Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1.Вып.1.1995

УДК 517.987:519.2

БУЛЕВСКИЙ ПРИНЦИП ИСЧЕРПЫВАНИЯ И СТРОЕНИЕ ПРОСТРАНСТВ С МЕРОЙ[1]

А.А.Самородницкий

Приводится полная (с точностью до сохраняющих меру изоморфизмов) информация о строении пространств со счетно–аддитивной вероятностной мерой, удовлетворяющих условию "компактности".

В работе изучается строение абстрактного пространства с мерой с помощью булевского принципа исчерпывания (см. [1, с. 112] и ниже по тексту работы). Идеи основных результатов, приводимых ниже, содержатся в [2]. Настоящую работу следует воспринимать как существенное усовершенствование отдельных разделов монографии [2] и как уточнение некоторых утверждений, вытекающих из булевского принципа исчерпывания и приведенных в [1].

Под пространством с мерой понимается тройка $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, обозначаемая (если нет сомнений в том, какие имеются $\mathcal{F}$ и μ) одной буквой Ω, в которой Ω — непустое множество, $\mathcal{F}$ — σ–алгебра подмножеств множества Ω, μ — вероятностная мера на $\mathcal{F}$. Результаты, которые мы ниже получим, без существенных затруднений могут быть перенесены на случай, когда на $\mathcal{F}$ задана σ–конечная мера, путем выбора подходящей вероятностной меры и плотности этих мер. Предполагается, что читатель знаком с терминологией монографий [1] и [2].

Пусть $(\mathcal{X}, \mu)$ — метрическая структура пространства Ω. $\mathbb{O}$ и $\mathbb{I}$ обозначают соответственно нуль и единицу в $\mathcal{X}$. Под компонентой в $\mathcal{X}$ понимаем множество $\mathcal{X}_u = \{x \in \mathcal{X} : x \leqslant u\}$, элемент u при этом называется единицей компоненты $\mathcal{X}_u$. Для любого множества $\mathcal{E} \subset \mathcal{X}$ обозначаем через $\mathcal{E}^+$ множество ненулевых элементов в $\mathcal{E}$.

[1]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке программы "Университеты России" (раздел "Фундаментальные проблемы математики и механики", шифр 1.3.5 "Булевы алгебры и теория меры").

Говорят, что множество $\mathcal{E} \subset \mathfrak{X}$ минорантно в компоненте $\mathfrak{X}_u$, если для любого элемента $x \in \mathfrak{X}_u^+$ найдется элемент $y \in \mathcal{E}^+$, удовлетворяющий неравенству $y \leqslant x$. В частности, полагая $u = \mathbb{I}$, получаем определение множества, минорантного в $\mathfrak{X}$ (см. [1]).

Булевский принцип исчерпывания состоит в следующем. Если множество $\mathcal{E}$ минорантно в $\mathfrak{X}$, то каждый элемент $x \in \mathfrak{X}^+$ обладает следующим свойством: существует счетное (конечное или бесконечное) дизъюнктное подмножество $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}$ (зависящее от x), для которого $x = \sup \mathcal{E}'$. В частности, пусть $\varphi : \mathfrak{X} \to W$ отображение $\mathfrak{X}$ во вполне упорядоченное множество W, причем из $x \leqslant y$ вытекает $\varphi(x) \leqslant \varphi(y)$. Элемент $u \in \mathfrak{X}^+$ называется φ–однородным, если для любого $z \in \mathfrak{X}_u^+$ выполнено равенство $\varphi(z) = \varphi(u)$. Тогда множество $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{X}$ всех φ–однородных элементов минорантно в $\mathfrak{X}$. Кроме того, существует счетное дизъюнктное подмножество $\{u_n : n \in N\} \subset \mathfrak{U}$, для которого $N \subset \mathbb{N}$ и $\bigvee\limits_{n\in N} u_n = \mathbb{I}$ (см. [1]). Более того, известно, что из условий $\{w_k : k \in K\} \subset \mathfrak{U}$, $K \subset \mathbb{N}$, $w = \bigvee\limits_{k\in K} w_k$ и $\varphi(w) = \varphi(w_k)$ при любом $k \in K$ вытекает $w \in \mathfrak{U}$.

Напомним, что системой образующих булевой алгебры $\mathfrak{X}$ называется такое множество $\mathcal{E} \subset \mathfrak{X}$, что наименьшая (правильная) σ–подалгебра $\sigma\{\mathcal{E}\}$, содержащая $\mathcal{E}$, совпадает с $\mathfrak{X}$. Весом $\tau(\mathfrak{X})$ булевой алгебры $\mathfrak{X}$ называется наименьшая мощность систем образующих булевой алгебры $\mathfrak{X}$. Поскольку каждая ненулевая компонента $\mathfrak{X}_u$ является полной нормированной булевой алгеброй, то для нее автоматически определено понятие веса (см. [1]).

Известно, что для любого подпространства $A = (A, \mathcal{F}_A, \mu_A)$ с $A \in \mathcal{F}$ компонента $\mathfrak{X}_u$ с мерой μ_u, где $A \in u$, изоморфна метрической структуре пространства A (ниже всякий изоморфизм считаем сохраняющим меру). Более того, если $A \notin \mathcal{F}$, $\mu_e A > 0$ (где μ_e — внешняя мера, порожденная мерой μ), а $B \in \mathcal{F}$ — измеримая оболочка множества A, то метрическая структура подпространства A изоморфна $(\mathfrak{X}_v, \mu_v)$, где $B \in v \in \mathfrak{X}^+$.

Функция $\varphi_1(u) = \tau(\mathfrak{X}_u)$ для $u \in \mathfrak{X}^+$ и $\varphi(\mathbb{O}) = 0$ является изотонной: $\varphi(x) \leqslant \varphi(y)$ при $x \leqslant y$.

Вес метрической структуры пространства Ω будем называть также метрическим весом Ω и обозначать $\tau(\Omega)$. Пространство Ω называется метрически однородным, если для любого подпространства A в Ω выполняется равенство $\tau(A) = \tau(\Omega)$.

Системой образующих пространства Ω называется совокупность измеримых множеств Σ, удовлетворяющая условиям: Σ порождает разбиение Ω на отдельные точки и для любого $A \in \mathfrak{F}$ найдется элемент B наименьшей σ–алгебры $\sigma\{\Sigma\}$, содержащей систему Σ, для которого $A \subset B$ и $\mu A = \mu B$. Система образующих минимальной мощности называется базисом пространства Ω, а мощность базиса — весом Ω и обозначается $\mathrm{v}(\Omega)$. Если Ω — одноточечное множество, то полагаем $\mathrm{v}(\Omega) = 0$ (сравните с [3]). Наименьший среди весов подпространств $A \subset \Omega$, таких, что $A \in \mathfrak{F}$ и $\mu A = 1$, называется точным весом пространства Ω и обозначается $\tau^*(\Omega)$. Всегда $\tau(\Omega) \leqslant \tau^*(\Omega) \leqslant \mathrm{v}(\Omega)$.

Пространство Ω называется однородным, если для любого подпространства A в Ω справедливо равенство $\mathrm{v}(A) = \mathrm{v}(\Omega)$ (в этом случае будет $\tau^*(A) = \tau^*(\Omega) = \mathrm{v}(\Omega)$). Пространство Ω называется вполне однородным, если оно однородно и метрически однородно (см. [2]). Понятия веса, точного веса, однородности и полной однородности без труда переносятся на подпространства пространства Ω.

Функция $\varphi_2(u) = \tau^*(A)$ для $A \in u \in \mathfrak{X}^+$ и $\varphi_2(\mathbb{O}) = 0$ является изотонной. К этим функциям φ_1 и φ_2 применимы описанные выше следствия принципа исчерпывания. Заметим, что φ_1–однородным элементам соответствуют метрически однородные подпространства. В каждом пространстве Ω имеется множество $\Omega_0 \in \mathfrak{F}$, для которого $\mu\Omega_0 = 1$ и $\mathrm{v}(\Omega_0) = \tau^*(\Omega)$. Тогда нетрудно заметить, что φ_2–однородным элементам соответствуют однородные подпространства пространства Ω_0.

Разбиением пространства Ω называется разбиение множества Ω на дизъюнктные подмножества, порожденное измеримыми множествами (см. [2]).

Большую роль в описании строения пространства Ω играет следующее утверждение.

Теорема 1. *Существует разбиение ξ пространства Ω:*

$$\Omega = M + \sum_{n \in K_1} A_n + \sum_{n \in K_2} B_n + \sum_{n \in K_3} \sum_{k \in N_n} C_{nk}, \tag{1}$$

удовлетворяющее условиям:

1) $\mu M = 0$,

2) $K_1 \cup K_2 \cup \bigcup\limits_{n \in K_3} N_n \neq \emptyset$,

3) A_n, B_n, C_{nk} — вполне однородные измеримые подпростран-

ства в Ω при всех значениях индексов n и k, входящих в соответствующие суммы множеств в (1),

4) $\mathrm{v}(A_n) = 0$ *при всех* $n \in K_1$,

5) если $K_1 \neq \emptyset$, *то* $K_1 = \{n : 1 \leqslant n < \alpha_1\}$ *— совокупность натуральных чисел, где* α_1 *либо натуральное число, большее 1, либо порядковый тип естественным образом упорядоченного множества* $\mathbb{N}$, *при этом* $\mu(A_k) \geqslant \mu(A_n)$ *при* $1 \leqslant k < n < \alpha_1$,

6) $\tau(B_n) = 0$ *при всех* $n \in K_2$,

7) если $K_2 \neq \emptyset$, *то* $K_2 = \{n : 1 \leqslant n < \alpha_2\}$ *— совокупность порядковых чисел, где* α_2 *счетное (конечное или бесконечное) порядковое число (см. [4] для определения и свойств порядковых чисел), причем* $0 < \mathrm{v}(B_k) \leqslant \mathrm{v}(B_n)$ *при* $1 \leqslant k < n < \alpha_2$,

8) если $K_3 \neq \emptyset$, *то* $K_3 = \{n : 1 \leqslant n < \alpha_3\}$ *— совокупность порядковых чисел, где* α_3 *счетное (конечное или бесконечное) порядковое число, причем для каждого* $n \in K_3$ *имеем* $N_n \neq \emptyset$ *и* $N_n = \{k : 1 \leqslant k < \beta_n\}$ *— совокупность порядковых чисел, где* β_n *счетное (конечное или бесконечное) порядковое число (разумеется,* $\beta_n > 1$),

9) $\tau(C_{nk}) = \tau(C_{nm})$ *при любом фиксированном* $n \in K_3$ *и любых* $k, m \in N_n$,

10) $0 < \tau(C_{nk}) < \tau(C_{jm})$ *при значениях индексов* $1 \leqslant n < j < \alpha_3$, $1 \leqslant k < \beta_n$, $1 \leqslant m < \beta_j$,

11) $\mathrm{v}(C_{nk}) < \mathrm{v}(C_{nm})$ *при* $1 \leqslant k < m < \beta_n$, $1 \leqslant n < \alpha_3$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{W} \subset \mathcal{X}^+$ множество тех элементов, которые являются одновременно φ_1– и φ_2–однородными. Покажем, что $\mathcal{W}$ минорантно в $\mathcal{X}$. Пусть $u \in \mathcal{X}^+$. Поскольку множество $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{X}^+$ φ_1–однородных элементов минорантно в $\mathcal{X}$, то найдется $z \in \mathcal{U}_1$, для которого $z \leqslant u$. Множество $\mathcal{U}_2 \subset \mathcal{X}^+$ φ_2–однородных элементов минорантно в $\mathcal{X}$ и, следовательно, в компоненте $\mathcal{X}_z$. Поэтому найдется $w \in \mathcal{U}_2$, для которого $w \leqslant z$. Остается заметить, что $\mathbb{O} < w \leqslant u$ и $w \in \mathcal{W}$.

Пусть $\{w_n : n \in N\} \subset \mathcal{W}$, где $N \subset \mathbb{N}$ и $\bigvee\limits_{n \in N} w_n = \mathbb{I}$. Несложно выбрать измеримые попарно дизъюнктные множества $E_n \in w_n$ так, чтобы E_n было вполне однородным подпространством при каждом $n \in N$. Обозначим через $M = \Omega \setminus \left(\sum\limits_{n \in N} E_n \right)$, $\xi' = \{M; E_n : n \in N\}$.

Множество M построено. Займемся построением множеств K_1 и A_n ($n \in K_1$). Пусть $K_1' = \{n \in N : \mathrm{v}(E_n) = 0\}$. Ясно, что E_n является одноточечным множеством для $n \in K_1'$. Пусть $K_1' = \{k_n : k_n \in K_1',\ n = 1,2,\ldots\}$ — такое упорядочение множества K_1', что $\mu E_{k_n} \geqslant \mu E_{k_{n+1}}$, если $\{k_n, k_{n+1}\} \subset K_1'$. Обозначим $K_1 = \{n : k_n \in K_1'\}$. Тогда $K_1 = \{n : 1 \leqslant n < \alpha_1\}$, где α_1 либо натуральное число, либо порядковый тип множества $\mathbb{N}$ (первое бесконечное порядковое число). Если предположить, что в K_1 входит первое бесконечное порядковое число, то положив $\varepsilon = \mu E_{k_{\alpha_1}}$, получим противоречащие друг другу факты: $\mu E_{k_n} \geqslant \mu E_{k_{\alpha_1}}$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и существует конечное число попарно дизъюнктных множеств E_{k_n}, удовлетворяющих последнему неравенству (в силу $\varepsilon > 0$ и $\mu\Omega = 1$). Обозначим $A_n = E_{k_n}$ для $n \in K_1$. Если $K_1' = \emptyset$, то $K_1 = \emptyset$.

Пусть $N' = N \setminus K_1'$. Если $N' = \emptyset$, то $K_2 = \emptyset$ и $K_3 = \emptyset$ и построение закончено. Пусть $N' \neq \emptyset$. Обозначив $K_2' = \{n \in N' : \tau(E_n) = 0\}$, при $K_2' \neq \emptyset$ выберем $k_1 \in K_2'$ так, чтобы элемент $\mathrm{v}(E_{k_1})$ был наименьшим в множестве $\{\mathrm{v}(E_k) : k \in K_2'\}$. Затем выбираем $k_2 \in K_2' \setminus \{k_1\}$ так, чтобы $\mathrm{v}(E_{k_2})$ было наименьшим элементом множества $\{\mathrm{v}(E_k) : k \in K_2' \setminus \{k_1\}\}$. Если $K_2' = \{k_1, k_2\}$, то построение K_2 завершено. Если выбраны индексы $k_n \in K_2'$ для $1 \leqslant n < \beta$, где β — счетное порядковое число и $K_2' \neq \{k_n : 1 \leqslant n < \beta\}$, то выберем $k_\beta \in K_2' \setminus \{k_n : 1 \leqslant n < \beta\}$ так, чтобы $\mathrm{v}(E_{k_\beta})$ было наименьшим элементом множества $\{\mathrm{v}(E_k)' : k \in K_2' \setminus \{k_n : 1 \leqslant n < \beta\}\}$. В силу счетности K_2' при некотором счетном порядковом числе α_2 обязательно будем иметь $K_2' = \{k_n : 1 \leqslant n < \alpha_2\}$. Обозначим $K_2 = \{n : 1 \leqslant n < \alpha_2\}$ и $B_n = E_{k_n}$ при $n \in K_2$. Очевидно, что $0 < \mathrm{v}(B_k) \leqslant \mathrm{v}(B_n)$ при $1 \leqslant k < n < \alpha_2$. Более того, предлагаем читателю убедиться, что в силу полной однородности подпространства B_1 имеем: $\mathrm{v}(B_1)$ — несчетное кардинальное число. В случае $K_2' = \emptyset$ положим $K_2 = \emptyset$.

Пусть $K_3' = N' \setminus K_2'$. Если $K_3' = \emptyset$, то $K_3 = \emptyset$ и построение завершено. Пусть $K_3' \neq \emptyset$. Пусть далее γ_1 — наименьший элемент множества $\{\tau(E_k) : k \in K_3'\}$ и $N_1' = \{k \in K_3' : \tau(E_k) = \gamma_1\}$. Если $K_3' = N_1'$, то построение K_3 завершилось. Если $K_3' \neq N_1'$, то обозначим через γ_2 наименьший элемент множества $\{\tau(E_k) : k \in K_3' \setminus N_1'\}$ и через $N_2' = \{k \in K_3' \setminus N_1' : \tau(E_k) = \gamma_2\}$.

Предположим, что β — счетное порядковое число и что при всех $n : 1 < n < \beta$, γ_n обозначает наименьший элемент множества $\left\{\tau(E_K) : k \in K_3' \setminus \left(\sum\limits_{1 \leq m < n} N_m'\right)\right\}$, а $N_n' = \left\{k \in K_3' \setminus \left(\sum\limits_{1 \leq m < n} N_m'\right) : \tau(E_k) = \gamma_n\right\}$. Если выполнено равенство $K_3' = \sum\limits_{1 \leq n < \beta} N_n'$, то построение K_3 завершилось. В противном случае обозначим через γ_β наименьший элемент множества

$$\left\{\tau(E_k) : k \in K_3' \setminus \left(\sum_{1\leq n<\beta} N_n'\right)\right\},$$

пусть

$$N_\beta' = \left\{k \in K_3' \setminus \left(\sum_{1\leq n<\beta} N_n'\right) : \tau(E_k) = \gamma_\beta\right\}.$$

Из-за счетности K_3' найдется счетное порядковое число α_3, для которого $K_3' = \sum\limits_{1\leq n<\alpha_3} N_n'$. Обозначим $K_3 = \{n : 1 \leqslant n < \alpha_3\}$. Ясно, что $0 < \tau(E_k) < \tau(E_m)$ при $k \in N_{n_1}$, $m \in N_{n_2}$ и $1 \leqslant n_1 < n_2 < \alpha_3$.

Займемся построением множеств C_{nk} и N_n $(k \in N_n,\ n \in K_3)$. Выберем произвольно $n \in K_3$ и зафиксируем его. Пусть γ_1 обозначает теперь наименьший элемент множества $\{\mathrm{v}(E_k) : k \in N_n'\}$, а $M_1 = \{k \in N_n' : \mathrm{v}(E_k) = \gamma_1\}$. Если $M_1 = N_n'$, то построение завершилось, переходим к заключительному этапу доказательства. Если $N_n' \neq M_1$, то обозначим через γ_2 наименьший элемент множества $\{\mathrm{v}(E_k) : k \in N_n' \setminus M_1\}$, а через $M_2 = \{k \in N_n' \setminus M_1 : \mathrm{v}(E_k) = \gamma_2\}$.

Пусть β — счетное порядковое число и при всех m, таких, что $1 < m < \beta$, γ_m обозначает наименьший элемент множества

$$\left\{\mathrm{v}(E_k) : k \in N_n' \setminus \left(\sum_{1\leq p<m} M_p\right)\right\}.$$

Пусть

$$M_m = \left\{k \in N_n' \setminus \left(\sum_{1\leq p<m} M_p\right) : \mathrm{v}(E_k) = \gamma_m\right\}.$$

Если $N_n' = \sum\limits_{1\leq p<\beta} M_p$, то построение завершилось и переходим к заключительному этапу доказательства. В противном случае обозначим через γ_β наименьший элемент множества

$$\left\{\mathrm{v}(E_k) : k \in N_n' \setminus \left(\sum_{1\leq p<\beta} M_p\right)\right\},$$

и пусть

$$M_\beta = \left\{ k \in N_n' \setminus \left(\sum_{1 \le p < \beta} M_p \right) \} : \mathrm{v}(E_k) = \gamma_\beta \right\}.$$

В силу счетности N_n' найдется счетное (конечное или бесконечное) порядковое число β_n, для которого $N_n' = \sum\limits_{1 \le p < \beta} M_p$. Обозначим $N_n = \{k : 1 \leqslant k < \beta_n\}$, переходя к заключительному этапу доказательства.

Заметим, что для $1 \leqslant k < m < \beta_n$ и для $p_1 \in M_k$, $p_2 \in M_m$ имеем $\tau(E_{p_1}) = \tau(E_{p_2})$ и $0 < \mathrm{v}(E_{p_1}) < \mathrm{v}(E_{p_2})$. Зафиксируем $k:\ 1 \leqslant k < \beta_n$. Если $\{p_1, p_2\} \subset M_k$, то $\tau(E_{p_1}) = \tau(E_{p_2})$ и $\mathrm{v}(E_{p_1}) = \mathrm{v}(E_{p_2})$. Обозначим $C_{nk} = \sum\limits_{p \in M_k} E_p$. Пусть $w' = [C_{nk}]_\mu$. Тогда $w' = \bigvee\limits_{p \in M_k} w_p$. Поскольку $\tau(E_p)$ бесконечно при $p \in M_k$ (в силу метрической однородности E_p и нетривиальности $\mathfrak{X}_{w_p}$), можем выбрать системы образующих $\mathcal{E}_p$ соответственно в компонентах $\mathfrak{X}_{w_p}$ при $p \in M_k$ и положить $\mathcal{E} = \bigcup\limits_{p \in M_k} \mathcal{E}_p \cup \{w_p : p \in M_k\}$. При этом будем иметь $\mathrm{card}\mathcal{E} = \tau(E_p)$ при любом $p \in M_k$, если (естественно) считать, что $\mathrm{card}\mathcal{E}_p = \tau(E_p)$ при $p \in M_k$. Проверка того, что $\mathcal{E}$ — система образующих в $\mathfrak{X}_{w'}$, тривиальна. Видим, что $\tau(C_{nk}) = \tau(E_p)$ при $p \in M_k$.

Пусть Σ_p — система образующих подпространства E_p, для которой $\mathrm{card}\Sigma_p = \mathrm{v}(E_p)$ при $p \in M_k$. Обозначим

$$\Sigma = \bigcup_{p \in M_k} \Sigma_p \cup \{E_p : p \in M_k\}.$$

Проверка соотношения $\mathrm{card}\Sigma = \mathrm{v}(E_p)$ при $p \in M_k$ и того, что Σ — система образующих в C_{nk}, элементарны. В силу изотонности веса подпространств получаем $\mathrm{v}(C_{nk}) = \mathrm{v}(E_p)$ при $p \in M_k$. Используя перечисленные выше следствия принципа исчерпывания, видим, что C_{nk} — вполне однородное подпространство в Ω.

Учитывая произвольность $n \in K_3$, заключаем: теорема доказана.

Если вести речь о классификации пространств с мерой с точностью до сохраняющего меру изоморфизма, то необходимо отметить, что любой (сохраняющий меру — ниже, как уже отмечали, это будет везде) изоморфизм пространства Ω отобразит подпространства разбиения (1) в соответствующие подпространства, сохраняя не только меру, но и метрические веса и веса, метрическую однородность и полную однородность. Исходя из этого, читатель сможет сформулировать условия тождественности двух пространств с мерой в терминах разбиения (1), удовлетворяющего условиям 1) — 11) теоремы 1, которые будут необходимыми условиями существования изоморфизма. Подобное утверждение имеется в литературе (см. [2, с. 166]). Для получения достаточных условий необходимо найти таковые для вполне однородных пространств с фиксированными весом и метрическим весом. Частично эта проблема решалась в [2] (см. также [5]). Мы повторим главные моменты теории LR–пространств в объеме, необходимом для понимания настоящей работы в целом. Доказательства опубликованных ранее фактов опускаются и заменяются ссылками, а сами эти утверждения напоминаются достаточно кратко.

Будем считать Ω вполне однородным пространством с метрическим весом τ и весом v. Отбросим тривиальный случай $\mathrm{v} = 0$.

Важнейшую роль в дальнейших рассуждениях играет теорема В.Г. Винокурова (см. [5]), суть которой в следующем. Если имеются два бесконечных произведения (не обязательно прямых!) пространств Лебега, которые обозначим через X и Y, множества сомножителей которых имеют одинаковую мощность, и если метрические структуры пространств X и Y изоморфны, то пространства X и Y изоморфны.

Базис пространства Ω, обозначаемый ниже через $\Sigma = \{A_t : t \in T\}$, называется компактным, если всевозможные пересечения вида $\bigcap_{t\in T} B_t$ не пусты (и, следовательно, одноточечны), где B_t есть либо A_t, либо $\Omega \setminus A_t$, при $t \in T$. Термин "компактный базис" введен фактически в [3] для сепарабельных пространств и был уточнен В.Г.Винокуровым, заметившим, что пространство с компактным базисом должно быть компактным в некоторой топологии.

Без ограничения общности можно считать T вполне упорядоченным множеством. Для любого базиса Σ пространства Ω Σ–координатами точки $\omega \in \Omega$ будем называть последовательность $(B_t : t \in T)$, удовлетворяющую условиям: а) либо $B_t = A_t$, либо $B_t = \Omega \setminus A_t$, при $t \in T$, б) $\bigcap_{t\in T} B_t = \{\omega\}$. Обозначим через $\tilde{\Omega}$ совокупность всех последовательностей $(B_t : t \in T)$, удовлетворяющих условию а). Отождествим точки $\omega \in \Omega$ с точками $(B_t : t \in T) \in \tilde{\Omega}$, чтобы точке ω соответствовала последовательность ее Σ–координат. Пусть $\tilde{\mathfrak{F}} = \{\tilde{A} \subset \tilde{\Omega} : \tilde{A} \cap \Omega \in \mathfrak{F}\}$ и положим $\tilde{\mu}\tilde{A} = \mu A$, для $\tilde{A} \in \tilde{\mathfrak{F}}$ и $A = \tilde{A} \cap \Omega$. Элементарная проверка покажет, что $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathfrak{F}}, \tilde{\mu})$ — пространство с мерой, Ω - подпространство в $\tilde{\Omega}$, причем $\tilde{\mu}_e\Omega = 1$. Пусть $s \in T$. Обозначим $\tilde{A}_s = \{(B_t : t \in T) \in \tilde{\Omega} : B_s = A_s\}$ и $\tilde{\Sigma} = \{\tilde{A}_t : t \in T\}$. Очевидно, что $\tilde{\Sigma}$ — компактный базис в $\tilde{\Omega}$, причем $A_t = \Omega \cap \tilde{A}_t$ при $t \in T$. Пространство $\tilde{\Omega}$ имеет те же вес и метрический вес, что и Ω. Оно называется Σ–компактификацией пространства Ω. Σ–компактификация вполне однородного пространства является вполне однородным пространством.

Если Σ — компактный базис в Ω, то очевидно, что Ω совпадает со своей Σ–компактификацией $\tilde{\Omega}$. Кроме того, в этом случае Ω является произведением пространств с мерой $(\Omega_t, \mathfrak{F}_t, \mu_t)$ при $t \in T$, где $\Omega_t = \{A_t, \Omega \setminus A_t\}$ — двоеточие, $\mathfrak{F}_t = 2^{\Omega_t}$, $\mu_t\{A_t\} = \mu A_t$, что немедленно вытекает из определения базиса.

Широко известен результат о том, что две полные однородные нормированные булевы алгебры, имеющие одинаковые веса, изоморфны (см., например, [1, с. 271]). Из этого, с учетом упомянутой выше теоремы В.Г.Винокурова, заключаем, что два вполне однородных пространства с мерой, имеющие одинаковый вес и метрический вес и имеющие компактные базисы, изоморфны (см. [3, с. 166]).

Напомним, что характеристическими числами базиса Σ в Ω называются значения функции $\chi_\Sigma(\delta; \mu) = \mu(\bigcap\limits_{t\in\delta} A_t)$, где δ пробегает конечные подмножества множества T. Говорят, что базисы Σ_1 и Σ_2 в пространствах Ω_1 и Ω_2 имеют одинаковые характеристические числа, если они имеют одно и то же множество индексов T и если для любого конечного подмножества δ множества T справедливо равенство $\chi_{\Sigma_1}(\delta; \mu_1) = \chi_{\Sigma_2}(\delta_2; \mu_2)$. Подробности читатель найдет в [2] и [3].

Теорема 2. *Пусть Ω_1 и Ω_2 — вполне однородные пространства с одинаковыми метрическим весом и весом. Пространства Ω_1 и Ω_2 изоморфны тогда и только тогда, когда найдутся такие базисы в них Σ_1 и Σ_2 и такой изоморфизм φ, переводящий Σ_1–компактификацию $\tilde{\Omega}_1$ в Σ_2–компактификацию $\tilde{\Omega}_2$, что сужение φ на Ω_1 является биекцией Ω_1 на Ω_2.*

Действительно, если сужение изоморфизма φ на Ω_1 является биекцией Ω_1 на Ω_2, то эта биекция является изоморфизмом в силу

$\varphi(\tilde{A} \cap \Omega_1) = \varphi(\tilde{A}) \cap \Omega_2$ для $\tilde{A} \subset \Omega_1$ и определения меры в компактификации.

Пусть $\psi : \Omega_1 \to \Omega_2$ — изоморфизм. Выберем любой базис Σ_1 в Ω_1 и рассмотрим базис $\Sigma_2 = \psi(\Sigma_1)$ в Ω_2. Пусть $\tilde{\Omega}_1$ и $\tilde{\Omega}_2$ — соответственно Σ_1- и Σ_2-компактификации Ω_1 и Ω_2, $\tilde{\Sigma}_1$ и $\tilde{\Sigma}_2$ — компактные базисы, отвечающие Σ_1 и Σ_2. Заметим, что $\tilde{\Sigma}_1$ и $\tilde{\Sigma}_2$ имеют одинаковые характеристические числа. Рассмотрим биекцию φ базиса $\tilde{\Sigma}_1$ на $\tilde{\Sigma}_2$, порожденную биекцией ψ базиса Σ_1 на Σ_2. Очевидно, что, сохраняя φ, можно построить единственную биекцию $\tilde{\Omega}_1$ на $\tilde{\Omega}_2$, которую также обозначим через φ. Поскольку сужение φ на Ω_1 является биекцией Ω_1 на Ω_2, совпадающей с ψ, то проверка того, что φ — изоморфизм, не вызывает трудностей. Теорема доказана.

Укажем на некоторые базисы во вполне однородных пространствах. Пусть вначале $\tau = 0$, v несчетно. Тогда в Ω существует базис Σ, в котором $\mu A_t = 0$ при $t \in T$. Если $0 < \tau$ и $\tau = \mathrm{v}$, то в Ω существует базис с характеристическими числами вида $\chi_\Sigma(\delta^n;\mu) = \dfrac{1}{2^n}$, где δ^n — конечное подмножество множества T, содержащее ровно n элементов. Если же $0 < \tau < \mathrm{v}$, то в Ω существует базис Σ и разбиение множества $T = T_1 + T_2$, где $\mathrm{card} T_1 = \tau$, $\mathrm{card} T_2 = \mathrm{v}$, такие, что $\chi_\Sigma(\delta^n;\mu) = \dfrac{1}{2^n}$ при $\delta^n \subset T_1$ и $\mu A_t = 0$ при $t \in T_2$.

Приведем несколько примеров вполне однородных пространств, имеющих компактные базисы:

Пример 1. Обозначим через X_1 прямое произведение двоеточий $\{0,1\}$ с одинаковыми мерами: $\nu\{0\} = 0$. Пусть мощность множества сомножителей равна v и несчетна. Тогда X_1 - вполне однородное пространство с $\tau(X_1) = 0$ и $\mathrm{v}(X_1) = \mathrm{v}$.

Пример 2. Обозначим через X_2 прямое произведение двоеточий $\{0,1\}$ с одинаковыми мерами: $\nu\{0\} = \dfrac{1}{2}$. Пусть мощность множества сомножителей равна τ и бесконечна. Тогда X_2 — вполне однородное пространство с $\tau(X_2) = \mathrm{v}(X_2) = \tau$.

Пример 3. Обозначим через X_3 прямое произведение X_1 на X_2. Тогда (с учетом условий примеров 1 и 2) X_3 является вполне однородным пространством с $\tau(X_3) = \tau$ и $\mathrm{v}(X_3) = \max\{\tau;\mathrm{v}\}$. Заметим, что при бесконечном τ и $\mathrm{v} \leqslant \tau$ X_3 изоморфно X_2.

Во всех примерах пространство является совокупностью 0–1-последовательностей. Компактный базис состоит из множеств A_t

последовательностей, у которых член с номером t равен 0.

Из вышеизложенного вытекает вывод: вполне однородное пространство с метрическим весом τ и весом v либо изоморфно одному из пространств X_1, X_2, X_3, либо изоморфно неизмеримому подпространству Ω' одного из этих пространств с $\mu_e \Omega' = 1$. Во втором из указанных случаев вполне однородное пространство не имеет ни одного компактного базиса.

Если говорить о типах вполне однородных пространств с фиксированными весом и метрическим весом, то при наличии компактного базиса тип всего один (содержащий одно из пространств X_1, X_2 и X_3). При отсутствии компактных базисов типов столько, сколько есть попарно неизоморфных Ω' (см. выше) с $\mu_e \Omega' = 1$.

Вернемся к произвольному пространству Ω. В [2] Ω названо LR–пространством, если каждое из вполне однородных подпространств в разбиении (1) обладает компактным базисом. Ясно, что каждое LR-пространство изоморфно некоторому LR-пространству (модели), у которого в разбиении (1) вполне однородные подпространства есть: некоторые одноточечные множества (A_n), пространства типа X_1 при различных весах (B_n) или пространства типа X_2, X_3 при различных метрических весах и весах (C_{nk}). Вероятностная интерпретация LR-пространства такова. Каждое событие может быть представлено (с точностью до события вероятности 0) в виде счетного дизъюнктного объединения "однородных" событий (каждый раз происходит ровно одно из них), причем "однородные" события определяются либо некоторой совокупностью достоверных событий, либо серией (бесконечной) испытаний типа "игры в орлянку" с равновероятными исходами, либо серией типа "игры в орлянку" и более мощной серией достоверных событий.

Своим интересом к обсуждавшейся выше проблематике автор целиком обязан Д.А.Владимирову.

Литература

1. **Владимиров Д.А.** Булевы алгебры. М.: Наука, 1969. 320 с.

2. **Самородницкий А.А.** Теория меры. ЛГУ, 1990. 268 с.

3. **Рохлин В.А.** Об основных понятиях теории меры//*Матем. сборник.* 1949. Т. 25.№1. С.107–150.

4. **Куратовский К., Мостовский А.** Теория множеств. М.: Мир, 1970. 416 с.

5. **Винокуров В.Г.** Компактные меры и произведения про-странств Лебега//*Матем. сборник.* 1967. Т.74.№3. С.434–472.

Summary

Samorodnitsky A.A. A Boolean principle of exhaustion and a construction of measure spaces.

A complete information about the construction of spaces with countably additive probability measures which satisfies the some "compactness" condition is given. Our results are obtained with exactness to preserving measure isomorphisms.

Сыктывкарский университет *Поступила 8.02.9*