Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1. Вып.6. 2006

УДК 519.652

ДИСКРЕТНЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФРЕЙМЫ

В.А. Желудев, А.Б. Певный

Предлагается общий метод построения жестких фреймов в пространстве $\mathbb{C}^N$ четной размерности N, состоящих из $mN/2$ векторов, где m целое, $m > 2$. На основе фильтров Баттерворта строятся вещественные жесткие фреймы в пространстве $\mathbb{R}^N$, состоящие из $3N/2$ векторов. Такие фреймы используются в цифровой обработке сигналов.

Введение

Жестким фреймом в $\mathbb{C}^N$ называется набор векторов $\{\psi_1, \dots, \psi_K\}$, $K > N$, такой, что любой вектор $x \in \mathbb{C}^N$ разлагается в сумму

$$x = \frac{1}{A} \sum_{k=1}^{K} \langle x, \psi_k \rangle \psi_k, \tag{1}$$

где A называется константой фрейма. Умножив (1) скалярно на x, получим

$$\sum_{k=1}^{K} |\langle x, \psi_k \rangle|^2 = A\|x\|^2, \quad x \in \mathbb{C}^N. \tag{2}$$

Обратно, из (2) следует (1) – это показано в [1], раздел 3.2. Там же можно найти другие сведения о фреймах в гильбертовом пространстве.

Избыточные разложения вида (1) привлекли внимание многих исследователей, занимающихся цифровой обработкой сигналов. Фреймовые разложения более устойчивы к потерям при передаче коэффициентов. Они могут служить инструментом для исправления ошибок, допущенных при передаче по каналам связи.

Будем смотреть на векторы x как на функции $x = x(j)$, целочисленног аргумента $j \in \mathbb{Z}$, имеющие период N: $x(j+N) = x(j)$ для всех j, и будем записывать (1) в виде

$$x(j) = \frac{1}{A} \sum_{k=1}^{K} \langle x, \psi_k \rangle \psi_k(j),$$

где функции $\psi_k(j)$ будут иметь разную степень колебательности (разную частоту). Типичный вид этих функций приведен на рис. 1 справа.

Инициирующими для нас были работы [2, 3], где строились фреймы в пространстве $\ell^2(\mathbb{Z})$. Но для цифровой обработки представляют интерес и N-периодические сигналы. В статье строятся фреймовые разложения таких сигналов. Базисные функции будут $\psi_k(j)$ строиться с помощью банка фильтров (см. раздел 1). Условия, при которых построенные функции образуют фрейм, устанавливаются разделе 2. Конкретные примеры фреймов, построенные на основе фильтров Баттерворта, строятся в разделе 3. Используются следующие обозначения:

$\mathbb{C}_N$ — пространство сигналов (N-периодических функций $x = x(j)$, $j \in \mathbb{Z}$),

$\langle x, y \rangle = \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\overline{y(j)}$ — скалярное произведение сигнало x, y,

$\omega_N = \exp(2\pi i/N)$ — корень N-й степени из единицы,

$\mathcal{F}_N$ — дискретное преобразование Фурье (ДПФ) порядка N, сопоставляющее сигналу x сигнал $X = \mathcal{F}_N(x)$ с компонентами

$$X(k) = \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\,\omega_N^{-kj}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Нужные факты из теории ДПФ можно найти в [1].

1. Банки фильтров

Следуя основополагающей статье [2], рассмотрим банк из m фильтров анализа и m фильтров синтеза, где $m > 2$. Но в отличие от [2], будем предполагать, что все сигналы и фильтры являются N-периодическими.

Итак, рассмотрим m фильтров анализа $\widetilde{g}^0, \widetilde{g}^1, \ldots, \widetilde{g}^{m-1} \in \mathbb{C}^N$, которые, действуя на сигнал $x \in \mathbb{C}^N$, выдают m сигналов $d^0, d^1, \ldots, d^{m-1} \in$

$\mathbb{C}^{N_1}$, где $N_1 = N/2$ (предполагается, что N чётное). ДПФ этих сигналов $D^i = \mathcal{F}_{N_1}(d^i)$ связаны с ДПФ X по формуле

$$\begin{bmatrix} D^0(k) \\ D^1(k) \\ \dots \\ D^{m-1}(k) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \overline{\widetilde{g}^0(k)} & \overline{\widetilde{g}^0(k+N_1)} \\ \overline{\widetilde{g}^1(k)} & \overline{\widetilde{g}^1(k+N_1)} \\ \dots & \dots \\ \overline{\widetilde{g}^{m-1}(k)} & \overline{\widetilde{g}^{m-1}(k+N_1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(k) \\ X(k+N_1) \end{bmatrix}, \ k \in 0 : N_1 - 1. \tag{3}$$

Из формулы (3) следует, что функции $D^i(k)$ имеют период N_1. Сигналы d^i определяются с помощью обратного ДПФ длины N_1:

$$d^i = \mathcal{F}_{N_1}^{-1}(D^i), \quad i \in 0 : m-1. \tag{4}$$

Сигналы $\{d^i\}$ передаются по каналу связи и на «другом конце провода» происходит реконструкция (синтез) сигнала x по формуле

$$\hat{X}(k) = \sum_{k=0}^{m-1} g^i(k) D^i(k), \quad k \in 0 : N-1, \tag{5}$$

где $\{g^0, g^1, \dots, g^{m-1}\}$ – набор фильтров синтеза. Сигнал $\hat{x} = \mathcal{F}_N^{-1}(\hat{X})$ принимается за восстановленное значение x. Если $\hat{x} = x$, то набор $\{\widetilde{g}^i, g^i, \ i \in 0 : m-1\}$ называется банком фильтров совершенной реконструкции.

Выведем условие совершенной реконструкции. Запишем (5) в виде

$$\begin{bmatrix} \hat{X}(k) \\ \hat{X}(k+N_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g^0(k) & g^1(k) & \dots & g^{m-1}(k) \\ g^0(k+N_1) & g^1(k+N_1) & \dots & g^{m-1}(k+N_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D^0(k) \\ D^1(k) \\ \vdots \\ D^{m-1}(k) \end{bmatrix}, \tag{6}$$

где $k \in 0 : N_1 - 1$. Матрицы в (3) и (6) обозначим $\widetilde{P}(k)$ и $P(k)$. Тогда условие совершенной реконструкции запишется в виде

$$\frac{1}{2} P(k) \widetilde{P}(k) = I := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ k \in 0 : N_1 - 1. \tag{7}$$

2. Разложение по фреймовому базису

Числа $d^i(k)$ имеют смысл коэффициентов разложения сигнала $\hat{x}$ по фреймовому базису. Этот базис строится так. Введем сигналы

$$\psi^i = \mathcal{F}_N^{-1}(g^i), \quad i \in 0 : m-1.$$

Предложение 1. *Справедливо разложение*

$$\hat{x}(j) = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{N_1-1} d^i(k)\psi^i(j-2k), \qquad j \in \mathbb{Z}\,. \tag{8}$$

Доказательство. Основано на формуле реконструкции (5). Обозначим
$x^i = \mathcal{F}_{N_1}^{-1}(g^i D^i)$, $i \in 0 : m-1$. Тогда $\hat{x} = x_0 + x_1 + \cdots + x_{m-1}$. По формуле обращения ДПФ

$$x_i(j) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} g^i(l) D^i(l) \omega_N^{lj}.$$

Поскольку $D^i(l) = \sum_{k=0}^{N_1-1} d^i(k)\omega_{N_1}^{-lk}$, $\qquad \omega_{N_1}^{-lk} = \omega_N^{-2lk}$, то

$$x_i(j) = \sum_{k=0}^{N_1-1} d^i(k) \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} g^i(l)\omega_N^{l(j-2k)} = \sum_{k=0}^{N_1-1} d^i(k)\psi^i(j-2k).$$

Суммируя по $i \in 0 : m-1$, придем к (8).

Для того, чтобы разложение (8) было фреймовым нужно, чтобы коэффициенты $d^i(k)$ были скалярными произведениями сигнала x на $\psi^i(\cdot - 2k)$. Выясним, когда это будет. Обозначим $s^i(k) = \langle x, \psi^i(\cdot - 2k)\rangle$. По равенству Парсеваля

$$s^i(k) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} X(l)\overline{g^i(l)\omega_N^{-2kl}} = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} X(l)\overline{g^i(l)}\omega_{N_1}^{kl}. \tag{9}$$

С другой стороны, поскольку $d^i = \mathcal{F}_{N_1}^{-1}(D^i)$, где D^i находятся по формуле (3), то

$$d^i(k) = \frac{1}{2N_1} \sum_{l=0}^{N_1-1} \left[\overline{\widetilde{g}^i(l)}X(l) + \overline{\widetilde{g}^i(l+N_1)}X(l+N_1)\right] \omega_{N_1}^{kl} = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \overline{\widetilde{g}^i(l)}X(l)\omega_{N_1}^{kl}. \tag{10}$$

Для того, чтобы $s^i(k) = d_i(k)$ для всех $X \in \mathbb{C}^N$, необходимо и достаточно, чтобы $\overline{g^i(l)}\omega_{N_1}^{kl} = \overline{\widetilde{g}^i(l)}\omega_{N_1}^{kl}$ для всех l, т.е. $g^i = \widetilde{g}^i$. В дальнейшем будем предполагать, что фильтры анализа совпадают с фильтрами синтеза:

$$g^i = \widetilde{g}^i, \quad i \in 0 : m-1. \tag{11}$$

Тогда, как было показано выше, справедливо

Предложение 2. *При выполнении условий (11) и условий совершенной реконструкции* (7) *любой сигнал представляется в виде*

$$x = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{N_1-1} \langle x, \psi^i(j-2k)\rangle \psi^i(j-2k), \qquad x \in \mathbb{C}^N. \tag{12}$$

Согласно определению во Введении система

$$\{\psi^i(j-2k),\ k \in 0 : N_1 - 1,\ i \in 0 : m-1\}. \tag{13}$$

является нормализованным жестким фреймом в $\mathbb{C}^N$. Термин «жёсткий фрейм» использовался в [5]. Термин «нормализованный» означает, что константа $A = 1$.

Разложение (12) по форме совпадает с разложением по ортонормированному базису (ОНБ). Но в (12) количество слагаемых равно $mN_1 > N$, так как $m > 2$. Значит, система (13) линейно зависима.

В [1], p.57, доказано, что если система φ_j является жестким фреймом с константой $A = 1$ и $\|\varphi_j\| = 1$ для всех j, то φ_j образуют ОНБ. В нашем случае хотя бы одна из норм $\|\psi^i\|$ не равна 1.

3. Фреймы Баттерворта

3.1. Рассмотрим частный случай теории, полезный для цифровой обработки синалов. По-прежнему N чётное, $N = 2N_1$.

Пусть $m = 3$ и фильтры, соответствующие трем каналам будем традиционно обозначать $h(k), g^1(k), g^2(k)$. Условия совершенной реконструкции (7) переписываются в виде

$$|h(k)|^2 + |g^1(k)|^2 + |g^2(k)|^2 = 2,\ k \in 0 : N-1, \tag{14}$$

$$h(k)\overline{h(k+N_1)} + g^1(k)\overline{g^1(k+N_1)} + g^2(k)\overline{g^2(k+N_1)} = 0,\ k \in 0 : N_1 - 1. \tag{15}$$

Для цифровой обработки синалов весьма желательныы фильтры, которые являются дробно-рациональными функциями от ω_N^k. Дробно-рациональные фильтры, удовлетворяющие (14)–(15), можно построить на основе фильтров Баттерворта.

Возьмём нечётное число r и положим

$$c = \left(\cos\frac{k\pi}{N}\right)^{2r},\ s = \left(\sin\frac{k\pi}{N}\right)^{2r},\ h(k) = \frac{\sqrt{2}c}{c+s},\ g^1(k) = \frac{\sqrt{2}s}{c+s}. \qquad (16)$$

Функция $h(k)$ является дискретным аналогом известного фильтра Баттерворта. Фильтр $g^2(k)$ в силу (14) должен удовлетворять условию

$$|g^2(k)|^2 = 2 - \frac{2c^2+2s^2}{(c+s)^2} = \frac{4cs}{(c+s)^2} = \frac{4}{(c+s)^2}\left(\frac{1}{2}\sin\frac{2k\pi}{N}\right)^{2r}.$$

В качестве $g^2(k)$ возьмём

$$g^2(k) = \frac{2}{c+s}\left(\frac{1}{2}\sin\frac{2k\pi}{N}\right)^{r}. \qquad (17)$$

Отметим, что $g^2 \in \mathbb{C}^N$ и $g^2(k+N_1) = -g^2(k)$ при всех k в силу нечетности r. Фильтры (16) и (17) удовлетворяют (14) по построению и непосредственно проверяется условие (15). Построенные фильтры являются дробно-рациональными функциями от $z = \omega_N^k$, так как

$$4\cos^2\frac{k\pi}{N} = z + 2 + z^{-1},\ 4\sin^2\frac{k\pi}{N} = -z + 2 - z^{-1}.$$

В случае дробно-рациональных фильтров возможна рекурсивная реализация, позволяющая осуществлять декомпозицию и реконструкцию сигнала $x \in \mathbb{C}^N$ за $O(N)$ операций. Подробнее об этом в [6].

Очевидно, что сигналы $h(k)$ и $g^1(k)$ являются вещественными и четными. Поэтому вейвлеты $\varphi = \mathcal{F}_N^{-1}(h)$ и $\psi = \mathcal{F}_N^{-1}(g^1)$ являются чётными и вещественными.

Сигнал (17) является вещественным и нечетным, поэтому его обратное ДПФ $\psi^2 = \mathcal{F}_N^{-1}(g^2)$ является четным и чисто мнимым (чётность означает, что $\psi^2(-j) = \overline{\psi^2(j)}$ для всех j). А тогда сигнал

$$\theta(j) = \operatorname{Im}\psi^2(j)$$

является вещественным и нечетным: $\theta(-j) = -\theta(j)$.

При рассмотрении графиков вейвлетов на рис. 1 обращает на себя внимание малый размер вейвлета θ по сравнению с φ и ψ. Численный подсчет квадратов норм дает $\|\varphi\|^2 = \|\psi\|^2 = 0.898$, $\|\theta\|^2 = 0.203$. Заметим, что из равенств (3.1) следует, что $\|h\|^2 + \|g^1\|^2 + \|g^2\|^2 = 2N$, отсюда в силу равенства Парсеваля $\|\varphi\|^2 + \|\psi\|^2 + \|\theta\|^2 = 2$.

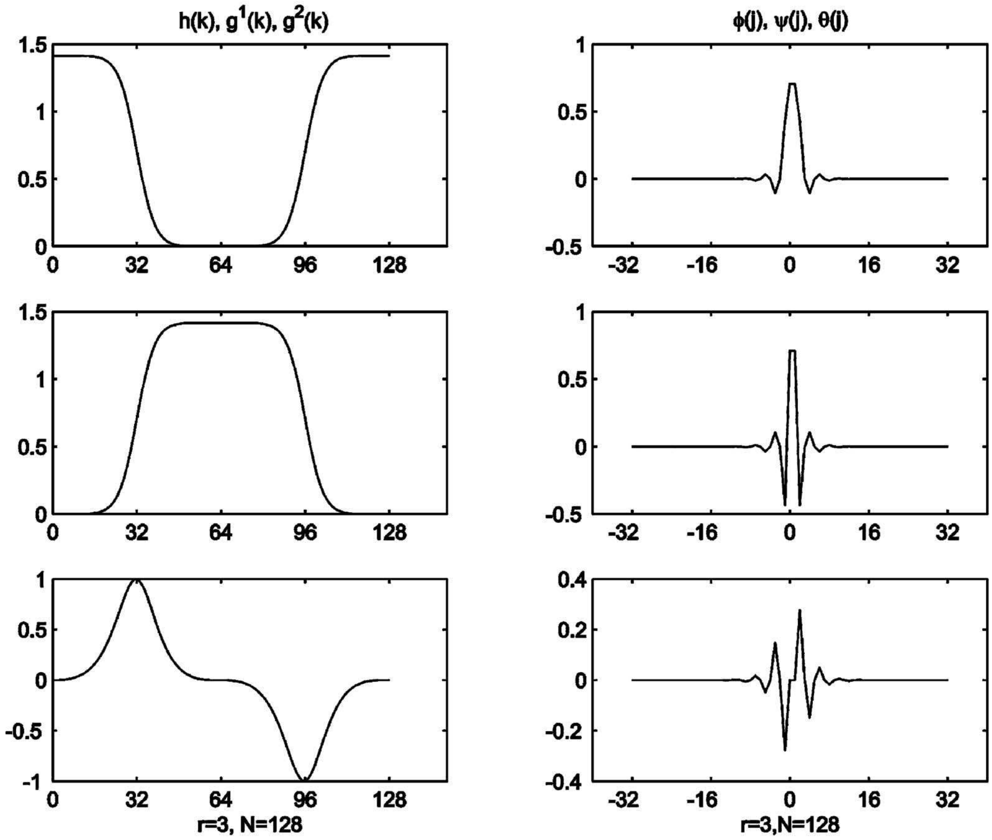

Рис. 1.Фильтры (слева) и соответствующие им вейвлеты (справа)

3.2. Жёсткий фрейм в $\mathbb{R}^N$. При вычислении скалярных произведений в (12) имеем
$\langle x, \psi^2(\cdot - 2k)\rangle \psi^2(\cdot - 2k) = -i\langle x, \theta(\cdot - 2k)\rangle i\theta(\cdot - 2k) = \langle x, \theta(\cdot - 2k)\rangle \theta(\cdot - 2k)$.
Поэтому для любого $x \in \mathbb{R}^N$ справедливо вещественное разложение

$$x = \sum_{k=0}^{N_1-1} \langle x, \varphi(j-2k)\rangle \varphi(\cdot - 2k) + \sum_{k=0}^{N_1-1} \langle x, \psi(j-2k)\rangle \psi(\cdot - 2k) + \\ + \sum_{k=0}^{N_1-1} \langle x, \theta(j-2k)\rangle \theta(\cdot - 2k).$$

Литература

1. **Daubechies I.** Ten lectures on wavelets. Philadelphia: SIAM, 1992.
2. **Cvetković Z., Vetterli M.** Oversampled filter banks // *IEEE Trans. Sign. Proc. 1998. V.46. №5. P. 1245-1255.*
3. **Averbuch A.Z., Zheludev V.A.** Interpolatory frames in signal spaces. To appear in IEEE Trans. Sign. Proc. 2006.
4. **Малозёмов В.Н., Машарский С.М.** Основы дискретного гармонического анализа. Части 1-3. СПб.: НИИММ, 2003. 288 с.
5. **Новиков И.Я., Стечкин С.Б.** Основы теории всплесков // *Успехи матем. наук. 1998. Т.53. Вып.6(324). С. 53-128.*
6. **Жёлудев В.А., Певный А.Б.** Вейвлетное преобразование Баттерворта и его реализация с помощью рекурсивных фильтров // *Журн. выч. мат. и матем. физ. 2002. Т.42. №4. С. 607-618.*
7. **Жёлудев В.А., Певный А.Б.** Биортогональные вейвлетные схемы, основанные на интерполяции дискретными сплайнами // *Журн. выч. мат. и матем. физ. 2001. Т.41. №4. С. 537-548.*
8. **Малозёмов В.Н., Певный А.Б.** Дискретные периодические сплайны и их вычислительные применения // *Журн. выч. мат. и матем. физ. 1998. Т.38. №8. С. 1235-1246.*

Summary

Zheludev V.A., Pevnyi A.B. Discrete periodic frames

We construct the filter bank of perfect reconstruction for the discrete N-periodic signals. This bank generates the wavelet tight frames in the spaces $\mathbb{C}^N$ and $\mathbb{R}^N$.

Сыктывкарский университет

Тель-Авивский университет

Поступила 7.03.2006