из формулы, приведенной в [2, с.548],

$$\begin{aligned} q_в &= \frac{DR}{(n^2-1)}\left\{\left(\frac{\pi^2}{L^2}+\frac{n^2}{R^2}\right)^2 + \frac{1}{R^4}\left[1-2\left(\nu\frac{\pi^2R^2}{L^2}+n^2\right)\right]\right\} + \\ &+ \frac{Eh}{R}\frac{\pi^4}{L^4}\frac{1}{\left(\frac{\pi^2}{L^2}+\frac{n^2}{R^2}\right)^2(n^2-1)}, \end{aligned} \tag{23}$$

получается, что минимум $q_в$ в (23) достигается при $n = 3$ и равен $2.19 \cdot 10^5$н/м^2, что хорошо согласуется с полученным выше значением.

В табл. 1 приведены результаты вычисления критической нагрузки оболочки без подкрепления для различной ее длины. В табл. 2 приведены результаты расчетов для одного кольца подкрепления, расположенного на расстоянии x от одного из концов оболочки. В табл. 3 показаны результаты для различного расположения двух колец (x_1 и x_2 — расстояния колец от одного из краев оболочки). Расчеты показывают, что критическая нагрузка зависит от длины максимального свободного участка оболочки между кольцами или кольцом и краем, и увеличивается при его уменьшении.

Таблица 1 (без подкрепления)

L (м)	1.33	2.00	2.50	3.00	3.50	4.00
q^* (н/м^2)	$7.1 \cdot 10^5$	$4.8 \cdot 10^5$	$3.7 \cdot 10^5$	$3.3 \cdot 10^5$	$2.7 \cdot 10^5$	$2.3 \cdot 10^5$

Таблица 2 (одно кольцо)

x (м)	q^* (н/м^2)
2.00	$4.9 \cdot 10^5$
2.50	$4.1 \cdot 10^5$
3.00	$3.5 \cdot 10^5$
3.50	$3.4 \cdot 10^5$

Таблица 3 (два кольца)

x_1 (м)	x_2 (м)	q^* (н/м^2)
2.00	3.00	$5.5 \cdot 10^5$
1.00	3.00	$5.5 \cdot 10^5$
3.00	3.50	$3.6 \cdot 10^5$
1.33	2.67	$6.7 \cdot 10^5$

Поскольку кольца подкрепления свободно вложены в оболочку, то, в принципе, возможен отход оболочки от кольца (для отрицательных значений w). Для выполнявшихся расчетов такого явления не наблюдалось, оболочка плотно прилегает к кольцам по всему периметру. Это равносильно тому, что кольца приварены к оболочке, как это обычно делается на практике.

Литература

1. **Герасин М.Л., Холмогоров Д.В.** Некоторые задачи устойчивости упругих систем с односторонним подкреплением// *Труды Второй международной научно-технической конференции "Актуальные проблемы фундаментальных наук"*. М., 1994.

2. **Вольмир А.С.** Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.

3. **Тарасов В.Н.** К решению задач на собственные значения для положительно однородных операторов // *Труды Второй меж-*

дународной научно-технической конференции "Актуальные проблемы фундаментальных наук". М., 1994.

4. **Жиглявский А.А., Жилинскас А.Г.** Методы поиска глобального экстремума. М.: Наука, 1991. 248 с.

5. **Сухарев А.Г.** Глобальный экстремум и методы его отыскания// Математические методы в исследовании операций. МГУ, 1983. 193 с.

6. **Кюнци Г.П., Крелле В.** Нелинейное программирование. М.: Сов. радио, 1965. 303 с.

7. **Гилл Ф., Мюррей У., Райт М.** Практическая оптимизация. М.: Мир, 1985. 509 с.

8. **Пшеничный Б.Н.** Метод линеаризации. М.: Наука, 1983. 136 с.

Summary

Gerasin M.L. Stability of cilyndrical shell with one-sided support.

Stability problem for circular cilyndrical shell in case of external normal pressure is considered. The shell is supported by absolutely rigid ribs with one-sided effect. Energetic stability criterion is used. Minimal value of load is obtained, for which the nonlinear quadratic problem has a nontrivial solution. This problem is solved by dichotomy method and branch and bound algorithm. The results of calculations are illustrated.

Сыктывкарский университет *Поступила 11.02.94*