Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1. Вып.6. 2006

УДК 519.652

ПРЯМАЯ ЛИФТИНГОВАЯ СХЕМА [1]

В.Н. Малозёмов, А.Б. Певный, Н.А. Селянинова

Даётся детальный анализ прямой лифтинговой схемы построения вейвлетных разложений дискретных периодических сигналов, основанной на интерполяции дискретными периодическими сплайнами.

Введение

За последние лет десять оформилась новая математическая дисциплина —*дискретный гармонический анализ* — со своей проблематикой и методами [1]. На возникновение этой дисциплины существенное влияние оказало открытие в 1965 г. быстрого преобразования Фурье. Дискретный гармонический анализ ориентирован на цифровую обработку сигналов и на построение быстрых алгоритмов.

Лифтинговые схемы вейвлетных преобразований дискретных периодических сигналов, предложенные в [2], естественно вкладываются в дискретный гармонический анализ. В данной статье предпринято детальное исследование прямой лифтинговой схемы, основанной на интерполяции дискретными периодическими сплайнами. Особое внимание уделяется выбору управляющих функций.

Используются следующие обозначения:

$\mathbb{C}_N$ — пространство сигналов (комплекснозначных N-периодических функций целочисленного аргумента $x = x(j)$, $j \in \mathbb{Z}$),

$\omega_N = \exp(2\pi i/N)$ — корень N-й степени из единицы,

[1]Работа поддержана грантом РФФИ 06-01-72032 - МНТИ-а

$\mathcal{F}_N$ — дискретное преобразование Фурье порядка N (сопоставляющее сигналу x сигнал $X = \mathcal{F}_N(x)$ с компонентами

$$X(k) = \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\,\omega_N^{-kj}, \qquad k \in \mathbb{Z}\,).$$

Предполагается, что читатель знаком с основами теории дискретного преобразования Фурье [1].

1. Предварительные сведения

1.1. Пусть сигнал x принадлежит пространству $\mathbb{C}_N$, где $N = 2m$. Обозначим

$$e(j) = x(2j), \quad d(j) = x(2j+1), \qquad j \in 0 : m-1\,.$$

Предложение 1. *Спектры $X = \mathcal{F}_N(x), E = \mathcal{F}_m(e), D = \mathcal{F}_m(d)$ связаны соотношением*

$$X(k) = E(k) + \omega_N^{-k} D(k), \qquad k \in \mathbb{Z}\,. \tag{1}$$

Доказательство. При $k \in \mathbb{Z}$ имеем

$$\frac{1}{2}\big[X(k) + X(k+m)\big] = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{2m-1} x(j)\,\omega_N^{-kj}\big(1 + (-1)^j\big) =$$

$$= \sum_{l=0}^{m-1} x(2\,l)\,\omega_m^{-kl} = \sum_{l=0}^{m-1} e(l)\,\omega_m^{-kl} = E(k)\,,$$

$$\frac{1}{2}\big[X(k) - X(k+m)\big] = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{2m-1} x(j)\,\omega_N^{-kj}\big(1 - (-1)^j\big) =$$

$$= \sum_{l=0}^{m-1} x(2\,l+1)\,\omega_N^{-k(2\,l+1)} = \omega_N^{-k}\sum_{l=0}^{m-1} d(l)\,\omega_m^{-kl} = \omega_N^{-k} D(k)\,.$$

Сложив эти равенства, придём к (1).

1.2. Напомним (см. [3]), что при $N = nm$ и натуральном r B-сплайн $Q_r \in \mathbb{C}_N$ определяется формулой

$$Q_r(j) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} u^r(k)\,\omega_N^{kj}\,, \tag{2}$$

где

$$u(k)=\begin{cases} n^2 & \text{при } k=0,\\ \Big[\sin\frac{\pi k}{m}\big(\sin\frac{\pi k}{N}\big)^{-1}\Big]^2 & \text{при } k=1,\dots,N-1.\end{cases} \tag{3}$$

Сплайном порядка r называется линейная комбинация с комплексными коэффициентами сдвигов B-сплайна:

$$S(j)=\sum_{p=0}^{m-1} c(p)\,Q_r(j-pn)\,.$$

Рассмотрим задачу сплайн-интерполяции

$$S(ln)=z(l)\,,\qquad l\in 0:m-1\,. \tag{4}$$

Предложение 2. *Задача* (4) *имеет единственное решение. Для дискретного преобразования Фурье* $C=\mathcal{F}_m(c)$ *коэффициентов интерполяционного сплайна справедлива формула*

$$C(k)=Z(k)/T_r(k)\,,\qquad k\in 0:m-1\,,$$

где $Z=\mathcal{F}_m(z)$ *и*

$$T_r(k)=\sum_{p=0}^{m-1} Q_r(pn)\,\omega_m^{-kp}\,.$$

1.3. В дальнейшем нас будет интересовать случай $n=2$.

Предложение 3. *Коэффициенты* $T_r(k)$ *при* $n=2$ *допускают представление*

$$T_r(k)=\tfrac12\Big[\big(2\cos\tfrac{\pi k}{N}\big)^{2r}+\big(2\sin\tfrac{\pi k}{N}\big)^{2r}\Big]\,,\qquad k\in 0:m-1\,. \tag{5}$$

Доказательство. Формула (5) при $n=2$ (при $N=2m$) принимает вид

$$u(k)=\big(2\cos\tfrac{\pi k}{N}\big)^2\,,\qquad k\in 0:N-1\,.$$

В силу (2)

$$\big[\mathcal{F}_N(Q_r)\big](k)=u^r(k)=\big(2\cos\tfrac{\pi k}{N}\big)^{2r}\,,\qquad k\in 0:N-1\,. \tag{6}$$

Вместе с тем,

$$\big[\mathcal{F}_N(Q_r)\big](k)+\big[\mathcal{F}_N(Q_r)\big](k+m)=\sum_{j=0}^{2m-1} Q_r(j)\,\omega_N^{-kj}\big(1+(-1)^j\big)=$$

$$=2\sum_{p=0}^{m-1} Q_r(2p)\,\omega_m^{-kp}=2\,T_r(k).$$

Отсюда и из (6) следует (5).

1.4. Пусть S - интерполяционный сплайн при $N = 2m$. Он определяется условием

$$S(2\,l) = z(l)\,, \qquad l \in 0 : m-1\,.$$

Вычислим значения $\sigma(l) = S(2\,l{+}1)$, $l \in 0 : m{-}1$. Для этого достаточно найти $\mathcal{F}_m(\sigma)$.

Предложение 4. *Справедлива формула*

$$\big[\mathcal{F}_m(\sigma)\big](k) = \omega_N^k\, U_1(k)\, Z(k)\,, \qquad k \in 0 : m-1\,, \tag{7}$$

где $Z = \mathcal{F}_m(z)$ *и*

$$U_1(k) = \frac{\big(\cos\frac{\pi k}{N}\big)^{2r} - \big(\sin\frac{\pi k}{N}\big)^{2r}}{\big(\cos\frac{\pi k}{N}\big)^{2r} + \big(\sin\frac{\pi k}{N}\big)^{2r}}\,.$$

Доказательство. По определению сплайна при $N = 2m$ имеем

$$S(2\,l+1) = \sum_{p=0}^{m-1} c(p)\, Q_r\big(2(l-p)+1\big)\,.$$

Обозначим $h(p) = Q_r(2p+1)$. Тогда последнее равенство можно переписать в виде $\sigma = c * h$. По теореме о свёртке

$$\mathcal{F}_m(\sigma) = \mathcal{F}_m(c)\,\mathcal{F}_m(h)\,. \tag{8}$$

Найдём $\mathcal{F}_m(h)$. Поскольку

$$\big[\mathcal{F}_N(Q_r)\big](k) - \big[\mathcal{F}_N(Q_r)\big](k+m) = \sum_{j=0}^{2m-1} Q_r(j)\,\omega_N^{-kj}\big(1-(-1)^j\big) =$$

$$= 2\sum_{p=0}^{m-1} Q_r(2p+1)\,\omega_N^{-k(2p+1)} = 2\,\omega_N^{-k}\sum_{p=0}^{m-1} h(p)\,\omega_m^{-kp} = 2\,\omega_N^{-k}\big[\mathcal{F}_m(h)\big](k),$$

то

$$\big[\mathcal{F}_m(h)\big](k) = \tfrac{1}{2}\,\omega_N^k\Big[\big(2\cos\tfrac{\pi k}{N}\big)^{2r} - \big(2\sin\tfrac{\pi k}{N}\big)^{2r}\Big]\,. \tag{9}$$

Теперь (7) следует из (8), предложения 2, (5) и (9).

Отметим, что N-периодический сигнал U_1 удовлетворяет условию $U_1(k+m) = -U_1(k)$. Это гарантирует, в частности, что сигнал $\omega_N^k U_1(k)$ является m-периодическим.

2. Лифтинговое преобразование сигнала

2.1. Пусть $z \in \mathbb{C}_N$, где $N = 2m$. Имея в виду дальнейшее развитие событий, введем обозначения $N_0 = N$, $N_1 = m$, $e_0 = z$. Лифтинговое преобразование сигнала z осуществляется в три этапа.

Split. Расщепим сигнал e_0 на два сигнала

$$\widetilde{e}_1(l) = e_0(2\,l)\,, \quad \widetilde{d}_1(l) = e_0(2\,l+1)\,, \quad l \in 0 : N_1 - 1\,.$$

Обозначим $\widetilde{E}_1 = \mathcal{F}_{N_1}(\widetilde{e}_1)$, $\widetilde{D}_1 = \mathcal{F}_{N_1}(\widetilde{d}_1)$.

Predict. Предскажем значения $\widetilde{d}_1(l)$ с помощью интерполяционного сплайна $S_1(j)$, определяемого условием

$$S_1(2\,l) = \widetilde{e}_1(l)\,, \qquad l \in 0 : N_1 - 1\,.$$

Положим $\sigma_1(l) = S_1(2\,l+1)$, $l \in 0 : N_1 - 1$. Разность

$$d_1(l) = \widetilde{d}_1(l) - \sigma_1(l)\,, \qquad l \in 0 : N_1 - 1\,,$$

вообще говоря, мала. Для спектра $D_1 = \mathcal{F}_{N_1}(d_1)$ этой разности согласно (7) справедлива формула

$$D_1(k) = \widetilde{D}_1(k) - \omega_{N_0}^{k}\, U_1(k)\, \widetilde{E}_1(k)\,, \qquad k \in 0 : N_1 - 1\,. \tag{10}$$

Lifting. Обновим сигнал $\widetilde{e}_1$. Для этого введём сигнал e_1, спектр которого $E_1 = \mathcal{F}_{N_1}(e_1)$ определим так:

$$E_1(k) = \widetilde{E}_1(k) + \beta_1(k)\, \omega_{N_0}^{-k}\, D_1(k)\,, \qquad k \in 0 : N_1 - 1\,. \tag{11}$$

Здесь β_1 — произвольный N_0-периодический сигнал, удовлетворяющий условию

$$\beta_1(k + N_1) = -\beta_1(k)\,, \qquad k \in 0 : N_1 - 1\,.$$

Ясно, что правая часть (11) является N_1-периодическим сигналом.

2.2. Пара (D_1, E_1) называется *лифтинговым преобразованием сигнала z в спектральной форме*. Спектр E_1 содержит основную информацию о спектре $E_0 = \mathcal{F}_{N_0}(e_0)$ сигнала z, а спектр D_1 — детали.

Выразим D_1, E_1 через E_0. Для этого введём два вспомогательных сигнала

$$\widetilde{g}_1(k) = \omega_{N_0}^k \bigl(1 - U_1(k)\bigr)\,, \quad \widetilde{h}_1(k) = 1 + \beta_1(k)\bigl(1 - U_1(k)\bigr)\,, \quad k \in 0 : N_0 - 1\,.$$

Предложение 5. *При $k \in 0 : N_1 - 1$ справедливы равенства*

$$\begin{aligned} D_1(k) &= \tfrac{1}{2}\left[\widetilde{g}_1(k)\, E_0(k) + \widetilde{g}_1(k + N_1)\, E_0(k + N_1)\right], \\ E_1(k) &= \tfrac{1}{2}\left[\widetilde{h}_1(k)\, E_0(k) + \widetilde{h}_1(k + N_1)\, E_0(k + N_1)\right]. \end{aligned} \tag{12}$$

Доказательство. Из предложения 1, в частности, следует, что

$$E_0(k) = \widetilde{E}_1(k) + \omega_{N_0}^{-k}\, \widetilde{D}_1(k)\,, \qquad k \in 0 : N_1 - 1\,.$$

Заменив k на $k + N_1$, запишем

$$E_0(k + N_1) = \widetilde{E}_1(k) - \omega_{N_0}^{-k}\, \widetilde{D}_1(k)\,, \qquad k \in 0 : N_1 - 1\,.$$

Сложим и вычтем данные равенства. При $k \in 0 : N_1 - 1$ получим

$$\begin{aligned} \widetilde{E}_1(k) &= \tfrac{1}{2}\bigl[E_0(k) + E_0(k + N_1)\bigr], \\ \widetilde{D}_1(k) &= \tfrac{1}{2}\,\omega_{N_0}^k \bigl[E_0(k) - E_0(k + N_1)\bigr]. \end{aligned} \tag{13}$$

Остаётся подставить (13) в (10) и (11):

$$\begin{aligned} D_1(k) = \tfrac{1}{2}\,\omega_{N_0}^k \Bigl\{ \bigl[E_0(k) - E_0(k + N_1)\bigr] - U_1(k)\bigl[E_0(k) + E_0(k + N_1)\bigr] \Bigr\} = \\ = \tfrac{1}{2}\bigl[\widetilde{g}_1(k)\, E_0(k) + \widetilde{g}_1(k + N_1)\, E_0(k + N_1)\bigr]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_1(k) = \tfrac{1}{2}\Bigl\{ \bigl[E_0(k) + E_0(k + N_1)\bigr] + \beta_1(k)\bigl[\bigl(1 - U_1(k)\bigr)E_0(k) - \\ - \bigl(1 + U_1(k)\bigr)E_0(k + N_1)\bigr] \Bigr\} = \tfrac{1}{2}\left[\widetilde{h}_1(k)\, E_0(k) + \widetilde{h}_1(k + N_1)\, E_0(k + N_1)\right]. \end{aligned}$$

Предложение доказано.

2.3. Обратная задача восстановления спектра E_0 исходного сигнала z по паре (D_1, E_1) решается легко. Введём ещё два вспомогательных сигнала

$$h_1(k) = 1 + U_1(k)\,, \quad g_1(k) = \omega_{N_0}^{-k}\big(1 - \beta_1(k)\,h_1(k)\big)\,, \quad k \in 0 : N_0 - 1\,.$$

Предложение 6. *Справедлива формула обращения*

$$E_0(k) = h_1(k)\,E_1(k) + g_1(k)\,D_1(k)\,, \qquad k \in 0 : N_0 - 1\,. \tag{14}$$

Доказательство. Согласно (11) и (10)

$$\begin{gathered}
\widetilde{E}_1(k) = E_1(k) - \beta_1(k)\,\omega_{N_0}^{-k}\,D_1(k)\,,\\
\widetilde{D}_1(k) = D_1(k) + \omega_{N_0}^{k}\,U_1(k)\,\widetilde{E}_1(k) =\\
= D_1(k) + \omega_{N_0}^{k}\,U_1(k)\,E_1(k) - \beta_1(k)\,U_1(k)\,D_1(k) =\\
= \big(1 - \beta_1(k)\,U_1(k)\big)D_1(k) + \omega_{N_0}^{k}\,U_1(k)\,E_1(k)\,.
\end{gathered}$$

На основании предложения 1 заключаем, что при $k \in 0 : N_0 - 1$

$$\begin{gathered}
E_0(k) = \widetilde{E}_1(k) + \omega_{N_0}^{-k}\,\widetilde{D}_1(k) = E_1(k) - \beta_1(k)\,\omega_{N_0}^{-k}\,D_1(k) +\\
+\omega_{N_0}^{-k}\big(1 - \beta_1(k)\,U_1(k)\big)D_1(k) + U_1(k)\,E_1(k) =\\
= h_1(k)\,E_1(k) + g_1(k)\,D_1(k)\,.
\end{gathered}$$

Предложение доказано.

С вычислительной точки зрения формулу (14) лучше записать так: при $k \in 0 : N_1 - 1$

$$\begin{gathered}
E_0(k) = h_1(k)\,E_1(k) + g_1(k)\,D_1(k)\,,\\
E_0(k + N_1) = h_1(k + N_1)\,E_1(k) + g_1(k + N_1)\,D_1(k)\,.
\end{gathered} \tag{15}$$

3. Многоуровневое лифтинговое преобразование

3.1. Теперь будем считать, что $N = 2^s$. Обозначим $N_\nu = N/2^\nu$, $\nu = 0, 1, \ldots, s$. Это обозначение согласовано с обозначениями N_0, N_1 из предыдущего раздела. Отметим также, что $N_s = 1$.

В разделе 2 было описано лифтинговое преобразование $E_0 \to (D_1, E_1)$. Это преобразование можно продолжить:

$$E_1 \to (D_2, E_2)\,, \quad E_2 \to (D_3, E_3)\,, \quad \ldots\,, \quad E_{s-1} \to (D_s, E_s)\,.$$

Выведем соответствующие формулы. Положим при $k \in 0 : N_{\nu-1} - 1$

$$U_\nu(k) = \frac{\left(\cos\frac{\pi k}{N_{\nu-1}}\right)^{2r} - \left(\sin\frac{\pi k}{N_{\nu-1}}\right)^{2r}}{\left(\cos\frac{\pi k}{N_{\nu-1}}\right)^{2r} + \left(\sin\frac{\pi k}{N_{\nu-1}}\right)^{2r}}\,,$$

$$\widetilde{g}_\nu(k) = \omega_{N_{\nu-1}}^{k}\big(1 - U_\nu(k)\big)\,, \quad \widetilde{h}_\nu(k) = 1 + \beta_\nu(k)(1 - U_\nu(k))\,.$$

Здесь $\beta_\nu(k)$ — произвольная $N_{\nu-1}$-периодическая функция, удовлетворяющая условию

$$\beta_\nu(k + N_\nu) = -\beta_\nu(k)\,, \qquad k \in 0 : N_\nu - 1\,.$$

Аналогично предложению 5 доказывается следующее утверждение: *при* $k \in 0 : N_\nu - 1$ *справедливы равенства*

$$\begin{aligned} D_\nu(k) &= \tfrac{1}{2}\left[\widetilde{g}_\nu(k)\, E_{\nu-1}(k) + \widetilde{g}_\nu(k+N_\nu)\, E_{\nu-1}(k+N_\nu)\right], \\ E_\nu(k) &= \tfrac{1}{2}\left[\widetilde{h}_\nu(k)\, E_{\nu-1}(k) + \widetilde{h}_\nu(k+N_\nu)\, E_{\nu-1}(k+N_\nu)\right]. \end{aligned} \tag{16}$$

Набор спектров $(D_1, D_2, \ldots, D_s, E_s)$ называется *полным лифтинговым преобразованием сигнала* z. Отметим, что D_s, E_s — это числа.

3.2. По полному лифтинговому преобразованию $(D_1, D_2, \ldots, D_s, E_s)$ легко восстановить спектр E_0 исходного сигнала z. Для этого введём два вспомогательных сигнала

$$h_\nu(k) = 1 + U_\nu(k)\,, \quad g_\nu(k) = \omega_{N_{\nu-1}}^{-k}\big(1 - \beta_\nu(k)\, h_\nu(k)\big)\,, \quad k \in 0 : N_{\nu-1} - 1\,.$$

Согласно (15) имеем

$$\begin{gathered} E_{\nu-1}(k) = h_\nu(k)\, E_\nu(k) + g_\nu(k)\, D_\nu(k)\,, \\ E_{\nu-1}(k+N_\nu) = h_\nu(k+N_\nu)\, E_\nu(k) + g_\nu(k+N_\nu)\, D_\nu(k)\,, \\ k \in 0 : N_\nu - 1\,, \quad \nu = s, s-1, \ldots, 1\,. \end{gathered} \tag{17}$$

При $\nu = 1$ получим $E_0 = \mathcal{F}_N(z)$.

4. Лифтинговые разложения сигнала

4.1. Перепишем (17) в виде

$$E_{\nu-1} = h_\nu\, E_\nu + g_\nu\, D_\nu\,, \qquad \nu = s, s-1, \ldots, 1\,. \tag{18}$$

Предложение 7. *При любом* $t \in 1 : s$ *справедлива формула*

$$E_0 = h_1 h_2 \ldots h_t\, E_t + \sum_{\nu=1}^{t} h_1 h_2 \ldots h_{\nu-1}\, g_\nu\, D_\nu. \tag{19}$$

Доказательство. При $t = 1$ соотношение (19) совпадает с (14). Индукционный переход легко осуществить, опираясь на (18).

Введём обозначения $H_\nu = h_1 h_2 \dots h_\nu$, $G_\nu = h_1 h_2 \dots h_{\nu-1}\, g_\nu$,

$$\varphi_\nu = \mathcal{F}_N^{-1}(H_\nu)\,, \quad \psi_\nu = \mathcal{F}_N^{-1}(G_\nu)\,.$$

Предложение 8. *Пусть $N = 2^s$ и $t \in 1 : s$. Для любого сигнала $z \in \mathbb{C}_N$ справедливо разложение*

$$z(j) = \sum_{k=0}^{N_t-1} e_t(k)\, \varphi_t(j - 2^t k) + \sum_{\nu=1}^{t} \sum_{k=0}^{N_\nu-1} d_\nu(k)\, \psi_\nu(j - 2^\nu k)\,, \quad j \in \mathbb{Z}\,, \tag{20}$$

где $e_t = \mathcal{F}_{N_t}^{-1}(E_t)$, $d_\nu = \mathcal{F}_{N_\nu}^{-1}(D_\nu)$.

Доказательство. Применим к (19) обратное преобразование Фурье порядка N. Получим

$$z = \mathcal{F}_N^{-1}\big(H_t E_t\big) + \sum_{\nu=1}^{t} \mathcal{F}_N^{-1}(G_\nu D_\nu)\,. \tag{21}$$

Отметим, что

$$\begin{gathered}
\big[\mathcal{F}_N^{-1}(G_\nu D_\nu)\big](j) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} G_\nu(l) D_\nu(l)\, \omega_N^{lj} = \\
= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} G_\nu(l)\, \omega_N^{lj} \sum_{k=0}^{N_\nu-1} d_\nu(k)\, \omega_{N_\nu}^{-lk} = \\
= \sum_{k=0}^{N_\nu-1} d_\nu(k) \Big\{ \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} G_\nu(l)\, \omega_N^{l(j-2^\nu k)} \Big\} = \sum_{k=0}^{N_\nu-1} d_\nu(k)\, \psi_\nu(j - 2^\nu k)\,.
\end{gathered} \tag{22}$$

Аналогично показывается, что

$$\big[\mathcal{F}_N^{-1}(H_t E_t)\big](j) = \sum_{k=0}^{N_t-1} e_t(k)\, \varphi_t(j - 2^t k)\,. \tag{23}$$

Подставив (22), (23) в (21), придём к (20).

Формула (20) называется *лифтинговым разложением сигнала z.*

Правая часть (20) при каждом $t \in 1 : s$ содержит ровно N слагаемых (по размерности пространства $\mathbb{C}_N$). Поскольку разложение (20) справедливо для любого сигнала $z \in \mathbb{C}_N$, то система сигналов

$$\Big\{ \big\{ \varphi_t(j - 2^t k) \big\}_{k=0}^{N_t-1} ;\ \big\{ \psi_\nu(j - 2^\nu k) \big\}_{k=0}^{N_\nu-1} , \quad \nu = 1, \dots, t \Big\}$$

необходимо является базисом в $\mathbb{C}_N$.

4.2. При $t = s$ формула (20) *называется полным лифтинговым разложением сигнала* z. Первая сумма в правой части такого разложения вырождается до одного слагаемого $e_s(0)\,\varphi_s(j)$.

Предложение 9. *Имеет место тождество* $\varphi_s(j) \equiv 1$.

Доказательство. Достаточно проверить, что $H_s = N\delta_N$.

Напомним, что

$$h_\nu(k) = 1 + U_\nu(k) = \frac{2\big(\cos\frac{\pi k}{2N_\nu}\big)^{2r}}{\big(\cos\frac{\pi k}{2N_\nu}\big)^{2r} + \big(\sin\frac{\pi k}{2N_\nu}\big)^{2r}}$$

и

$$H_s(k) = \prod_{\nu=1}^{s} h_\nu(k)\,.$$

Ясно, что $H_s(0) = N$. Нужно показать, что $H_s(k) = 0$ при $k \in 1 : N-1$.

Возьмём $k \in 1 : N-1$ и представим его в виде

$$k = \big(k_{s-1}, \ldots, k_{s-p+1}, 1, 0 \ldots, 0\big)_2 = (2n+1)N_p$$

при некотором $p \in 1 : s$. Так как

$$\cos\tfrac{\pi k}{2N_p} = \cos\tfrac{\pi}{2}\big(2n+1\big) = 0\,,$$

то $h_p(k) = 0$. Значит, и $H_s(k) = 0$. Предложение доказано.

На основании предложений 8 и 9 заключаем, что полное лифтинговое разложение сигнала $z \in \mathbb{C}_N$ имеет вид

$$z(j) = e_s(0) + \sum_{\nu=1}^{s}\sum_{k=0}^{N_\nu-1} d_\nu(k)\,\psi_\nu(j - 2^\nu k)\,, \quad j \in \mathbb{Z}\,. \tag{24}$$

4.3. Сигналы $\varphi_\nu = \mathcal{F}_N^{-1}(H_\nu)$, $\nu \in 1 : s$, вещественны и чётны, поскольку вещественными и чётными являются их дискретные преобразования Фурье H_ν. Разберёмся с сигналом $\psi_\nu = \mathcal{F}_N^{-1}(G_\nu)$, зависящим от управляющей $N_{\nu-1}$- периодической функции β_ν. Пока что на β_ν накладывалось одно условие

$$\beta_\nu(k + N_\nu) = -\beta_\nu(k)\,, \qquad k \in 0 : N_\nu - 1\,. \tag{25}$$

Предложение 10. *Допустим, что наряду с* (25) *функция* β_ν *обладает следующими свойствами:*

β_ν вещественна и чётна,

$\beta_\nu(0) = \frac{1}{2}$.

Тогда сдвинутый сигнал $x_\nu(j) = \psi_\nu(j + \Delta_\nu)$, где $\Delta_\nu = 2^{\nu-1}$, будет вещественным и чётным. При этом

$$\sum_{j=0}^{N-1} \psi_\nu(j) = 0\,. \tag{26}$$

Доказательство. Имеем

$$\big[\mathcal{F}_N(\psi_\nu)\big](k) = G_\nu(k) = h_1(k)\ldots h_{\nu-1}(k)\,\omega_{N_{\nu-1}}^{-k}\big(1 - \beta_\nu(k)h_\nu(k)\big)\,,$$

поэтому

$$\big[\mathcal{F}_N(x_\nu)\big](k) = \sum_{j=0}^{N-1} \psi_\nu(j + \Delta_\nu)\,\omega_N^{-k(j+\Delta_\nu)+k\Delta_\nu} =$$
$$= \omega_{N_{\nu-1}}^{k}\,\big[\mathcal{F}_N(\psi_\nu)\big](k) = h_1(k)\ldots h_{\nu-1}(k)\big(1 - \beta_\nu(k)h_\nu(k)\big)\,.$$

Видим, что дискретное преобразование Фурье сигнала x_ν вещественно и чётно. Это гарантирует вещественность и чётность самого x_ν.

Далее,

$$\sum_{j=0}^{N-1} \psi_\nu(j) = G_\nu(0) = h_1(0)\ldots h_{\nu-1}(0)\big(1 - \beta_\nu(0)h_\nu(0)\big)\,.$$

Поскольку $\beta_\nu(0) = \frac{1}{2}$ и $h_\nu(0) = 2$, то выполняется (26). Предложение доказано.

Предложение 11. *Если исходный сигнал $z(j)$ — вещественный и выполнены условия предложения 10, то все коэффициенты полного лифтингового разложения* (24) *вещественны.*

Доказательство. В силу (26)

$$e_s(0) = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} z(j)\,,$$

так что вещественность $e_s(0)$ очевидна. Вещественность сигнала z порождает чётность его спектра $E_0 = \mathcal{F}_N(z)$ (вообще говоря, комплексного). Последнее означает, что $E_0(-k) = \overline{E_0(k)}$.

Обратимся к формулам (16) и проверим чётность спектров D_ν, E_ν при условии чётности $E_{\nu-1}$. Для этого достаточно убедиться в чётности всех сигналов, входящих в правую часть (16). Относительно $\widetilde{g}_\nu(k)$ и $\widetilde{h}_\nu(k)$ это очевидно. В силу $N_{\nu-1}$-периодичности

$$E_{\nu-1}(-k+N_\nu) = E_{\nu-1}(-k-N_\nu) = \overline{E_{\nu-1}(k+N_\nu)}\,,$$

что подтверждает чётность $E_{\nu-1}(k+N_\nu)$. Аналогично проверяется чётность $\widetilde{g}_\nu(k+N_\nu)$, $\widetilde{h}_\nu(k+N_\nu)$. В результате приходим к заключению о чётности D_ν, E_ν при всех $\nu = 1, \ldots, s$. Это гарантирует вещественность векторов коэффициентов $e_\nu = \mathcal{F}_{N_\nu}^{-1}(E_\nu)$, $d_\nu = \mathcal{F}_{N_\nu}^{-1}(D_\nu)$. Предложение доказано.

5. Описание множества управляющих функций

5.1. Займёмся описанием множества управляющих функций β_1, $\beta_2, \ldots, \beta_s$, удовлетворяющих условиям предложения 10. Напомним, что основным периодом β_ν является множество $0 : N_{\nu-1} - 1$.

Функции β_s и β_{s-1} определяются однозначно: $\beta_s(0) = \frac{1}{2}$, $\beta_s(1) = -\frac{1}{2}$;

$$\beta_{s-1}(k) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{при } k = 0, \\ -\frac{1}{2} & \text{при } k = 2, \\ 0 & \text{при } k = 1, 3. \end{cases}$$

То, что $\beta_{s-1}(1) = \beta_{s-1}(3) = 0$ следует из равенства $\beta_{s-1}(3) = -\beta_{s-1}(1)$ и чётности β_{s-1}, в силу которой $\beta_{s-1}(3) = \beta_{s-1}(1)$.

Отметим, что $\beta_{s-1}(2k) = \beta_s(k)$, $k = 0, 1$. Потребуем, чтобы и в общем случае при $\nu = s-2, s-3, \ldots, 1$ выполнялось соотношение

$$\beta_\nu(2k) = \beta_{\nu+1}(k), \qquad k \in 0 : N_\nu - 1\,. \tag{27}$$

Таким образом, нас интересуют управляющие функции $\beta_1, \ldots, \beta_s$, которые наряду с условиями предложения 10 удовлетворяют ещё и условию (27).

У функции $\beta_{s-2}(k)$ с основным периодом $0 : 7$ есть только одна степень свободы — значение $\beta_{s-2}(1)$. Действительно,

$$\begin{aligned} &\beta_{s-2}(2k) = \beta_{s-1}(k),\ k \in 0 : 3 \quad \text{(согласно (27))}, \\ &\beta_{s-2}(5) = -\beta_{s-2}(1) \quad \text{(в силу (25))}, \\ &\beta_{s-2}(3) = \beta_{s-2}(5) \quad \text{(на основании чётности } \beta_{s-2}(k)), \\ &\beta_{s-2}(7) = -\beta_{s-2}(3) \quad \text{(снова в силу (25))}. \end{aligned}$$

Видим, что значение $\beta_{s-2}(1)$ однозначно определяет ещё три значения: $\beta_{s-2}(5)$, $\beta_{s-2}(3)$ и $\beta_{s-2}(7)$.

Возьмём функцию $\beta_\nu(k)$ при $\nu \in 1 : s-3$. Её значения на чётных индексах определены формулой (27). Что касается нечётных индексов, то достаточно задать значения $\beta_\nu(2k+1)$ только при $k \in 0 : N_{\nu+2}-1$. Действительно,

$$\begin{aligned}
&\beta_\nu(2k+1+N_\nu) \;=\; -\beta_\nu(2k+1) \quad \text{(в силу (25))},\\
&\beta_\nu(-2k-1+N_\nu) \;=\; \beta_\nu(2k+1+N_\nu) \quad \text{(на основании чётности } \beta_\nu(k)\text{)},\\
&\beta_\nu(-2k-1-N_{\nu-1}) \;=\; -\beta_\nu(-2k-1+N_\nu) \quad \text{(снова в силу (25))}.
\end{aligned}$$

Отметим, что

$$\begin{aligned}
2k+1+N_\nu \;&=\; 2(N_{\nu+1}+k)+1\,,\\
-2k-1+N_\nu \;&=\; 2(N_{\nu+1}-k-1)+1\,,\\
-2k-1-N_{\nu-1} \;&=\; 2(N_\nu-k-1)+1\,.
\end{aligned}$$

При $k \in 0 : N_{\nu+2}-1$ имеем

$$\begin{aligned}
&N_{\nu+1}-k-1 \;\in\; N_{\nu+2} : N_{\nu+1}-1,\\
&N_{\nu+1}+k \;\in\; N_{\nu+1} : N_{\nu+1}+N_{\nu+2}-1,\\
&N_\nu-k-1 \;\in\; N_{\nu+1}+N_{\nu+2} : N_\nu-1.
\end{aligned}$$

Получили, что функция $\beta_\nu(k)$ определена на всех нечётных индексах из основного периода.

Указанным способом строится функция $\beta_1(k)$, $k \in 0 : N-1$. Остальные управляющие функции $\beta_2(k), \ldots, \beta_s(k)$ восстанавливаются с помощью соотношения (27), если его переписать в виде

$$\beta_{\nu+1}(k) \;=\; \beta_\nu(2k), \qquad k \in 0 : N_\nu - 1\,. \tag{28}$$

Предложение 12. *Размерность множества функций β_1 равна $N/4-1$.*

Доказательство. Обозначим

$$\beta_{\nu k} \;=\; \beta_\nu(2k+1), \quad k \in 0 : N_{\nu+2}-1, \quad \nu = s-2, s-3, \ldots, 1\,.$$

Это и есть те степени свободы, из которых складывается размерность множества функций β_1. Их количество равно $1+2+2^2+\cdots+2^{s-3} = N/4-1$.

Предложение доказано.

5.2. Много конкретных функций β_1 мы получим, если в качестве $\beta_{\nu k}$ будем использовать значения $1/2$, 0 и $-1/2$. Например, если все $\beta_{\nu k}$ равны нулю, то

$$\beta_1(k) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{при } k = 0, \\ -\frac{1}{2} & \text{при } k = N_1, \\ 0 & \text{при остальных } k \in 0 : N-1. \end{cases}$$

Если все $\beta_{\nu k}$ равны $1/2$, то (см. рис. 1)

$$\beta_1(k) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{при } k \in 0 : N_2 - 1 \text{ и } k \in N_2 + N_1 + 1 : N - 1, \\ 0 & \text{при } k = N_2 \text{ и } k = N_2 + N_1, \\ -\frac{1}{2} & \text{при } k \in N_2 + 1 : N_2 + N_1 - 1. \end{cases} \tag{29}$$

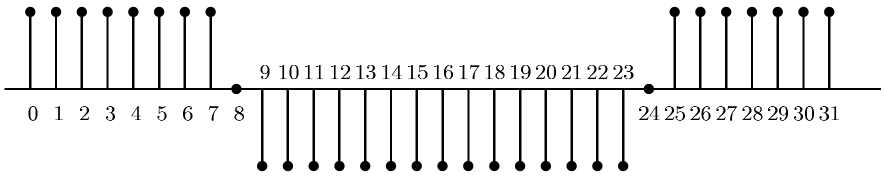

Рис. 1. График функции $\beta_1(k)$ вида (29) при $N = 32$

5.3. Отметим, что функции β_1 из предложения 12 полностью определяются своими значениями $y_k = \beta_1(k)$ при $k \in 1 : N_2 - 1$. Действительно, согласно (25) $\beta_1(k + N_1) = -y_k$, $k \in 1 : N_2 - 1$. В силу чётности $\beta_1(N - k) = y_k$, $k \in 1 : N_2 - 1$, и $\beta_1(N_1 - k) = \beta_1(N_1 + k) = -y_k$, $k \in 1 : N_2 - 1$. Кроме того, $\beta_1(N_1) = -\beta_1(0) = -\frac{1}{2}$ и $\beta_1(N_2) = \beta_1(N_2 + N_1) = 0$, поскольку $\beta_1(N_2) = \beta_1(N_2 + N_1)$ в силу чётности и $\beta_1(N_2) = -\beta_1(N_2 + N_1)$ по условию (25).

Приведём вид $\beta_1(k)$ на основном периоде при $N = 16$:

$$\beta_1 = \left(\tfrac{1}{2}, y_1, y_2, y_3, 0, -y_3, -y_2, -y_1, -\tfrac{1}{2}, -y_1, -y_2, -y_3, 0, y_3, y_2, y_1\right).$$

5.4. В [2] в качестве $\beta_\nu(k)$ предлагаются функции

$$\beta_\nu(k) = \tfrac{1}{2} U_\nu(k), \quad \beta_\nu(k) = U_\nu(k)/(1 + U_\nu^2(k)), \quad k \in 0 : N_{\nu-1} - 1.$$

Они обладают всеми свойствами, отмеченными в п.5.1, включая (28). На рис. 2 изображена функция $\beta_1(k) = \frac{1}{2} U_1(k)$ при $N = 32$.

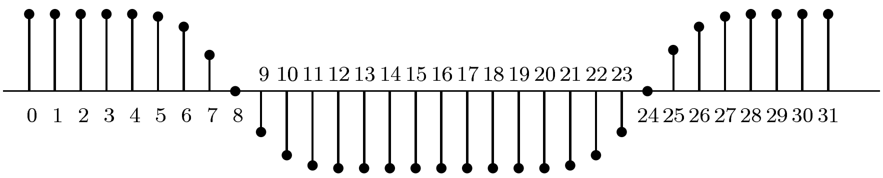

Рис. 2. График функции $\beta_1(k) = \frac{1}{2} U_1(k)$ при $N = 32$

5.5. Выбор управляющих функций β_ν определяет свойства базисных сигналов в полном лифтинговом разложении (24).

Предложение 13. *Пусть N-периодическая функция $\beta_1(k)$ вещественна, чётна, в нуле равна $\frac{1}{2}$ и сдвиг аргумента на N_1 лишь меняет её знак на противоположный. Пусть остальные управляющие функции $\beta_2(k), \ldots, \beta_s(k)$ строятся с помощью прореживания по правилу* (28). *Тогда при всех $\nu \in 1 : s-1$ справедливо тождество*

$$\psi_{\nu+1}(2j) = \psi_\nu(j) + \psi_\nu(j + N/2), \qquad j \in \mathbb{Z}. \tag{30}$$

Доказательство. Отметим, что левая и правая части (30) являются N_1-периодическими сигналами. Вычислим ДПФ от левой части (30):

$$L(k) = \sum_{j=0}^{N_1-1} \psi_{\nu+1}(2j)\,\omega_{N_1}^{-kj} = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{N-1} \psi_{\nu+1}(j)\,\omega_N^{-kj}(1 + (-1)^j) =$$
$$= \frac{1}{2}\big(\big[\mathcal{F}_N(\psi_{\nu+1})\big](k) + \big[\mathcal{F}_N(\psi_{\nu+1})\big](k + N_1)\big) =$$
$$= \frac{1}{2}\big[\omega_{N_\nu}^{-k}\, h_1(k)\ldots h_\nu(k)(1 - \beta_{\nu+1}(k)h_{\nu+1}(k)) +$$
$$+\,\omega_{N_\nu}^{-(k+N_1)}\, h_1(k+N_1)\ldots h_\nu(k+N_1)(1 - \beta_{\nu+1}(k+N_1)h_{\nu+1}(k+N_1))\big].$$

Имеем $h_1(k) = 1 + U_1(k),\ h_1(k+N_1) = 1 - U_1(k)$. Поскольку N_1 делится на N_ν при $\nu \in 1 : s-1$, то в силу периодичности

$$h_2(k+N_1) = h_2(k),\ \ldots,\ h_{\nu+1}(k+N_1) = h_{\nu+1}(k),\ \ \beta_{\nu+1}(k+N_1) = \beta_{\nu+1}(k).$$

В результате получаем $L(k) = \omega_{N_\nu}^{-k}\, h_2(k)\ldots h_\nu(k)\,(1 - \beta_{\nu+1}(k)h_{\nu+1}(k))$. Теперь вычислим ДПФ от правой части (30):

$$R(k) = \sum_{j=0}^{N-1} \psi_\nu(j)\,\omega_N^{-2kj} = \omega_{N_{\nu-1}}^{-2k}\, h_1(2k)\ldots h_{\nu-1}(2k)(1 - \beta_\nu(2k)h_\nu(2k)).$$

Учитывая, что $h_p(2k) = h_{p+1}(k)$ (по определению) и $\beta_\nu(2k) = \beta_{\nu+1}(k)$ (согласно (27)), приходим к равенству

$$R(k) = \omega_{N_\nu}^{-k}\, h_2(k)\ldots h_\nu(k)\,(1 - \beta_{\nu+1}(k)h_{\nu+1}(k)).$$

Видим, что $L(k) \equiv R(k)$, откуда и следует (30).

Аналогичное утверждение справедливо для функций $\varphi_\nu = \mathcal{F}_N^{-1}(H_\nu)$, которые не зависят от β_ν.

Предложение 14. *При всех $\nu \in 1 : s-1$ справедливо тождество*

$$\varphi_{\nu+1}(2j) = \varphi_\nu(j) + \varphi_\nu(j + N/2), \qquad j \in \mathbb{Z}.$$

Доказательство по сравнению с предложением 13 лишь упрощается.

Литература

1. **Малозёмов В.Н., Машарский С.М.** Основы дискретного гармонического анализа. Части 1-3. СПб: НИИММ, 2003. 288 с.

2. **Жёлудев В.А., Певный А.Б.** Биортогональные вейвлетные схемы, основанные на интерполяции дискретными сплайнами // *Журн. выч. мат. и матем. физ. 2001. Т.41. №4. С. 537-548.*

3. **Малозёмов В.Н., Певный А.Б.** Дискретные периодические сплайны и их вычислительные применения // *Журн. выч. мат. и матем. физ. 1998. Т.38. №8. С. 1235-1246.*

Summary

Malozemov V.N., Pevnyi A.B., Selyaninova N.A. Primal lifting scheme.

We present the analysis of the primal lifting scheme for the constructing of the wavelet decomposition of the discrete periodic signals. A description of the set of all control functions $\beta_\nu(k)$ is given.

Сыктывкарский университет
Санкт-Петербургский университет

Поступила 9.12.2005