Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1.Вып.1.1995

УДК 517.98

Производящие функции в теории серий[1]

Л.Я.Савельев

Описываются производящие функции для распределений некоторых характеристик серий в марковских случайных последовательностях. Составляются и решаются рекуррентные уравнения для этих функций.

1. Постановка задачи.

Нужные определения понятий, формулировки и доказательства утверждений теории марковских процессов есть в книгах [1, 2].

1.1. Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, Pr)$, счетное (конечное или бесконечное) множество C и марковский процесс из случайных переменных $\xi_n : \Omega \to C \quad (n \in \mathbb{Z})$ с распределениями $Pr\ (\xi_n = \delta) = p^n_\delta,\ p^o_\delta = p_\delta$ и переходными матрицами $Q^{on} = (q^{on}_{\gamma\delta})\ (\gamma, \delta \in C)$. По определению $q^{on}_{\gamma\delta} = Pr(\xi_n = \delta | \xi_{n-1} = \gamma)$, когда $Pr(\xi_{n-1} = \gamma) > 0$.

Пусть: $\xi_n^{-1}(A) \in \mathcal{F}(A \subseteq C)$; $\quad \xi_n(\Omega) \subseteq C^-\ (n < 0)$ и $\xi_n(\Omega) \subseteq C^+\ (n \geqslant 0)$ для некоторых множеств C^- и C^+, составляющих разбиение множества C; непустые множества A_ν с индексами из счетного множества Γ^+ составляют разбиение множества C^+; $A_\theta = C^-$ для дополнительного индекса $\theta \notin \Gamma^+$ и $\Gamma = \{\theta\} \cup \Gamma^+$; $B_\nu = C - A_\nu\ (\nu \in \Gamma)$. Условимся отождествлять части множества с их индикаторами на нем.

Заметим, что $C = C^- + C^+ = A_\theta + \sum\limits_{\nu \in \Gamma^+} A_\nu = \sum\limits_{\nu \in \Gamma} A_\nu$.

Укрупнив значения рассматриваемого случайного процесса, можно свести дело к случаю, когда $C^- = A_\theta = \{\theta\}, \quad q^{on}_{\gamma\delta} = 0 (\delta \neq \theta)$,

---

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 93-011-1753).

$q^{on}_{\gamma\theta} = 1$ $(n < 0)$ и $q^{oo}_{\gamma\delta} = p_\delta = Pr(\xi_0 = \delta)$ $(\delta \neq \theta)$, $q^{oo}_{\gamma\theta} = 0$ $(\gamma \in C)$ и $q^{on}_{\theta\delta} = 0$ $(\delta \neq \theta)$, $q^{on}_{\theta\theta} = 1$ $(n > 0)$. Предположим, что $A_\theta = \{\theta\}$.

1.2. Случайные переменные ξ_n с номерами $n \geqslant 0$ образуют марковскую последовательность с начальным распределением $P = (p_\delta)$ и переходными матрицами $Q^{on} = (q^{on}_{\gamma\delta})$ $(n > 0)$.

Введем случайные переменные $u_{l\nu}$ со значениями $u_{l\nu} = 1$ при $\xi_l(\omega) \in A_\nu$ и $u_{l\nu} = 0$ при $\xi_l(\omega) \in B_\nu$. Эти переменные описывают появление в момент l события A_ν. В частности, $u_{l\theta} = 1$, когда $l < 0$ и $u_{l\theta} = 0$ когда $l \geqslant 0$. Точно также $u_{l\nu} = 0$, когда $l < 0$ при $\nu \neq \theta$.

Будем исследовать серии событий $\xi_n \in A_\nu$ для $\nu \neq \theta$. Естественными характеристиками таких ν-серий служат их число, общая длина и максимальная длина, наблюдающиеся до момента $n \geqslant 0$. Они описываются соответственно случайными переменными

$$x_{n\nu} = \sum_{l \leqslant n} u_{ln}, \quad y_{n\nu} = \sum_{l \leqslant n} \max(0, u_{l\nu} - u_{l-1,\nu}),$$

$$z_{n\nu} = \max_{l \leqslant n}\Big(\sum_{l \leqslant m \leqslant n} \prod_{l \leqslant k \leqslant m} u_{k\nu}\Big).$$

Рассмотрим: случайные семейства $x_n = (x_{n\nu})$, $y_n = (y_{n\nu})$, $z_n = (z_{n\nu})$; целочисленные семейства $i = (i(\nu))$, $j = (j(\nu))$, $k = (k(\nu))$ $(k(\nu) \geqslant 0)$; множества $R, S, T \subseteq \Gamma \setminus \{\theta\}$ и определяемые ими семейства $Rx_n = (R(\nu)x_{n\nu})$, $Sy_n = (S(\nu)y_{n\nu})$, $Tz_n = (T(\nu)z_{n\nu})$,

$$Ri = (R(\nu)i(\nu)), \quad Sj = (S(\nu)j(\nu)), \quad Tk = (T(\nu)k(\nu)) \quad (\nu \in \Gamma).$$

Будем считать, что $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$. Поэтому

$$R(\theta)x_{n\theta} = S(\theta)y_{n\theta} = T(\theta)z_{n\theta} = 0 \cdot \infty = 0 \text{ для каждого номера } n.$$

С помощью подходящих множеств R, S, T можно выбрать для исследования нужные случайные переменные $x_{n\rho}, y_{n\sigma}, z_{n\tau}$ $(\rho \in R,$ $\sigma \in S,$ $\tau \in T)$.

Для каждого элемента $\delta \in C$ существует единственный индекс $\mu = \mu(\delta) \in \Gamma$, при котором $\delta \in A_\mu$. В частности, $\mu_\theta = \theta$. Положим $m = k(\mu)$. Рассмотрим еще семейства $e = (e(\nu))$, $e_\mu = (e_\mu(\nu))$ со значениями $e_\mu(\mu) = 1$, $e_\mu(\nu) = 0$ $(\nu \neq \mu)$, $e(\nu) = 1$ $(\nu \in \Gamma)$ и семейства $Re, Se, Te, Re_\mu, Se_\mu, Te_\mu$.

1.3. Задача заключается в том, чтобы найти вероятности

$$f(i, j, k, n) = Pr(Rx_n = Ri, \ Sy_n = Sj, \ Tz_n \leqslant Tk).$$

Для ее решения составляются рекуррентные уравнения, определяющие вероятности

$$f_\delta(i,j,k,n) = Pr(Rx_n = Ri,\ Sy_n = Sj,\ Tz_n \leqslant Tk,\ \xi_n = \delta)$$

в сумме составляющие $f(i,j,k,n)$. Эти рекуррентные уравнения позволяют найти производящую функцию для нужных вероятностей. Выбирая соответствующие множества R, S, T индексов, можно получить совместные распределения любых комбинаций случайных переменных $x_{n\nu}, y_{n\nu}, z_{n\nu}$ для $\nu \neq \theta$.

2. Скалярные уравнения.

Используя правила действий с вероятностями и марковское свойство, нетрудно составить систему рекуррентных уравнений для нужных вероятностей. Существование всех рассматриваемых сумм семейств легко проверяется.

2.1. Для каждого $A \subseteq C$ равенства

$$q^{on}_{\gamma\delta}(A) = q^{on}_{\gamma\delta} \cdot A(\delta),$$

$$q^{mn}_{\gamma\delta}(A) = \sum_\lambda q^{o,n-m}_{\gamma\lambda}(A) \cdot q^{m-1,n}_{\lambda\delta}(A) \quad (m \geqslant 1)$$

позволяют последовательно вычислить вероятности

$$q^{mn}_{\gamma\delta}(A) = Pr(\xi_{n-m} \in A, \ldots, \xi_n = \delta | \xi_{n-m-1} = \gamma).$$

Применяя правила действий с вероятностями, марковское свойство и принцип индукции, нетрудно убедиться в том, что верна

Теорема. *Вероятности $f_\delta(i,j,k,n)$ составляют единственное решение системы уравнений*

$$f_\delta(i,j,k,n) = \sum_\gamma f_\gamma(i - e_\mu, j - B_\mu(\gamma)e_\mu, k, n-1) q^{on}_{\gamma\delta} -$$

$$-T(\mu) \sum_\gamma f_\gamma(i - (m+1)e_\mu, j - e_\mu, k, n-m-1) B_\mu(\gamma) q^{mn}_{\gamma\delta}(A_\mu), \qquad (1)$$

удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned}
f_\delta(i,j,k,n) &= 0 \quad ([n<0] \ \wedge \ [\delta \neq \theta]),\\
f_\theta(i,j,k,n) &= 1 \quad ([n<0] \ \wedge \ [(Ri=0) \ \wedge \ (Sj=0)]),\\
f_\theta(i,j,k,n) &= 0 \quad ([n<0] \ \wedge \ [(Ri\neq 0) \ \vee \ (Sj\neq 0)]),\\
f_\delta(i,j,k,n) &= 0 \quad ([n\geqslant 0] \ \wedge \ [(Ri<0) \ \vee \ (Sj<0)]).
\end{aligned} \qquad (2)$$

Заметим, что из равенств (2) следует равенство

$$f_\delta(i,j,k,n) = 0 \quad [(Ri < 0) \vee (Sj < 0)].$$

2.2. Система уравнений в пункте 2.2 статьи [3] получается из системы (1) при $\Gamma \setminus \{\theta\} = \{1,2\}$, $A_1 = A$, $A_2 = B$, $R = 0$, $S = 0$, $T = \{1\}$, $k(1) = k$ и $f(\cdot,\cdot,k,n) = f(k,n)$.

Система уравнений в пункте 2 статьи [4] получается из системы (1) при

$$\Gamma \setminus \{\theta\} = \{1,2\},\ A_1 = A,\ A_2 = B,\ R = \{1\},\ S = \{1\},$$

$$T = \{1,2\},\ i(1) = i,\ j(1) = j,\ k(1) = k,\ k(2) = l \ \text{ и}$$

$$f(i(1),j(1),(k(1),k(2)),n) = f(i,j,k,l,n).$$

2.3. В важном частном случае, когда случайные переменные ξ_n при $n \geqslant 0$ независимы и одинаково распределены, переходные вероятности $q_{\gamma\delta}^{mn}(A_\mu)$ легко вычислить:

$$q_{\gamma\delta}^{mn}(A_\mu) = a_\mu^m \cdot p_\delta \ (0 \leqslant m \leqslant n), \quad q_{\gamma\delta}^{mn}(A_\mu) = 0 \ (0 \leqslant n \leqslant m),$$

где $a_\mu = Pr(\xi_0 \in A_\mu)$.

Пусть: $C = \{-1\} + A + B$, $\Gamma = \{-1,0,1\}$, $\theta = -1$, $A_1 = A, A_0 = B, R = S = 0$, $T = \{1\}$, $k(1) = k, z_{n1} = z_n$; случайные переменные ξ_n при $n \geqslant 0$ независимы и одинаково распределены; $Pr(\xi_0 \in A) = p, Pr(\xi_0 \in B) = q = 1 - p$, $f(\cdot,\cdot,k(1),n) = f(k,n)$. Тогда из равенств (1-2) следуют равенства

$$f(k,n) = 1 \quad (n < k),$$

$$f(k,n) = f(k,n-1) - q^{1\wedge(n-k)}p^{k+1} \cdot f(k,n-k-2) \quad (n \geqslant k).$$

Эти равенства позволяют эффективно вычислять вероятность $f(k,n)$ того, что в рассматриваемой случайной последовательности $\xi_0,\ldots,\xi_n$ длины всех A-серий меньше или равны k.

3. Матричное уравнение.

Равенства (1-2) можно записать в удобной матричной форме. Существование всех рассматриваемых произведений и сумм матриц легко проверяется.

3.1. Будем отображения множеств $\{\theta\} \times C$, $C \times \{\theta\}$ и $C \times C$ называть соответственно *C-строками*, *C-столбцами* и *$C \times C$-матрицами.* Рассмотрим: единичные C-строку E, C-столбец E^* и $C \times C$-матрицу I; диагональные $C \times C$-матрицы A, отождествляемые с множествами $A \subseteq C$ и называемые *индикаторами* ($A(\gamma,\delta) = 1$ при $\gamma = \delta \in A$ и $A(\gamma,\delta) = 0$ при всех других $\gamma, \delta \in C$); составленные из вероятностей C-строки $F = (f_\delta)$, $G = (g_\delta)$, $H = (h_\delta)$, где

$$g_\delta(i,j,k,n) = \sum_\gamma f_\gamma(i - e_\mu, j - B_\mu(\gamma)e_\mu, k, n-1) \cdot q^{on}_{\gamma\delta},$$

$$h_\delta(i,j,k,n) = T(\mu)\sum_\gamma f_\gamma(i-(m+1)e_\mu, j-e_\mu, k, n-m-1)B_\mu(\gamma)q^{mn}_{\gamma\delta}(A_\mu),$$

и $C \times C$-матрицы $Q^{mn}(A) = (q^{mn}_{\gamma\delta}(A))$. Заметим, что

$$Q^{on}(A) = Q^{on} \cdot A, \quad Q^{mn}(A) = Q^{o,n-m}(A) \cdot Q^{m-1,n}(A).$$

3.2. Следующая теорема эквивалентна теореме пункта 2.1.

Теорема. *Строка F является единственным решением матричного уравнения*

$$F(i,j,k,n) =$$

$$= \sum_\mu [F(i-e_\mu, j, k, n-1)A_\mu + F(i-e_\mu, j-e_\mu, k, n-1)B_\mu]Q^{on}(A_\mu) -$$

$$-\sum_\mu T(\mu)F(i-(m+1)e_\mu, j-e_\mu, k, n-m-1) \cdot B_\mu \cdot Q^{mn}(A_\mu), \quad (3)$$

удовлетворяющим условиям

$$\begin{array}{lll} F(i,j,k,n) = E \cdot A_\theta & ([n<0] \ \wedge \ [(Ri=0) \ \wedge \ (Sj=0)]), & \\ F(i,j,k,n) = 0 & ([n<0] \ \wedge \ [(Ri \neq 0) \ \vee \ (Sj \neq 0)]), & (4) \\ F(i,j,k,n) = 0 & ([n \geqslant 0] \ \wedge \ [(Ri \geqslant 0) \ \vee \ (Sj \geqslant 0)]). & \end{array}$$

Заметим, что равенство (3) эквивалентно равенству $F = G - H$, так как

$$G(i,j,k,n) = \sum_\mu F(i-e_\mu, j, k, n-1) \cdot A_\mu \cdot Q^{on} \cdot A_\mu +$$

$$+\sum_\mu F(i-e_\mu, j-e_\mu, k, n-1) \cdot B_\mu \cdot Q^{on}(A_\mu).$$

$$H(i,j,k,n) = \sum_{\mu} T(\mu)\cdot F(i-(m+1)e_\mu, j-e_\mu, k, n-m-1)\cdot B_\mu \cdot Q^{mn}(A_\mu).$$

Из равенств (4) следует равенство

$$F(i,j,k,n) = 0 \ \ [(Ri \geqslant 0) \ \vee \ (Sj \geqslant 0)]).$$

Рассмотрим индикаторную функцию χ со значениями $\chi(i,j,m,n) = 1$ при $Ri = Sj = 0$, $m = n = 0$ и $\chi(i,j,m,n) = 0$ при всех других семействах Ri, Sj и числах m, n. Как нетрудно проверить, верны равенства $(m = k(\mu))$:

$F(i,j,k,0) = \sum_\mu [1-(1-(1\wedge m))\cdot T(\mu)]\cdot \chi(i-e_\mu, j-e_\mu, 0,0)\cdot PA_\mu,$
$G(i,j,k,0) = \sum_\mu \chi(i-e_\mu, j-e_\mu, 0,0)\cdot PA_\mu,$
$H(i,j,k,0) = \sum_\mu T(\mu)\cdot \chi(i-e_\mu, j-e_\mu, m,0)\cdot PA_\mu.$

3.3. Если марковская последовательность $\xi_0, \dots, \xi_n$ однородная, то вычисление коэффициентов в матричном уравнении (3) упрощается.

Пусть $Q = Q^{o1} = Q^{on}$ $(n > 0)$. Из определений следует, что $Q^{oo} = E^*P$ и $Q^{ol} = Q^{0,-1} = E^*EA_\theta$. Положим $A_{\mu\mu} = A_\mu Q A_\mu$, $B_{\mu\mu} = B_\mu Q A_\mu$. Заметим, что

$$Q^{mm}(A_\mu) = E^*P : A_\mu A^m_{\mu\mu}, \quad Q^{mn}(A_\mu) = Q\cdot A_\mu A^m_{\mu\mu}, \quad (n > m \geqslant 1).$$

В рассматриваемом однородном случае верны равенства

$$T(\mu)\cdot B_\mu \cdot Q^{mn}(A_\mu) = 0, \quad (0 < n < m),$$

$$B_\mu \cdot Q^{mn}(A_\mu) = B_\mu \cdot E^*P \cdot A_\mu A^m_{\mu\mu}, \quad (0 < n = m),$$

$$B_\mu \cdot Q^{mn}(A_\mu) = B_{\mu\mu}\cdot A^m_{\mu\mu}, \quad (0 \leqslant m < n).$$

Если случайные переменные $\xi_0, \dots, \xi_n$ независимы и одинаково распределены, то

$$A_{\mu\mu} = A_\mu \cdot E^*P\cdot A_\mu, \quad B_{\mu\mu} = B_\mu \cdot E^*P \cdot A_\mu.$$

В работах [3-4] есть примеры матричных уравнений для однородных марковских последовательностей.

4. Функциональные уравнения.

Всюду дальше будем предполагать, что случайные переменные ξ_n $(n \geqslant 0)$ составляют однородную марковскую последовательность с начальным распределением $P = (p_\delta)$ и переходной матрицей

$Q = (q_{\gamma\delta})$ $(\gamma, \delta \in C)$. В этом случае из равенств (3-5) легко вывести уравнения для производящих функций нужных вероятностей. Корректность всех производящихся с бесконечными индикаторными и стохастическими матрицами действий легко проверяется.

4.1. Положим

$$S^{Ri} = \Pi S_\nu^{Ri(\nu)} = \Pi S_\rho^{i(\rho)}, \quad t^{Sj} = \Pi t_\nu^{Sj(\nu)} = \Pi t_\sigma^{j(\sigma)},$$

где $\rho \in R$, $\sigma \in S$, $\nu \in \Gamma$ и $S = (s_\nu)$, $t = (t_\nu)$ – семейства комплексных чисел с абсолютными значениями $0 < |s_\nu| \leqslant 1$, $0 < |t_\nu| \leqslant 1$. Рассмотрим матричные производящие функции

$$\hat{F}(s,t,k,u) = \sum_{i,j,n} F(i,j,k,n) \cdot s^{Ri} t^{Sj} u^n,$$

$$\hat{G}(s,t,k,u) = \sum_{i,j,n} G(i,j,k,n) \cdot s^{Ri} t^{Sj} u^n,$$

$$\hat{H}(s,t,k,u) = \sum_{i,j,n} H(i,j,k,n) \cdot s^{Ri} t^{Sj} u^n,$$

где всюду $n \geqslant 0$ и u – комплексное число с абсолютной величиной $0 < |u| < 1$. Значения этих функций ограничены числом $(1 - |u|)^{-1}$. Так как $F = G - H$, то $\hat{F} = \hat{G} - \hat{H}$.

Равенство $\hat{f} = \hat{F} E^*$ связывает матричную производящую функцию $\hat{F}$ со скалярной производящей функцией $\hat{f}$, имеющей значения

$$\hat{f}(s,t,k,u) = \sum_{i,j,n} f(i,j,k,n) \cdot S^{Ri} t^{Si} u^n.$$

4.2. Из теоремы пункта 3.2 следует

Теорема. *Если марковская последовательность ξ_n $(n \geqslant 0)$ однородна, то $\hat{F}$ является решением функционального уравнения*

$$\hat{F}(I - Ku) = L, \tag{5}$$

где

$$\begin{aligned} K &= \textstyle\sum_\mu (A_{\mu\mu} s^{Re_\mu} + B_{\mu\mu}\Delta_\mu), \\ L &= \textstyle\sum_\mu P A_\mu \Delta_\mu, \\ \Delta_\mu &= I - T(\mu) \cdot A_{\mu\mu}^m \cdot s^{mRe_\mu} \cdot t^{Se_\mu} \cdot u^m. \end{aligned} \tag{6}$$

Доказательство. Используя определяющие G, $\hat{G}$ равенства и выделяя случай $n = 0$, убеждаемся в том, что

$$\hat{G} = \sum_{\mu} PA_{\mu} \cdot S^{Re_{\mu}} \cdot t^{Se_{\mu}} + \hat{F} \sum_{\mu} [A_{\mu\mu} + B_{\mu\mu} \cdot t^{Se_{\mu}}] \cdot s^{Re_{\mu}} \cdot u.$$

Точно так же, используя определяющие H, $\hat{H}$ равенства и выделяя случай $0 \leqslant n \leqslant m$, получаем равенство

$$\hat{H} = \sum_{\mu} T(\mu) PA^{m}_{\mu\mu} s^{(m+1)Re_{\mu}} \cdot t^{Se_{\mu}} \cdot u^{m} +$$

$$+ \hat{F} \sum_{\mu} T(\mu) B_{\mu\mu} A^{m}_{\mu\mu} s^{(m+1)Re_{\mu}} \cdot t^{Se_{\mu}} \cdot u^{m+1}.$$

Так как $\hat{F} = \hat{G} - \hat{H}$, то отсюда следует, что $\hat{F} = L + \hat{F}Ku$. Теорема доказана.

4.3. Строка $P = (p_{\delta})$ является вектором пространства $\mathfrak{I} = \mathfrak{L}^1(C)$, а матрица $Q = (q_{\gamma\delta})$ представляет ограниченный линейный оператор на этом пространстве и имеет норму единица: $Q \in B(\mathfrak{I}, \mathfrak{I})$ и $\|Q\| = 1$. Матрицы $A_{\mu\mu}$, $B_{\mu\mu}$, Δ_{μ}, K тоже представляют ограниченные линейные операторы на пространстве $\mathfrak{I}$ и, как легко проверить,

$$\|K\| \leqslant \|\sum_{\mu} A_{\mu\mu}\| + \|\sum_{\mu} B_{\mu\mu}\| + \|\sum_{\mu} B_{\mu\mu} A^{m}_{\mu\mu}\| \leqslant 3\|Q\| \leqslant 3.$$

Отсюда и из формулы Неймана для операторной прогрессии вытекает теорема, описывающая матричную производящую функцию $\hat{F}$ в рассматриваемом однородном случае.

Теорема. *Если $|u| < \frac{1}{3}$, то уравнение (5) корректно, и его решение*

$$\hat{F} = L \cdot (I - Ku)^{-1} = L \cdot \sum K^n u^n,$$

где матрицы K, L определяются равенствами (6).

Так как единичный C-столбец E^* представляет непрерывный линейный функционал на пространстве $\mathfrak{I}$, то

$$(L \cdot \sum K^n u^n) E^* = L \cdot \sum (K^n E^*) u^n.$$

Это равенство вместе с равенством $\hat{f} = \hat{F}E^*$ позволяет вывести из сформулированной теоремы следствие, описывающее скалярную производящую функцию $\hat{f}$ в рассматриваемом однородном случае.

Следствие.Если $|u| < \frac{1}{3}$, *то*

$$\hat{f} = L \cdot (I - Ku)^{-1} E^* = L \cdot \sum (K^n E^*) u^n.$$

Когда множество значений C случайных переменных ξ_n $(n \geqslant 0)$ конечно, то производящую функцию $\hat{f}$ можно получить алгебраически, решая по правилу Крамера систему линейных уравнений

$$\hat{f} \cdot 1 - \hat{F} E^* = 0, \quad \hat{f} \cdot 0 - \hat{F}(I - Ku) = L.$$

Если $|u| < \frac{1}{3}$, то эта система невырожденная. Значит, в том случае, когда марковская последовательность ξ_n $(n \geqslant 0)$ однородна и множество C ее значений конечно, верна

Теорема.*Если* $|u| < \frac{1}{3}$, *то*

$$\hat{f} = \frac{\det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -E^* & I - Ku \end{bmatrix}}{\det(I - Ku)}.$$

Примеры таких рациональных производящих функций есть в статье [4].

Замечание. Вычисление коэффициентов лорановского разложения рациональной производящей функции $\hat{f}$ связано с определенными трудностями из-за возможных высоких степеней составляющих ее полиномов и большого числа переменных. Исследование таких разложений методами теории функций представляет несомненный интерес. Рациональным производящим функциям посвящена глава 4 книги [5].

Литература

1. **Кемени Дж., Снелл Дж., Кнепп А.** Счетные цепи Маркова. М.: Наука, 1987.

2. **Вентцель А.Д.** Курс теории случайных процессов. М.: Наука, 1975.

3. **Савельев Л.Я.** Длинные серии в марковских последовательностях// *Труды ИМ СО РАН.* Т.5. Наука. Новосибирск, 1985. С. 137– 144.

4. **Савельев Л.Я.** Серии в марковских последовательностях. *Сиб. матем. журнал.* Т.32. №4. 1991. С.116–132.

5. **Стенли Р.** Перечислительная комбинаторика. М.: Мир, 1990.

Summary

Saveliyev L.J. Generational functions in the theory of series.

Generational functions for distributions of some characteristics of series in Markovian random sequences are described. Recursive equations for such functions are composed and solved.

Новосибирский государственный университет *Поступила 26.05.[illegible]*