Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1. Вып.6. 2006

УДК 539.3

РАСЧЕТ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН ПО УТОЧНЕННЫМ ТЕОРИЯМ

А.В. Ермоленко

Используя уравнения типа Кармана-Тимошенко-Нагди, решена задача о расчете напряженно-деформированного состояния круглой нормально нагруженной жестко защемленной пластины. Решение получено без введения дополнительного условия о равенстве нулю поперечных сдвигов на краю пластины.

Как известно, классическая теория пластин строится на основе гипотез Кирхгофа, одна из которых (геометрическая) предполагает отсутствие поперечных сдвигов и поперечного обжатия. Но тогда в соответствии с соотношениями закона Гука следовало бы принять, что перерезывающие силы равны нулю, что привело бы к невозможности уравновесить нормальную поверхностную нагрузку. В этом и заключается основное формальное противоречие кирхгофовской теории пластин.

На необходимость учета деформаций поперечного сдвига при колебаниях балок указал С.П.Тимошенко в монографии [1]. Что же касается поперечного обжатия, то его учет в теории оболочек впервые, видимо, осуществил П.Нагди [2], который постулировал линейный закон изменения тангенциальных перемещений и напряжений по толщине пластины, а прогиб задавал квадратичной параболой.

К.Ф.Черныхом в работе [3] построена квазикирхгофовская теория оболочек, учитывающая поперечное обжатие путем ввода функций λ_ξ и $\varkappa_\xi$. Принципиальное различие между неизвестными функциями λ_ξ, $\varkappa_\xi$ и искомыми функциями u_1, u_2 , w заключается в том, что функции второй группы имеют независимые вариации, через которые могут быть выражены вариации функций первой группы. Иными словами, функции λ_ξ и $\varkappa_\xi$ рассматриваются как параметры, учет которых не приводит к увеличению числа уравнений, и, следовательно, порядка разрешающей системы.

Заметим, что предложенный К.Ф.Черныхом вариант квазикирхгофовской теории оболочек не лишен противоречий. Так подход к выводу уравнений статики оболочки из условий равновесия ее бесконечно малого элемента, в значительной мере обесценивает заявленный учет параметров λ_ξ и $\varkappa_\xi$, так как их влияние проявляется в основном через работу внешних сил и может быть эффективно учтено лишь при использовании вариационных методов вывода уравнений.

В работе [4] на основе вариационного уравнения Лагранжа построена теория пластин типа Кармана-Тимошенко-Нагди, уточняющая квазикирхгофовскую теорию К.Ф.Черныха за счет учета поперечных сдвигов по линейной теории и вариаций параметров поперечного обжатия.

Приведем основные положения теории типа Кармана-Тимошенко-Нагди. Во-первых, тангенциальные перемещения u_i^ξ по толщине пластины изменяются линейно, а прогиб w^ξ по квадратичной параболе:

$$u_i^\xi(x_1,x_2) = u_i(x_1,x_2) + \xi\vartheta_i(x_1,x_2), \vartheta_i = -w_{,i} + \omega_i, i = 1,2,$$

$$w^\xi(x_1,x_2) = w(x_1,x_2) + (\lambda_\xi - 1)\xi + {}^1\!/\!_2\xi^2\lambda_\xi\varkappa_\xi. \tag{1}$$

Здесь $w_{,i} = \frac{\partial w}{\partial x_i}$, ω_i – поперечные сдвиги, функции $\lambda_\xi, \varkappa_\xi$ характеризуют поперечное обжатие.

Далее, для описания деформации пластины используются компоненты тензора Грина-Лагранжа при следующих допущениях:
i) поперечная деформация описывается компонентами тензора деформации Коши;
ii) в тангенциальных компонентах тензора Грина из квадратичных слагаемых учитываются лишь связанные с нормальными перемещениями w;
iii) слагаемыми, содержащими производные от функций λ_ξ, $\varkappa_\xi$, можно пренебречь.

С учетом сделанных допущений компоненты тензора Грина-Лагранжа записываются в виде

$$\gamma_{i3}^\xi = {}^1\!/\!_2\omega_i, i = 1,2, \gamma_{33}^\xi = \lambda_\xi - 1 + \xi\lambda_\xi\varkappa_\xi,$$

$$\gamma_{ij}^\xi = {}^1\!/\!_2(u_{i,j} + u_{j,i} + w_{,i}w_{,j}) + {}^1\!/\!_2\xi(-2w_{,ij} + \omega_{i,j} + \omega_{j,i}). \tag{2}$$

В качестве закона упругости используются соотношения, по форме совпадающие с соотношениями Гука и имеющие следующий вид:

$$J\sigma_{ij}^{\xi} = 2\mu\gamma_{ij}^{\xi} + \lambda I_{\Gamma}\delta_{ij}. \tag{3}$$

Здесь $J\sigma_{ij}^{\xi}$ – компонеты тензора Пиолы-Кирхгофа, δ_{ij} – символ Кронекера, I_{Γ} – первый инвариант тензора Пиолы-Кирхгофа, λ, μ – упругие константы Ламе.

Усилия и моменты вводятся следующим образом:

$$T_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} (J\sigma_{ij}^{\xi} - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} J\sigma_{33}^{\xi}\delta_{ij}) d\xi,$$

$$M_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} (J\sigma_{ij}^{\xi} - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} J\sigma_{33}^{\xi}\delta_{ij}) \xi d\xi,$$

и имеют вид

$$T_{11} = B(\gamma_{11} + \nu\gamma_{22}), T_{22} = (1 \rightleftharpoons 2)T_{11},$$
$$T_{12} = (1 - \nu)B\gamma_{12}, B = Eh/(1 - \nu^2); \tag{4$_1$}$$

$$M_{ij} = M_{ij}^T + M_{ij}^K, M_{11}^K = -D(w_{,11} + \nu w_{,22}), M_{22}^K = (1 \rightleftharpoons 2)M_{11}^K,$$
$$M_{12}^K = -(1 - \nu)Dw_{,12}, D = Eh^3/12(1 - \nu^2); \tag{4$_2$}$$

$$M_{11}^T = D(\omega_{1,1} + \nu\omega_{2,2}), M_{22}^T = (1 \rightleftharpoons 2)M_{11}^T,$$
$$M_{12}^T = {}^1\!/\!_2(1 - \nu)D(\omega_{1,2} + \omega_{2,1}). \tag{4$_3$}$$

Здесь E, ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала пластины.

По найденным усилиям и моментам напряжения у лицевых поверхностей пластины вычисляются по формулам $(i = 1, 2)$

$$J\sigma_{ii}^{h/2} = \frac{T_{ii}}{h} + \frac{6M_{ii}}{h^2} + \frac{\nu}{1 - \nu}q_n^+, \ J\sigma_{ii}^{-h/2} = \frac{T_{ii}}{h} - \frac{6M_{ii}}{h^2} + \frac{\nu}{1 - \nu}q_n^-,$$

$$J\sigma_{12}^{\pm h/2} = \frac{T_{12}}{h} \pm \frac{6M_{12}}{h^2}, \tag{5}$$

где q_n^+, q_n^- – нагрузки на верхней и нижней лицевой поверхностях пластины.

Полевые и граничные уравнения выводятся из вариационного уравнения Лагранжа, имеющего вид

$$\int_{\mathring{\Omega}} \int_{-h/2}^{h/2} (J\sigma_{\alpha\beta}^{\xi}\delta\gamma_{\alpha\beta}^{\xi} + 2J\sigma_{\alpha 3}^{\xi}\delta\gamma_{\alpha 3}^{\xi} + J\gamma_{33}^{\xi}\delta\gamma_{33}^{\xi}) d\xi d\mathring{\Omega} =$$

$$= \int_\Omega (q_n^+ \delta w^{h/2} - q_n^- \delta w^{-h/2}) d\Omega. \qquad (6)$$

Здесь по повторяющимся в одночлене греческим индексам следует суммировать от 1-го до 2-х.

Заменяя в уравнении (6) компоненты тензора Пиолы-Кирхгофа компонентами тензора Грина-Лагранжа при помощи соотношений (3) и записывая компоненты последнего тензора через соотношения (2) в сочетании с интегрированием по частям, полевые уравнения типа Кармана-Тимошенко-Нагди можно записать в виде

$$D\Delta^2 w = q_n - (h_\omega^2 - h_\lambda^2)\Delta q_n + (I - h_\omega^2 \Delta) L(\Phi, w), \qquad (7)_1$$

$$\frac{1}{Eh}\Delta^2 \Phi = \frac{\nu}{Eh}\Delta m_n - \frac{1}{2}L(w, w), \qquad (7)_2$$

$$\omega_{\alpha,\alpha} = -\frac{1}{\mu h}(q_n + L(\Phi, w)). \qquad (7)_3$$

Здесь I — тождественный оператор, Δ— оператор Лапласа,

$$L(\Phi, w) = \Phi_{,11} w_{,22} - 2\Phi_{,12} w_{,12} + \Phi_{,22} w_{,11},$$

$$h_\omega^2 = \frac{h^2}{6(1-\nu)},\ h_\lambda^2 = \frac{\nu h^2}{8(1-\nu)},\ q_n = q_n^+ - q_n^-,\ m_n = \frac{h}{2}(q_n^+ + q_n^-).$$

Применим уравнения типа Кармана-Тимошенко-Нагди к решению задачи о расчете напряженно-деформированного состояния круглой нормально нагруженной жестко защемленной пластины. Постановка задачи следующая. Пусть имеется круглая пластина радиуса R, толщиной h, жёстко закреплённая по контуру таким образом, что реализуется осесимметричный изгиб. Пластина испытывает действие равномерной нормальной нагрузки интенсивности $q_n = \mathrm{const}$. Получим уравнения, описывающие напряженно-деформированное состояние этой пластины.

Переходя к полярным координатам и учитывая осесимметричность задачи, оператор Лапласа и операторы $L(w, w)$, $L(\Phi, w)$ (см. (7)) можно записать в виде

$$L(\Phi, w) = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(\frac{d\Phi}{dr}\frac{dw}{dr}),\ L(w, w) = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(\frac{dw}{dr})^2,$$

$$\Delta = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\frac{d}{dr}),\ \omega_{\alpha,\alpha} = \omega_{r,r} + \frac{1}{r}\omega_r = \frac{1}{r}\frac{d(r\omega_r)}{dr}. \qquad (8)$$

Вводя переменную $\rho = r/R$, где уже $\rho \in [0,1]$, перейдем в системе уравнений (7) к безразмерным величинам. В результате получаем, что система уравнений (7) принимает вид

$$\Delta^2 w = \frac{1}{D}[R^4 q_n - (h_\omega^2 - h_\lambda^2)R^2\Delta q_n + (I - \frac{h_\omega^2}{R^2}\Delta)L(\Phi, w)],$$

$$\Delta^2\Phi = \nu R^2\Delta m_n - \frac{1}{2}EhL(w,w),$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{d(\rho d\rho)}{d\rho} = -\frac{R}{\mu h}[q_n + \frac{1}{R^4}L(\Phi, w)]. \tag{9}$$

Граничные условия жёстко защемлённого тангенциально свободного края выражаются равенствами (см. [4])

$$w(1) = 0,\ -\frac{1}{R}w_{,\rho}(1) + \omega_\rho(1) = 0,$$

$$\Phi(1) = 0,\ \Phi_{,\rho}(1) = 0. \tag{10}$$

Для того чтобы решить краевую задачу (9)–(10) в некоторых работах (см., например, [5]) граничные условия (10) заменяли однородными, вводя дополнительное предположение вида "Будем рассматривать такие условия типа жесткого защемления, при которых можно считать, что $\omega_\rho(1) = 0$". После этого предположения граничные условия (10) становились однородными, уравнение $(9)_3$ нигде не использовалось, а поперечные сдвиги учитывались лишь наличием слагаемого h_ω^2 в уравнении $(9)_1$.

В данной статье покажем, как, не вводя дополнительное условие $\omega_\rho(1) = 0$, можно решить краевую задачу (9)–(10). Для этого сделаем замену

$$w = \widetilde{w} + R\bar{\omega}_\rho\rho^2\ln\rho, \tag{11}$$

где $\bar{\omega}_\rho = \omega_\rho(1)$.

Учитывая, что $\rho^2\ln\rho$ является фундаментальным решением бигармонического уравнения, систему (8) можно представить в виде

$$\Delta^2\widetilde{w} = \frac{1}{D}[R^4 q_n - (h_\omega^2 - h_\lambda^2)R^2\Delta q_n + (I - \frac{h_\omega^2}{R^2}\Delta)L(\Phi, \widetilde{w} + R\bar{\omega}_\rho\rho^2\ln\rho)],$$

$$\Delta^2\Phi = \nu R^2\Delta m_n - \frac{1}{2}EhL(\widetilde{w} + R\bar{\omega}_\rho\rho^2\ln\rho, \widetilde{w} + R\bar{\omega}_\rho\rho^2\ln\rho),$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{d(\rho\omega_\rho)}{d\rho} = -\frac{R}{\mu h}[q_n + \frac{1}{R^4}L(\Phi, \widetilde{w} + R\bar{\omega}_\rho\rho^2\ln\rho)]. \tag{12}$$

Граничные условия с учетом замены (11) принимают следующий вид:

$$\widetilde{w}(1) = 0,\ \widetilde{w}_{,\rho}(1) = 0,\ \Phi(1) = 0,\ \Phi_{,\rho}(1) = 0.$$

Заметим, что функции Грина для вычисления $\widetilde{w}$ и функции напряжений Φ совпадают и имеют вид

$$G(\rho,\xi) = G_w(\rho,\xi) = G_\Phi(\rho,\xi) = \frac{1}{4}\xi[(\xi^2+\rho^2)\ln\frac{\rho}{\xi} + (\xi^2-\rho^2)]H(\rho-\xi)+$$

$$+\frac{1}{8}\xi[2(\rho^2+\xi^2)\ln\xi + (1+\rho^2)(1-\xi^2)]. \qquad (13)$$

Здесь $H(\rho,\xi)$ – функция Хевисайда.

Учитывая, что функция ω_ρ находится одним интегрированием, и используя найденную функцию Грина, решение системы (12) записывается в виде следующих интегро-дифференциальных уравнений:

$$\widetilde{w}(\rho) = \frac{1}{D}\int_0^1 [R^4 q_n - R^2(h_\omega^2 - h_\lambda^2)\Delta q_n +$$

$$+(I - \frac{h_\omega^2}{R^2}\Delta)L(\Phi, \widetilde{w} + R\bar{\omega}_\rho \xi^2 \ln\xi)]G(\rho,\xi)d\xi,$$

$$\Phi(\rho) = \int_0^1 [\nu R^2 \Delta m_n - \frac{1}{2}EhL(\widetilde{w} + R\bar{\omega}_\rho\xi^2\ln\xi, \widetilde{w} + R\bar{\omega}_\rho\xi^2\ln\xi)]G(\rho,\xi)d\xi,$$

$$\bar{\omega}_\rho = -\frac{R}{\mu h}\int_0^1 \rho(q_n + \frac{1}{R^4}L(\Phi, \bar{w} + R\bar{\omega}_\rho\rho^2\ln\rho))d\rho. \qquad (14)$$

Заметим, что в последнем выражении вычисляется значение только в одной точке.

Теперь в системе (14) делаем обратную замену и получаем

$$w(\rho) = -R\bar{\omega}_\rho\rho^2\ln\rho + \frac{1}{D}\int_0^1 [R^4 q_n - R^2(h_\omega^2 - h_\lambda^2)\Delta q_n +$$

$$+(I - \frac{h_\omega^2}{R^2}\Delta)L(\Phi, w)]G(\rho,\xi)d\xi,$$

$$\Phi(\rho) = \int_0^1 [\nu R^2\Delta m_n - \frac{1}{2}EhL(w,w)]G(\rho,\xi)d\xi,$$

$$\bar{\omega}_\rho = -\frac{R}{\mu h}\int_0^1 \rho(q_n + \frac{1}{R^4}L(\Phi, w))d\rho. \qquad (15)$$

Решение системы (15) ищем на основе следующей итерационной схемы:

$$w_k = (1-\tau)w_{k-1}\underline{-\tau R\bar{\omega}_\rho^k \rho^2 \ln\rho} + \frac{\tau}{D}\int_0^1 [R^4 q_n - R^2(h_\omega^2 - h_\lambda^2)\Delta q_n +$$

$$+(I - \frac{h_\omega^2}{R^2}\Delta)L(\Phi_k, w_{k-1})]G(\rho,\xi)d\xi,\ \tau > 0, \tag{16}$$

где

$$\Phi_k = \int_0^1 [\nu R^2 \Delta m_n - \frac{1}{2}EhL(w_{k-1}, w_{k-1})]G(\rho,\xi)d\xi,$$

$$\bar{\omega}_\rho^k = -\frac{R}{\mu h}\int_0^1 \rho(q_n + \frac{1}{R^4}L(\Phi_k, w_{k-1}))d\rho,$$

$$w_0 = \frac{R^4}{D}\int_0^1 q_n G(\rho,\xi)d\xi. \tag{16'}$$

Итерационная схема (16) предложена для решения поставленной задачи в рамках теории типа Кармана-Тимошенко-Нагди. Для того чтобы получить решение задачи по традиционной теории Кармана, необходимо положить $h_\omega^2 = h_\lambda^2 = 0$ и не учитывать в схеме (16) подчеркнутое слагаемое. Если же требуется получить решение по теории типа Кармана-Нагди (учет только поперечного обжатия), то полагаем $h_\omega^2 = 0$ и также не учитываем в схеме (16) подчеркнутое слагаемое. И наконец для решения задачи по теории типа Кармана-Тимошенко (учет только поперечных сдвигов) требуется положить $h_\lambda^2 = 0$.

Используя итерационную схему (16), проводился численный эксперимент, который показал, что учёт трансверсальных деформаций при выбранных физических и геометрических параметрах пластины оказывается несущественным, т.е. прогибы и функции напряжений, вычисленные по теории Кармана и по уточнённым теориям, практически не отличаются друг от друга. Также получено, что в случае учета поперечных сдвигов подчеркнутое в схеме (16) слагаемое практически не сказывается на напряженно-деформированном состоянии пластины.

Литература

1. **Тимошенко С.П.** Курс теории упругости, ч.II. Стержни и пластинки. Петроград: Изд-во ин-та инж. путей сообщения, 1916. Изд. 2-е. Киев: Наукова думка, 1972. 507 с.

2. **Naghdi P.M.** On the theory of thin elastic shells // *Quarterly of Applied Mathematics. 1957. 14. №4. P. 369-380.*

3. **Черных К.Ф.** Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Л.: Машиностроение, 1986. 336 с.

4. **Михайловский Е.И., Бадокин К.В., Ермоленко А.В.** Теория изгиба пластин типа Кармана без гипотез Кирхгофа // *Вестник Сыктывкарск. ун-та. Сер.1: Мат. Мех. Инф. 1999. Вып.3. С. 181-202.*

5. **Михайловский Е.И.** Лекции по вариационным методам механики упругих тел: Учебн. пособие. Сыктывкар: Изд-во Сыктывкарского ун-та, 2002. 256 с.

Summary

Yermolenko A.V. The calculation of round plates with refined theories

The Karman-Timoshenko-Naghdi type equations are used for the calculation of round plates with rigid boundary. The problem is solved not using additional condition about transversal shears on boudary.

Сыктывкарский университет *Поступила 20.03.2006*