Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1.Вып.1.1995

УДК 517.987

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ЛЯПУНОВСКИХ ВЕКТОРНЫХ МЕР

И.И.Баженов

В работе рассматриваются векторные меры со значениями в локально выпуклых пространствах и приводятся различные характеристики класса ляпуновских векторных мер.

Пусть $(T, \mathcal{A})$ – измеримое пространство, X – локально выпуклое пространство. Под векторной мерой $m : \mathcal{A} \longrightarrow X$ понимается счетно-аддитивная функция множества, заданная на σ-алгебре $\mathcal{A}$ и принимающая значения в X. Счетная аддитивность меры $m : \mathcal{A} \longrightarrow X$ понимается в смысле локально выпуклой топологии в пространстве X. Ниже мы будем рассматривать специальный класс векторных мер — ляпуновские меры. Векторная мера $m : \mathcal{A} \longrightarrow X$ называется ляпуновской, если для любого $E \in \mathcal{A}$ множество $m(E \cap \mathcal{A}) \equiv \{m(A) : A \in \mathcal{A}, A \subset E\}$ выпукло в X.

1. В этом пункте мы развиваем идею о том, что в определении ляпуновской векторной меры условие выпуклости множества значений меры можно заменить более слабым требованием звездности множества значений. Это утверждение было доказано ранее [1], мы приведем здесь лишь его формулировку.

Теорема 1. *Пусть векторная мера $m : \mathcal{A} \longrightarrow X$ удовлетворяет следующему условию: для любого $E \in \mathcal{A}$ множество $m(E \cap \mathcal{A}) \equiv \{m(A) : A \in \mathcal{A}, A \subset E\}$ является звездным (относительно* O*) в пространстве X, то есть, если $x \in m(E \cap \mathcal{A})$, то $\lambda x \in m(E \cap \mathcal{A})$ для любого $\lambda \in (0,1)$. Тогда векторная мера m является ляпуновской.*

Последнее утверждение можно усилить, а именно, имеет место следующее предложение.

Теорема 2. *Пусть $m : \mathcal{A} \longrightarrow X$ – векторная мера. Для того, чтобы m была ляпуновской, необходимо и достаточно, чтобы для* *любого $E \in \mathcal{A}$ существовало множество $E_0 \subset E, E_0 \in \mathcal{A}$ такое, что $m(E_0) = \frac{1}{2}m(E)$.*

Доказательство. Необходимость очевидна. Покажем, что сформулированное условие является достаточным для того, чтобы векторная мера была ляпуновской.

Пусть для любого $E \in \mathcal{A}$ можно указать множество $E_0 \subset E$, $E_0 \in \mathcal{A}$ такое, что $m(E_0) = \frac{1}{2}m(E)$. Покажем,что для любого $E \in \mathcal{A}$ и для любого $\lambda \in (0,1)$ существуют $E_\lambda \in \mathcal{A}, E_\lambda \subset E$, такое, что $m(E_\lambda) = \lambda m(E)$. Отсюда в силу теоремы 1 будет следовать, что m является ляпуновской векторной мерой.

Пусть $E_{11} \in \mathcal{A}$ такое, что $m\ (E_{11}) = \frac{1}{2}\ m\ (E)$. Положим $E_{12} = E \setminus E_{11}$ и заметим, что $E_{11} d E_{12}$ и $m(E_{11}) = m(E_{12}) = \frac{1}{2}m(E)$.

Пусть $\{E_{k1}, E_{k2}, ..., E_{k2^k}\}$ семейство подмножеств E, удовлетворяющих условиям:

1) $E_{ki} d E_{kj}\ (i \neq j)$;

2) $m(E_{ki}) = \dfrac{1}{2^k} m(E)$ для всех $i \in \{1, 2, ..., 2^k\}$.

Построим семейство $\{E_{k+1\,1}, E_{k+1\,2}, ..., E_{k+1\,2^{k+1}}\}$ следующим образом. Для каждого $i \in \{1,\ 2,\ ...,\ 2^k\}$ выделим множество $E_{k+1\,2i-1} \subset E_{ki}, E_{k+1\,2i-1} \in \mathcal{A}$ так, чтобы $m(E_{k+1\,2i-1}) = \frac{1}{2}m(E_{ki})$. Положим $E_{k+1\,2i} = E_{ki} \setminus E_{k+1\,2i-1}$ и заметим, что $m(E_{k+1\,2i}) = = \frac{1}{2}\ m(E_{ki})$ для всех $i \in \{1, 2, ..., 2^k\}$. Тогда семейство $\{E_{k+1\,i}\}$, $i \in \{1, 2, ..., 2^{k+1}\}$ будет обладать свойствами:

1) $E_{k+1\,i} d E_{k+1\,j}\ (i \neq j)$;

2) $m(E_{k+1\,i}) = \dfrac{1}{2^{k+1}} m(E)$ для всех $i \in \{1, 2, ..., 2^{k+1}\}$.

Таким образом, для каждого $n \in \mathbf{N}$ мы определили некоторое измеримое разбиение $\{E_{ni}\}$, $i \in \{1, 2, ..., 2^n\}$ множества E, обладающее тем свойством, что $m(E_{ni}) = \dfrac{1}{2^n} m(E)$ для всех $i \in \{1, 2, ..., 2^n\}$.

Пусть теперь λ – произвольное число из интервала $(0,1)$. Для каждого $n \in \mathbf{N}$ обозначим $k_n = max\{k \in \mathbf{Z} : \frac{k}{2^n} \leq \lambda\}$ и положим $\lambda_n = \frac{k_n}{2^n}$. Очевидно, что $\lambda_n \leq \lambda_{n+1}$ для всех $n \in \mathbf{N}$ и $\lim \lambda_n = \lambda$. Обозначим $E_n = \bigcup_{i=1}^{k_n} E_{ni}$. Заметим, что $k_{n+1} \geq 2k_n$ для всех $n \in \mathbf{N}$. Откуда в силу построения семейства $\{E_{ni}\}$, $n \in \mathbf{N}$, $i \in \{1, 2, ..., 2^n\}$

заключаем, что $E_n \subset E_{n+1}$. Положим теперь $E_\lambda = \bigcup_{n=1}^\infty E_n$ и покажем, что E_λ удовлетворяет условию $m(E_\lambda) = \lambda m(E)$. Действительно, в силу $E_n \uparrow E_\lambda$ и непрерывности снизу векторной меры m будем иметь

$$m(E_\lambda) = m(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} m(E_n) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} m(\bigcup_{i=1}^{k_n} E_{ni}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k_n} m(E_{ni}) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} m(E) \sum_{i=1}^{k_n} \frac{1}{2^n} = m(E) \lim_{n\to\infty} \frac{k_n}{2^n} = m(E) \lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda m(E).$$

Теорема доказана.

2. В этом пункте мы приведем еще одну характеристику ляпуновской векторной меры на языке спрямляющих функций.

Определение. *Пусть $m : \mathcal{A} \longrightarrow X$ – векторная мера и $E \in \mathcal{A}$. Функция $F : E \longrightarrow \mathbf{R}$ называется спрямляющей для меры m на множестве E, если выполнены следующие условия:*

1) $0 \le F(t) \le 1$ для любого $t \in E$;

2) $\{t \in E : F(t) < \lambda\} \in \mathcal{A}$ для каждого $\lambda \in [0,1]$;

3) $m(\{t \in E : F(t) < \lambda\}) = \lambda m(E)$ для любого $\lambda \in [0,1]$.

Пусть $F : E \longrightarrow \mathbf{R}$ – спрямляющая функция векторной меры $m : \mathcal{A} \longrightarrow X$ на множестве $E \in \mathcal{A}$. Выделим простейшие свойства функции F.

1°. Для любого $\lambda \in [0,1]$. имеет место равенство

$$m(\{t \in E : F(t) \ge \lambda\}) = (1-\lambda) m(E).$$

Действительно,

$$m(\{t \in E : F(t) \ge \lambda\}) = m(E \setminus \{t \in E : F(t) < \lambda\}) =$$

$$= m(E) - m(\{t \in E : F(t) < \lambda\}) = m(E) - \lambda m(E) = (1-\lambda) m(E).$$

2°. Для любых $\lambda_1, \lambda_2 \in [0,1]$, $\lambda_1 \le \lambda_2$ выполнено равенство

$$m(\{t \in E : \lambda_1 \le F(t) < \lambda_2\}) = (\lambda_2 - \lambda_1) m(E).$$

Имеем $m(\{t \in E : \lambda_1 \leq F(t) < \lambda_2\}) = m(\{t \in E : F(t) < \lambda_2\}) - -m(\{t \in E : F(t) < \lambda_1\}) = \lambda_2 m(E) - \lambda_1 m(E) = (\lambda_2 - \lambda_1)m(E)$.

3°. Для каждого $\lambda \in [0,1]$ $m(\{t \in E : F(t) \leq \lambda\}) = \lambda m(E)$.

Пусть $\lambda_n = \lambda + \frac{1}{n}$. Тогда очевидно

$$\{t \in E : F(t) \leq \lambda\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{t \in E : F(t) < \lambda_n\}.$$

Заметим, что $\{t \in E : F(t) < \lambda_n\} \supset \{t \in E : F(t) < \lambda_{n+1}\}$. Таким образом, $\{t \in E : F(t) < \lambda_n\} \downarrow \{t \in E : F(t) \leq \lambda\}$ и, в силу непрерывности векторной меры m сверху,

$$m(\{t \in E : F(t) \leq \lambda\}) = \lim_{n\to\infty} m(\{t \in E : F(t) < \lambda_n\}) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \lambda_n m(E) = \lambda m(E).$$

4°. Для любых $\lambda_1, \lambda_2 \in [0,1]$, $\lambda_1 \leq \lambda_2$ выполняются равенства $m(\{t \in E : \lambda_1 \leq F(t) \leq \lambda_2\}) = m(\{t \in E : \lambda_1 < F(t) \leq \lambda_2\}) = = m(\{t \in E : \lambda_1 \leq F(t) < \lambda_2\} = m(\{t \in E : \lambda_1 < F(t) < \lambda_2\}$.

Это свойство спрямляющей функции вытекает из предыдущих и проверяется несложно.

Ниже приводится основное утверждение этого пункта.

Теорема 3. *Для того, чтобы векторная мера* $m : \mathcal{A} \longrightarrow X$ *была ляпуновской, необходимо и достаточно, чтобы для любого* $E \in \mathcal{A}$ *существовала спрямляющая функция* F_E *векторной меры* m *на множестве* E.

Доказательство. Пусть $E \in \mathcal{A}$ – произвольное множество и $F_E : E \longrightarrow \mathbf{R}$ – спрямляющая функция меры m на множестве E. Тогда

$$\{t \in E : F_E(t) < \frac{1}{2}\} \in \mathcal{A} \ \text{ и } \ m(\{t \in E : F_E(t) < \frac{1}{2}\}) = \frac{1}{2}m(E).$$

Таким образом, для любого $E \in \mathcal{A}$ имеем $\frac{1}{2}m(E) \in m(E \cap \mathcal{A})$, и в силу теоремы 2 m является ляпуновской мерой.

Обратно, пусть m – ляпуновская векторная мера и $E \in \mathcal{A}$ – произвольное множество. Покажем, что на множестве E существует спрямляющая функция меры m.

Построим семейство множеств (E_{ni}), $n \in \mathbf{N}$, $i \in \{1, 2, ..., 2^n\}$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $E_{ni} \in \mathcal{A}$ для каждого $n \in \mathbf{N}$ и $i \in \{1, 2, ..., 2^n\}$;

2) для любого $n \in \mathbf{N}$ $\quad E = \bigcup\limits_{i=1}^{2^n} E_{ni}$;

3) $E_{ni} \bigcap E_{nj} = \emptyset$ для всех $i,\ j \in \{1, 2, ..., 2^n\}$ и $i \neq j$;

4) $m(E_{ni}) = \frac{1}{2^n} m(E)$ для каждого $n \in \mathbf{N}$ и для любого $i \in \{1, 2, ..., 2^n\}$.

Такое семейство нетрудно построить, если повторить рассуждения доказательства теоремы 2.

Теперь для каждого $n \in \mathbf{N}$ построим функцию $f_n : E \longrightarrow \mathbf{R}$, задав ее формулой

$$f_n(t) = \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{k}{2^n} K_{E_{nk}}(t),$$

где $K_{E_{nk}}$ – характеристическая функция множества $E_{nk} \in \mathcal{A}$. Очевидно, что для каждого $n \in \mathbf{N}$ функция f_n является измеримой и $0 \leq f_n(t) \leq 1$ для каждого $t \in E$. Заметим также, что в силу свойств семейства (E_{ni}) (см. доказательство теоремы 2) функция f_n может быть записана иначе:

$$f_n(t) = \frac{1}{2} K_{E_{12}} + \frac{1}{4}(K_{E_{22}} + K_{E_{24}}) + \frac{1}{8}(K_{E_{32}} + K_{E_{34}} + K_{E_{36}} + K_{E_{38}}) +$$

$$+ \ldots + \frac{1}{2^n}(K_{E_{n2}} + K_{E_{n4}} + K_{E_{n6}} + \ldots + K_{E_{n2^n}}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}(K_{E_{k2}} + K_{E_{k4}} + K_{E_{k6}} + \ldots + K_{E_{k2^k}}).$$

Легко видеть, что $f_n(t) \leq f_{n+1}(t)$ для каждого $n \in \mathbf{N}$ и для любого $t \in E$. Таким образом, последовательность функций (f_n) не убывает и ограничена. Следовательно, существует $F(t) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(t)$. Функция $F(t)$ определена на E и измерима, как поточечный предел измеримых функций. Очевидно также, что $0 \leq F(t) \leq 1$ для всех $t \in E$.

Покажем, что для каждого $\lambda \in [0, 1]$ $m(\{t \in E : F(t) < \lambda\}) = \lambda m(E)$. Если $\lambda = 0$, то равенство очевидно. Пусть $\lambda \in (0, 1]$. Обозначим

$$k_n = \max\{k \in \mathbf{Z} : \frac{k}{2^n} < \lambda\} \ \text{ и } \ \lambda_n = \frac{k_n}{2^n}.$$

Очевидно, что последовательность λ_n не убывает, не является стационарной и $\lim \lambda_n = \lambda$.

Покажем, что

$$E\{F(t) < \lambda\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} E\{f_k(t) \leq \lambda_n\}.$$

Действительно, пусть $t_0 \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} E\{f_k(t) \leq \lambda_n\}$. Тогда $f_k(t_0) \leq \lambda_{n_0}$ для всех $k \in \mathbf{N}$ и некоторого n_0 и, следовательно, $F(t_0) = \lim f_k(t_0) \leq \lambda_{n_0} < \lambda$ и $t_0 \in E\{F(t) < \lambda\}$.

Обратно, пусть $t_0 \in E\{F(t) < \lambda\}$. Так как $\lambda_n \uparrow \lambda$ и (λ_n) не является стационарной, то найдется λ_{n_0} такое, что $F(t_0) \leq \lambda_{n_0}$.

С другой стороны, для каждого k и для всех $t \in E$ имеем $f_k(t) \leq F(t)$. Следовательно, $f_k(t_0) \leq F(t_0) \leq \lambda_{n_0}$ для всех $k \in \mathbf{N}$. Таким образом,

$$t_0 \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} E\{f_k(t) \leq \lambda_n\}.$$

и равенство множеств доказано.

Обозначим

$$i_{kn} = \max\{i \in \mathbf{Z} : \frac{i}{2^k} < \lambda_n\} \quad \text{и} \quad \lambda_{kn} = \frac{i_{kn}}{2^k}.$$

Для каждого фиксированного $n \in \mathbf{N}$ $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_{kn} = \lambda_n$. Теперь нетрудно найти

$$m(E\{f_k(t) \leq \lambda_n\}) = m(\bigcup_{i=1}^{i_{kn}} E_{ki}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{i_{kn}} m(E_{ki}) = \sum_{i=1}^{i_{kn}} \frac{1}{2^k} m(E) = \frac{i_{kn}}{2^k} m(E) = \lambda_{kn} m(E).$$

Наконец,

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} E\{f_k(t) \leq \lambda_n\} \quad \uparrow \quad E\{F(t) < \lambda\} \text{ и}$$

$$E\{f_k(t) \leq \lambda_n\} \downarrow \bigcap_{k=1}^{\infty} E\{f_k(t) \leq \lambda_n\},$$

откуда, используя свойство непрерывности векторной меры m, получим:

$$m(E\{F(t) < \lambda\}) = \lim_{n\to\infty} m(\bigcap_{k=1}^{\infty} E\{f_k(t) \le \lambda_n\}) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty} m(E\{f_k(t) \le \lambda_n\}) = \lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty} \lambda_{kn} m(E) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \lambda_n m(E) = \lambda m(E).$$

Таким образом, функция $F(t)$ является спрямляющей функцией для векторной меры $m : \mathcal{A} \longrightarrow X$ на множестве E и теорема доказана полностью.

Замечание 1. В работе [2] (следствие 7, с.265) приводится утверждение, аналогичное утверждению теоремы 2, для случая векторной меры со значениями в банаховом пространстве. Отметим, что доказательство утверждения, приведенного в [2], основано на известной характеристике ляпуновских векторных мер, полученной Ноулсом в середине 70-х годов, а само утверждение сформулировано как следствие из теоремы Ноулса. Доказательство теоремы 1 существенно отличается от известного доказательства и основано только на определении ляпуновской векторной меры и ее свойствах. Идея доказательства теоремы 2 используется затем в доказательстве теоремы 3. Кроме того, в теореме 2 рассматривается более широкий класс векторных мер со значениями в локально выпуклых пространствах.

Замечание 2. Определение спрямляющей функции для векторной меры на измеримом множестве было дано А.А.Ляпуновым в [3]. Идея существования спрямляющей функции для неатомической векторной меры со значениями в конечномерном пространстве была использована им в доказательстве классической теоремы о выпуклости множества значений конечномерной векторной меры. Теорема 3 утверждает, что существование спрямляющей функции полностью характеризует класс векторных мер, любое сужение которых имеет выпуклое множество значений.

Литература

1. **Баженов И.И.** Характеристика крайних точек множества значений ляпуновской меры / Сыктыв. гос. ун-т. Сыктывкар. 1992. Деп. в ВИНИТИ 03.08.92 N 2514 - В92.

2. **Diestel J., Uhl J.J.** Vector measures // Providence. 1977.

3. **Ляпунов А.А.** О вполне аддитивных вектор-функциях.1// *Известия АН СССР, сер. матем.* 1940. Т.4, вып.6. С.465-478.

Summary

Bazhenov I.I. On some properties of Liapunov vector measure

A vector measure $m : \mathcal{A} \longrightarrow X$ is called Liapunov's when set $\{m(A) : A \in \mathcal{A}, A \subset E\}$ is convex for every $E \in \mathcal{A}$. We give conditions which are necessary and sufficient for measure $m : \mathcal{A} \longrightarrow X$ to be Liapunov's measure.

Сыктывкарский университет

Поступила 8.02.95