*Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1.Вып.1.1995*

УДК 681.511.4

Хаос и порядок в широтно-импульсных системах управления

Н.А.Антонова

Получены необходимые и достаточные условия для существования и нестабильности T-периодических колебаний в системах управления с широтно-импульсной модуляцией первого и второго рода.

Для систем управления с широтно-импульсной модуляцией [1] достаточно глубоко изучены вопросы устойчивости различных процессов при любых начальных возмущениях (Якубович В.А., Гелиг А.Х. и др.). Также представляет интерес задача неустойчивости решений таких систем, т.е. исследование детерминированного хаоса [2]. В нашей работе проводится описание областей в пространстве параметров одномерных широтно-импульсных систем, в которых существуют как устойчивые, так и неустойчивые периодические колебания с одним импульсом на периоде.

Описание системы.

Одномерная широтно-импульсная система управления описывается в пространстве состояний уравнением вида

$$\frac{T}{\alpha}\frac{dU}{dt} + U = \varphi, \quad \sigma = \psi - U. \tag{1}$$

Здесь α — параметр непрерывной линейной части системы, T — положительная постоянная, период модуляции импульсного элемента, σ — сигнал на входе импульсного элемента, ψ — постоянное внешнее воздействие на систему.

Рассматриваются следующие виды широтно-импульсного управления:

а)Широтно-импульсная модуляция первого рода (ШИМ-1), для
торой

$$\varphi(t) = \begin{cases} \text{sign}\ \sigma(nT), & nT < t \leq nT + \tau_n \\ 0, & nT + \tau_n < t \leq (n+1)T, n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Здесь

$$\tau_n = T \cdot \min\{|\sigma(nT)|/\sigma_*; 1\},$$

σ_* — порог насыщения импульсного элемента.

б)Широтно-импульсная модуляция второго рода (ШИМ-2), для
торой $\varphi(t)$ имеет вид (2), а τ_n—первый неотрицательный кор
уравнения

$$\kappa \tau_n = T \cdot |\sigma(nT + \tau_n)|,$$

если таковой имеется на $[0, T]$, и $\tau_n = T$ в противном случае. Зд
κ—положительное число.

Формулировка результата.

Будем называть T—периодическое колебание системы (1) нетр
виальным, если длительность τ импульса на периоде принадлеж
интервалу $(0, T)$. Очевидно, что нетривиальные колебания не мог
быть состояниями равновесия или режимами с насыщением.

Теорема 1(ШИМ-1).*Для существования нетривиального T -
периодического колебания необходимо и достаточно, чтобы в
полнялось условие*

$$0 < |\psi| < \sigma_* + 1.$$

Это колебание будет устойчивым, если

$$|\psi| < \frac{\sigma_*}{\alpha} \ln(\frac{\sigma_*}{\alpha}(e^\alpha + 1)) + \frac{1}{e^\alpha - 1}(\frac{\sigma_*}{\alpha}(e^\alpha + 1) - 1),$$

и неустойчивым, если

$$|\psi| > \frac{\sigma_*}{\alpha} \ln(\frac{\sigma_*}{\alpha}(e^\alpha + 1)) + \frac{1}{e^\alpha - 1}(\frac{\sigma_*}{\alpha}(e^\alpha + 1) - 1).$$

Теорема 2(ШИМ-2).*Для существования нетривиального T -
периодического колебания необходимо и достаточно, чтобы в
полнялось условие*

$$0 < |\psi| < 1 + \kappa.$$

Это колебание будет устойчивым, если

$$|\psi| < \frac{1}{1 + e^{-\alpha}} + \kappa(1 + \frac{1}{\alpha}) - \frac{\kappa}{\alpha} \ln(1 + (e^\alpha - 1)(\frac{1}{e^\alpha + 1} - \frac{\kappa}{\alpha})),$$

и неустойчивым, если

$$|\psi| > \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-\alpha}} + \kappa\left(1+\frac{1}{\alpha}\right) - \frac{\kappa}{\alpha}\ln\left(1+(\mathrm{e}^{\alpha}-1)\left(\frac{1}{\mathrm{e}^{\alpha}+1}-\frac{\kappa}{\alpha}\right)\right). \qquad (10)$$

На рисунках 1 и 2 приведена геометрическая интерпретация утверждений теорем 1 и 2. Буквой X отмечены области существования неустойчивых Т-периодических колебаний исследуемых систем,дополнения этих областей в первых квадрантах-это области существования устойчивых Т-периодических колебаний ,среди которых возможны как нетривиальные колебания, так и режимы с насыщением.

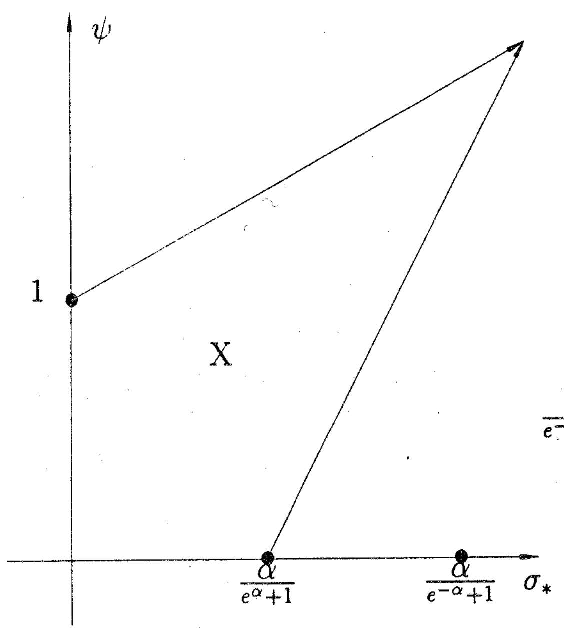

Рис. 1

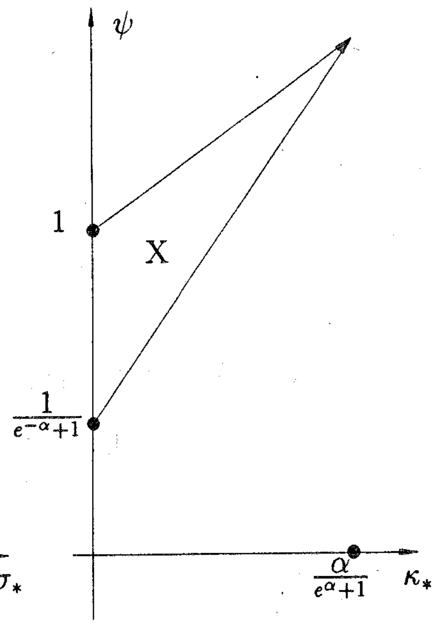

Рис. 2

В основе доказательств теорем лежит метод точечных преобразований [3]. Результаты исследований являются дополнением и обобщением работы [4].

Доказательство теоремы 1. Введем обозначения

$$u_n = u(nT), \ \ \sigma_n = \sigma(nT) = \psi - u_n.$$

Решение уравнения (1) с функцией $\varphi(t)$, определяемой (2), примет вид

$$\sigma(nT+t)=\begin{cases}\psi-\exp(-\alpha t/T)[\psi-\sigma_n+ \\ \quad+(\exp(\alpha t/T)-1)\mathrm{sign}\sigma_n], & \text{если } t\in[0,\tau_n], \\ \psi-\exp(-\alpha t/T)[\psi-\sigma_n+ \\ \quad+(\exp(\alpha\tau_n/T)-1)\mathrm{sign}\sigma_n], & \text{если } t\in[\tau_n,T].\end{cases} \quad (11)$$

Отсюда выводим формулу для точечного отображения

$$\sigma_{n+1}=f(\sigma_n), \quad (12)$$

где

$$f(\sigma)=\sigma\exp(-\alpha)+\psi(1-\exp(-\alpha))-\mathrm{sign}\sigma\exp(-\alpha)(\exp(\alpha\tau_n/T)-1).$$

Величина τ_n в соответствие с (3) определяется формулой

$$\tau_n=T\min\{|\sigma_n|/\sigma_*,1\}.$$

Периодическим колебаниям исследуемой широтно-импульсной системы будут соответствовать [3] неподвижные точки точечного отображения (12). Устойчивость или неустойчивость этих неподвижных точек влечет устойчивость или неустойчивость соответствующих им решений уравнения (1). Поэтому нам следует найти условия существования и устойчивости неподвижных точек.

Для нетривиального T-периодического колебания неподвижная точка кратности 1 является решением уравнения $\sigma=f(\sigma)$, или в развернутой записи:

$$\sigma=\sigma\exp(-\alpha)+\psi(1-\exp(-\alpha))-\mathrm{sign}\sigma\exp(-\alpha)(\exp(\alpha\tau/T)-1)),$$

где

$$\tau=T\min\{|\sigma|/\sigma_*,1\}.$$

После некоторых преобразований уравнение сводится к виду

$$\psi=\sigma+\mathrm{sign}\sigma\frac{\exp(\alpha\tau/T)-1}{\exp(\alpha)-1}. \quad (13)$$

Здесь в правой части стоит функция аргумента σ, которая, как нетрудно видеть, является нечетной и монотонно возрастающей (напомним, что τ — кусочно-линейная функция от σ). Следовательно. при любых α,T и ψ существует единственное решение уравнения

(13) $\sigma_{\text{НТ}} = \sigma(\alpha, T, \psi)$, причем $\text{sign}\sigma_{\text{НТ}} = \text{sign}\psi$. Поскольку нас интересует нетривиальное периодическое колебание, т.е. $\tau \in (0, T)$, то в силу (3) необходимо, чтобы $0 < |\sigma_{\text{НТ}}| < \sigma_*$. Это свойство решения $\sigma_{\text{НТ}}$ уравнения (13) обеспечивается в том и только в том случае, когда $0 < |\psi| < \sigma_* + 1$, т.е. в условиях (5). Попутно заметим, что умножение уравнения (13) на $\text{sign}\sigma$ и последующие преобразования с учетом соотношений

$$\sigma \text{sign}\sigma = \tau\sigma_*/T, \ \ \psi \text{sign}\sigma = |\psi|,$$

позволяет перейти к формуле

$$\exp(\alpha\tau/T) = 1 + (|\psi| - \tau\sigma_*/T)(\exp(\alpha) - 1). \tag{14}$$

Для доказательства устойчивости неподвижной точки нужно показать, что в условиях (6) выполняется неравенство $|df/d\sigma| < 1$ для $\sigma = \sigma_{\text{НТ}}$. Вычислим

$$df/d\sigma = \exp(-\alpha)(1 - \text{sign}\sigma \exp(\alpha\tau/T)(\alpha/T)d\tau/d\sigma) \tag{15}$$

Так как

$$d\tau/d\sigma = T\text{sign}\sigma/\sigma_*,$$

то

$$df/d\sigma = \exp(-\alpha)(1 - (\alpha/\sigma_*)\exp(\alpha\tau/T))$$

Тогда неравенство $|df/d\sigma| < 1$ преобразуется к виду

$$\exp(\alpha\tau/T) < \sigma_*(\exp(\alpha) + 1)/\alpha \tag{16}$$

Решение уравнения (14), удовлетворяющее неравенству (16), существует в том и только в том случае, когда выполняется соотношение

$$\sigma_*(\exp(\alpha) + 1)/\alpha > 1 + (|\psi| - (\sigma_*/\alpha)\ln(\sigma_*(\exp(\alpha) + 1)/\alpha)(\exp(\alpha) - 1).$$

Решив последнее неравенство относительно $|\psi|$, получим формулу (6).

Доказательство неустойчивости однократной неподвижной точки проводится аналогичными рассуждениями, только знак неравенства нужно сменить на противоположный. Мы получим, что требование $|df/d\sigma| > 1$ для $\sigma = \sigma_{\text{НТ}}$ будет равносильно условию (7). Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Поскольку описания систем с ШИМ-I и ШИМ-II похожи, то можно воспользоваться обозначениями предыдущего доказательства. В соответствии с законом (4) на исследуемом нетривиальном T-периодическом колебании величина τ находится как первый корень уравнения

$$\kappa t = T\mathrm{sign}\sigma\sigma(t), \quad t \in (0, T), \tag{17}$$

где начальная точка $\sigma = \sigma_{\text{НТ}}$ удовлетворяет уравнению (13), а $\sigma(t)$ определяется из (11):

$$\sigma(t) = \psi - \exp(-\alpha t/T)(\psi - \sigma + (\exp(\alpha t/T) - 1)\mathrm{sign}\sigma).$$

Введя обозначение

$$\Gamma(t) = \kappa t - T(|\psi| - 1 + (1 + |\sigma| - |\psi|)\exp(-\alpha t/T)),$$

запишем (17) в виде

$$\Gamma(t) = 0. \tag{18}$$

Поскольку уравнение (13) позволяет получить выражение

$$1 + |\sigma| - |\psi| = (\exp(\alpha) - \exp(\alpha\tau/T))/(\exp(\alpha) - 1), \tag{19}$$

и правая часть (19) является неотрицательной монотонной функцией аргумента τ, то для $\tau \in (0, T)$ имеем оценку: $1+|\sigma|-|\psi| \in (0, 1)$. Значит функция $\Gamma(t)$ монотонно возрастает по аргументу t. Теперь составим обобщенное уравнение периодов, подставив (19) в (18):

$$\kappa t - T(|\psi - 1 + \exp(-\alpha t/T)(\exp(\alpha) - \exp(\alpha\tau/T))/(\exp(\alpha) - 1)) = 0$$

Существование искомого колебания определяется наличием у последнего уравнения корня $t = \tau$, единственного на интервале $[0, \tau]$. Единственность корня очевидна из монотонности левой части обобщенного уравнения периодов по переменной t ,а существование корня $t = \tau$ сводится к разрешимости уравнения

$$\kappa\tau - T(|\psi - 1 + (\exp(\alpha - \alpha t/T) - 1)/(\exp(\alpha) - 1)) = 0, \tag{20}$$

левая часть которого монотонная функция τ. Поэтому необходимым и достаточным условием разрешимости этого уравнения на $(0, T)$ является требование $-T|\psi|(\kappa T - T(|\psi| - 1)) < 0$, т.е. условие (8).

Теперь найдем достаточные условия устойчивости и неустойчивости неподвижной точки $\sigma_{\text{НТ}}$, решающей уравнение (12). Величина $df/d\sigma$ определяется формулой (15). Значение $d\tau/d\sigma$ вычисляется как производная неявной функции, определяемой (18) при $t = \tau$:

$$\kappa\frac{d\tau}{d\sigma} - T(\text{sign}\sigma\exp(-\alpha\tau/T) + (1+|\sigma|-|\psi|)(-\alpha/T)\exp(-\alpha\tau/T)\frac{d\tau}{d\sigma}) = 0$$

Принимая во внимание (19) и (20), получаем

$$\text{sign}\sigma\exp(\alpha\tau/T)\frac{d\tau}{d\sigma} = T/(\kappa + \alpha(1 - |\psi| + \kappa\tau/T)).$$

Подставив это выражение в (15), находим, что

$$df/d\sigma = \exp(-\alpha)(1 - \alpha/(\kappa + \alpha(1 - |\psi| + \kappa\tau/T))).$$

Неравенство $|df/d\sigma| < 1$ будет эквивалентно соотношению

$$\kappa/\alpha + 1 - |\psi| + \kappa\tau/T > 1/(\exp(\alpha) + 1). \qquad (21)$$

Напомним, что τ является решением уравнения (20). Поэтому (21) можно переписать в равносильном виде

$$(\exp(\alpha - \alpha\tau/T) - 1)/(\exp(\alpha) - 1) > -\kappa/\alpha + 1/(\exp(\alpha) + 1),$$

откуда легко находится оценка для τ:

$$\tau < \tau_*, \text{ где } \tau_* = T - \frac{T}{\alpha}\ln(1 + (e^\alpha - 1)(\frac{1}{e^\alpha + 1} - \frac{\kappa}{\alpha})). \qquad (22)$$

Решение уравнения (20) будет удовлетворять неравенству (22) тогда и только тогда, когда

$$\frac{\kappa}{T}\tau_* - |\psi| + 1 > -\frac{\kappa}{\alpha} + \frac{1}{e^\alpha + 1}.$$

Подставив сюда τ_* и решив неравенство относительно $|\psi|$, мы придем к условию (9). Следовательно, устойчивость однократной неподвижной точки уравнения (12) доказана. Доказательство неустойчивости сводится к проверке неравенства $|df/d\sigma| > 1$, которое обеспечивается условием (10) теоремы. Теорема 2 доказана.

Обсуждение результата.

Доказанные теоремы дают разбиение области параметров одномерной широтно-импульсной системы управления на области, в которых возможны устойчивые периодические колебания, и области, где наблюдается хаотическое поведение решений системы. Оказалось, что в системе с ШИМ-I область хаоса содержит в себе подмножество $\{(\sigma_*, |\psi|) : \sigma_* < \alpha/(\exp(\alpha) + 1), |\psi| < \sigma_* + 1\}$. Этот факт был экспериментально показан в [2]. В системах управления с ШИМ-II область хаоса включает в себя подмножество $\{(\kappa, |\psi|) : \kappa + \kappa/\alpha + 1/(\exp(-\alpha) + 1) < |\psi| < \kappa + 1\}$. Таким образом, регистрация хаоса в столь простых системах не является неожиданностью.

Литература

1. **Гелиг А.Х., Чурилов А.Н.** Колебания и устойчивость нелинейных импульсных систем. Санкт-Петербург: С.-ПбУ, 1993. 268с.

2. **Кипнис М.М.** Хаотические явления в детерминированной широтно-импульсной системе управления// *Техническая кибернетика.* 1992. №1. С.108–112.

3. **Неймарк Ю.И., Ланда П.С.** Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987.

4. **Антонова Н.А.** О простейших периодических решениях в системах импульсного регулирования с ШИМ-I и ШИМ-II// *Автоматика и телемеханика.* 1975. №2. С.46–52

Summary

Antonova N.A. Chaos and order in pulse-width control systems.

Nesessary and sufficient conditions are obtained for existence and instability of T-periodic modes in control systems employing pulse-width modulation of the first and second kinds.

Сыктывкарский университет

Поступила 8.02.95