Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1. Вып.6. 2006

УДК 519.717

ПОМЕЧИВАНИЯ ДЕРЕВЬЕВ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА РАССТОЯНИЯ

П.А. Головач

Назначение вершинам графа G неотрицательных целых чисел называют $L(p_1, p_2, \ldots, p_k)$ - помечиванием (или раскраской), если для любых двух вершин, находящихся на расстоянии не превосходящем $i \leq k$, разница между назначенным им числами (метками) не менее p_i. Такие помечивания активно изучаются, поскольку они используются в моделях сетей телекоммуникаций. Главный результат заключается в том, что задача существования $L(p, 1, 1)$ - помечивания такого, что метки всех вершин не превосходят λ, оказывается NP-полной для деревьев.

1. Введение

В настоящей работе доказывается NP-полнота серии задач, связанных с помечиваниями графов специального вида. Подобные задачи интересны и с теоретической точки зрения, но особое внимание они привлекли в связи с их использованием при решении одной их задач назначения частот. Более подробно с задачами назначения частот можно познакомиться в обзоре [15]. Нас будет интересовать только одна из них. Задача состоит в том, чтобы назначить радиочастоты передатчикам, находящимся на некоторой территории, так, чтобы избежать помех, вызванных интерференцией. Как правило, частоты для передатчиков не выбираются произвольным образом из некоторого интервала, а берутся из конечного дискретного набора частот, элементы которого называют каналами. Соответственно, мы можем рассмотреть задачу назначения каналов. Для решения задачи удобно использовать модели, связанные с помечиваниями графов. Вершины графов соответствуют передатчикам, а рёбра — ближайшим передатчикам. Каналы обозначаются неотрицательными целыми числами и соответствуют меткам.

Необходимо назначить метки вершинам так, чтобы вершины, находящиеся на определённом расстоянии, имели бы метки, различающиеся на заданную величину.

Более точно, для данных целочисленных параметров $p_1, \ldots, p_k$, называемых ограничениями на расстояния, $L(p_1, p_2, \ldots, p_k)$ - помечивание графа G это назначение неотрицательных целых чисел вершинам так, чтобы любые две вершины, находящиеся на расстоянии не превосходящем $i \le k$, получили бы метки, различающиеся по крайней мере на величину p_i.

Для таких помечиваний можно рассматривать различные задачи, но, пожалуй, наиболее интересна задача минимизации ширины диапазона, т.е разности между максимальной и минимальной метками. Минимальная ширина диапазона графа обозначается через $\lambda_{p_1,\ldots,p_k}(G)$.

Очевидно, что $L(1)$ - помечивания это обычные раскраски графов, а $L(1, 1, \ldots, 1)$ - помечивания это раскраски степеней графов. Поэтому более интересны случаи нееденичных ограничений на расстояния. Наиболее изучен первый "нехроматический" случай $L(2, 1)$ - помечиваний. Именно для такого случая было введено понятие $L(p_1, p_2, \ldots, p_k)$ - помечиваний графа (см. [11]). С некоторыми известными результатами и различными вариантами помечиваний можно ознакомиться в обзоре [3]. Мы же упомянем только те результаты, которые имеют непосредственное отношение к настоящей работе.

Известно (см. [7]), что задача о том, верно ли, что $\lambda_{2,1}(G) \le \lambda$, является NP-полной для всякого $\lambda \ge 4$. В [11] было высказано предположение, что задача вычисления $\lambda_{2,1}(G)$ является NP-трудной для деревьев, но, что было довольно неожиданно, оказалось, что она полиномиально разрешима (см. [4]). Несколько более общая версия полиномиального алгоритма для $L(p, 1)$ - помечиваний приводится в [8]. Как правило, задачи полиномиально разрешимые для деревьев оказываются полиномиально разрешимыми для и для графов с ограниченной древесной шириной. Однако в [6] Было показано, что задача вычисления $\lambda_{2,1}(G)$ является NP-трудной уже для графов, имеющих древесную ширину 2.

Помечивания для $k \ge 3$ изучены весьма слабо. Некоторые результаты можно найти в [2, 12, 13]. В [5] показано, что задача о том, верно ли, что $\lambda_{2,1,1}(G) \le \lambda$, полиномиально разрешима для $\lambda \le 4$ и NP-полна для всякого $\lambda \ge 5$. Кроме того, в этой работе были даны некоторые оценки $\lambda_{p_1,p_2,p_3}(G)$ для деревьев и приведён алгоритм, позволяющий строить помечивания деревьев, являющиеся близкими к оптимальным.

В настоящей работе мы продолжаем изучение $L(p_1, p_2, \ldots, p_k)$ - помечиваний при $k = 3$, начатое в [5]. Доказано, что задача вычисления

$\lambda_{p,1,1}(G)$ является NP-трудной даже для деревьев (отметим, что параметр p здесь является частью входа).

Наряду с $L(p_1, p_2, \dots, p_k)$ - помечиваниями в работе рассматриваются их обобщения. Понятие $H(p_1, p_2, \dots, p_k)$ - помечивания графа было введено в [10]. Такие помечивания отличаются от $L(p_1, p_2, \dots, p_k)$ - помечиваний тем, что в качестве пространства возможных меток используется не пространство целых чисел, а множество вершин некоторого графа H. Соответственно, расстоянием между метками является не модуль их разности, а расстояние между вершинами графа H. Некоторые вопросы сложности задач такого помечивания рассматривались в [5]. В [6] показано, что задача о существовании $H(p, 1)$ - помечиваний деревьев является полиномиально разрешимой. Для графов же имеющих путевую ширину 2 задача становится NP-полной.

В данной работе доказано, что задача о существовании $H(p, 1, 1)$ - помечивании деревьев является NP-полной для любого фиксированного $p \geq 2$.

Работа организована следующим образом. Во второй части работы вводятся основные понятия и обозначения, а также формулируются основные результаты. Поскольку доказательства NP-полноты громоздки, то они вынесены в отдельные части. В заключение описываются возможные обобщения полученных результатов, а также формулируются некоторые открытые задачи.

2. Сложность задач помечивания деревьев

Мы начнём с того, что введём понятия и обозначения, которые будут использованы в работе.

Пусть G — граф. Отметим, что все рассматриваемые в данной работе графы считаются простыми и неориентированными. Через $V(G)$ обозначается множество вершин графа G, а через $E(G)$ — множество рёбер.

Пусть u и v — вершины графа G. Через $dist_G(u, v)$ обозначается расстояние между этими вершинами в графе, т.е. число рёбер в кратчайшем пути, соединяющем u и v.

Напомним, что степенью вершины графа называют число смежных ей вершин.

Напомним также, что деревом называют связный граф без циклов. Листья это вершины дерева степени 1. Звездой называют дерево изоморфное полному двудольному графу $K_{1,n}$, $n \geq 1$, т.е. дерево с n листьями и ещё одной вершиной степени n. Вершину степени n мы будем называть центральной вершиной древа.

Определим теперь помечивания графов, рассмативаемые в работе.

Пусть G, H — графы, $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — положительные целые числа, $p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_k$. $H(p_1, p_2, \ldots, p_k)$ - помечиванием или раскраской графа G называют функцию $f\colon V(G) \to V(H)$ такую, что для любых вершин u, v графа G $dist_H(f(u), f(v)) \geq p_i$, если $dist_G(u, v) \leq i$, при $i = 1, 2, \ldots, k$.

Важным частным случаем таких помечиваний является случай, когда граф H является путём. Соответственно, $L(p_1, p_2, \ldots, p_k)$ - помечиванием или раскраской графа G называют функцию $f\colon V(G) \to \{0, 1, \ldots, \lambda\}$, где λ — неотрицательное целое число, такую, что для любых вершин u, v графа G $|f(u) - f(v)| \geq p_i$, если $dist_G(u, v) \leq i$, при $i = 1, 2, \ldots, k$. Минимальное λ, для которого существует $L(p_1, p_2, \ldots, p_k)$ - помечивание графа G, будет обозначаться $\lambda_{p_1, p_2, \ldots, p_k}(G)$.

Мы будем рассматривать помечивания для $k = 3$.

Сформулируем теперь основные результаты.

Теорема 1. *Следующая задача является NP-полной для любого целого числа $p \geq 2$:*

УСЛОВИЕ: Даны дерево T и граф H.
ВОПРОС: Существует ли $H(p, 1, 1)$ - помечивание T?

Доказательство этой теоремы приводится в 3 части.

Отметим, что в случае $H(1, 1, 1)$ - помечиваний рассматриваемая задача может быть решена для деревьев полиномиально, поскольку она равносильна задаче о существовании $|V(H)|$ - раскраски T^3, а степени деревьев являются хордальными графами (см. [14]). Через G^k обозначается граф с тем же множеством вершин, что и G, две вершины u и v которого являются смежными, если $dist_G(u, v) \leq k$.

Для $L(p, 1, 1)$ - помечиваний удалось получить менее сильный результат. Если задача о существовании $H(p, 1, 1)$ - помечиваний NP-полна для любых фиксированных $p \geq 2$, то для $L(p, 1, 1)$ - помечиваний удаётся получить аналогичный результат для случая, когда параметр p является частью входа. Для фиксированных p вопрос о сложности задачи остаётся открытым.

Теорема 2. *Следующая задача является NP-полной:*

УСЛОВИЕ: Дано дерево T, положительное целое число p и неотрицательное целое число λ.
ВОПРОС: Верно ли, что $\lambda_{p,1,1}(T) \leq \lambda$?

Доказательство данного утверждения приводится в 4 части.

3. Доказательство теоремы 1

Принадлежность задачи классу NP очевидна.

Пусть G — граф. Напомним, что множество вершин $U \subset V(G)$ называют независимым, если никакие две вершины $u, v \in U$ не являются смежными. Множество $U \subset V(G)$ называют кликой, если любые две вершины $u, v \in U$ являются смежными. Дополнение графа G это граф с множеством вершин $V(G)$, две вершины которого являются смежными тогда и только тогда, когда они не смежны в G.

Рассмотрим задачу Независимое множество, которая формулируется следующим образом:

УСЛОВИЕ: Даны граф G и положительное целое число k.
ВОПРОС: Существует ли в G независимое множество U, для которого $|U| \geq k$?

Хорошо известно (см. [1]), что эта задача является NP-полной в случае d - однородных графов, т.е. графов, каждая вершина которых имеет степень d, для любого $d \geq 3$.

Рассмотрим теперь задачу Клика:

УСЛОВИЕ: Даны граф G и положительное целое число k.
ВОПРОС: Существует ли в G клика U, для которой $|U| \geq k$?

Поскольку независимое множество $U \subset V(G)$ является кликой в дополнении графа, то задача Клика NP-полна для $n-3$ - однородных графов, где n — число вершин графа.

Построим преобразование задачи Клика для $n-3$ - однородных графов к задаче, рассматриваемой в теореме. Мы будем считать, что не умаляет общности, что $k > 4$.

Построим дерево T_k. Для этого рассмотрим k экземпляров звезды $K_{1,3}$ с центральными вершинами $v_1, v_2, \dots, v_k$. Затем соединим эти вершины рёбрами ещё с одной вершиной u.

Пусть G — $n-3$ - однородный граф с n вершинами, $n \geq k$. Введём в рассмотрение граф H.

Предположим вначале, что $p = 2$. В этом случае граф H получается из графа G добавлением изолированной вершины z.

Докажем, что $H(p,1,1)$ - помечивание T существует тогда и только тогда, когда в G существует клика мощности k.

Предположим, что $f\colon V(T) \to V(H)$ является $H(p,1,1)$ - помечиванием T. Вершина $f(u)$ не может быть смежна вершинам $f(v_i)$ при $i = 1, 2, \dots, k$ в графе H. Так как $k > 4$, и для любой вершины $x \in V(H)$,

$x \neq z$, число несмежных вершин равно 4, то $f(u) = z$. Из этого вытекает, что $f(v_i) \in V(G)$ при $i = 1, 2, \ldots, k$. Пусть $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, $i \neq j$. Поскольку $dist_T(v_i, v_j) = 2$, то $f(v_i) \neq f(v_j)$. Обозначим через x_1, x_2, x_3 листья T смежные вершине v_i. Из того, что $dist_(x_s, x_t) = dist(x_s, u) = 2$ при $s, t = 1, 2, 3$, $s \neq t$, следует, что $f(x_1), f(x_2), f(x_3)$ являются попарно различными вершинами G несмежными $f(v_i)$. Так как $dist_T(x_s, v_j) = 3$ при $s = 1, 2, 3$, то $f(v_j) \neq f(x_t)$. В силу того, что в графе G существуют ровно 3 вершины, не являющиеся смежными вершине $f(v_i)$, вершины $f(v_i)$ и $f(v_j)$ будут смежными. Следовательно, множество $U = \{f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_k)\}$ является кликой в G.

Допустим теперь, что множество $U = \{w_1, w_2, \ldots, w_k\}$ является кликой в графе G. Укажем помечивание f. Положим $f(u) = z$, а $f(v_i) = w_i$ при $i = 1, 2, \ldots, k$. Рассмотрим по очереди вершины v_i при $i = 1, 2, \ldots, k$. Пусть x_1, x_2, x_3 — листья T, смежные вершине v_i. В графе G существуют ровно 3 вершины y_1, y_2, y_3, не являющиеся смежными вершине w_i. Заметим, что $y_1, y_2, y_3 \notin U$. Положим $f(x_j) = y_j$ при $j = 1, 2, 3$. Легко видеть, что f является $H(p, 1, 1)$ - помечиванием T.

В случае $p > 2$ рассуждения аналогичны. Поэтому мы ограничимся описанием построения графа H.

Построим подразбиение графа G заменив каждое ребро G путём длины $2\lceil \frac{p}{2} \rceil - 2$. Обозначим через $x_1, x_2, \ldots, x_m$ центральные вершины этих путей. Добавим к графу две вершины y и z, которые соединяются путём длины $\lfloor \frac{p}{2} \rfloor$. Затем вершина y соединяется рёбрами с вершинами $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Если p является нечётным, то, кроме того, вершины $x_1, x_2, \ldots, x_m$ попарно соединяются рёбрами.

В заключение доказательства заметим, что очевидным образом построение дерева T и графа H может быть выполнено полиномиальным алгоритмом.

4. Доказательство теоремы 2

Принадлежность задачи классу NP очевидна.

Построим преобразование NP-полной задачи к данной. Для удобства мы сначала рассмотрим вспомогательную задачу списочного помечивания специального вида.

Пусть G — граф. Пусть, кроме того, для каждой вершины $v \in V(G)$ задано множество (список возможных меток) $S(v) \subset \{1, 2, \ldots, \lambda\}$. Помечивание $f \colon V(G) \to \{0, 1, \ldots, \lambda\}$ графа G называют списочным, если $f(v) \in S(v)$ для всех $v \in V(G)$.

Пусть p, λ, s, t — положительные целые числа, $2 \leq p$, $5p + t - 3 \leq \lambda$. Построим дерево $T_{s,t}$ и списки возможных меток вершин. Зададим вершины $u_1, u_2, \ldots, u_s, v_1, v_2, \ldots, v_t, w$. Соединим вершину w рёбрами с вершинами $u_1, u_2, \ldots, u_s$, а затем соединим её с вершинами $v_1, v_2, \ldots, v_t$ путями длины 2. Будем считать, что $S(x)$ имеет вид $\{i_1, i_2, \ldots, i_r\} \cup \{\lambda - i_1, \lambda - i_2, \ldots, \lambda - i_r\}$, где $\{i_1, i_2, \ldots, i_r\} \subset \{1, 2, \ldots, p-1\}$, при $x \in \{u_1, u_2, \ldots, u_s, v_1, v_2, \ldots, v_t\}$, а для всех остальных вершин $y \in V(T)$ положим $S(y) = \{0, 1, \ldots, \lambda\}$.

Лемма 1. *Задача о существовании списочного $L(p,1,1)$ - помечивания дерева $T_{s,t}$ является NP-полной.*

Доказательство. Легко видеть, что эта задача входит в класс NP.

Построим преобразование NP-полной задачи 3-Выполнимость (см. [1]) к рассматриваемой нами задаче. Напомним, что задача 3-Выполнимость формулируется следующим образом:

УСЛОВИЕ: Даны булевы переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и булево выражение в конъюнктивной нормальной форме
$C = C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_m$, где $C_1, C_2, \ldots, C_m$ — элементарные дизъюнкции, каждая из которых содержит ровно 3 литерала.
ВОПРОС: Выполнимо ли C?

Положим $p = 2n+1$, $s = 3n$, $t = m$, а $\lambda = 10n+m+2$. Пусть $S(u_{3i-2}) = S(u_{3i-1}) = S(u_{3i}) = \{2i-1, 2i, \lambda-2i+1, \lambda-2i\}$ при $i = 1, 2, \ldots, n$. Построим множества $S(v_j)$ при $j = 1, 2, \ldots, m$ включив в $S(v_j)$ числа $2i-1, \lambda-2i+1$, если элементарная дизъюнкция C_j содержит литерал x_i, и числа $2i, \lambda-2i$, если C_j содержит литерал $\overline{x_i}$ для $i = 1, 2, \ldots, n$.

Предположим, что переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ имеют значения, для которых выражение $C = true$. Построим списочное $L(p,1,1)$ - помечивание f дерева $T_{s,t}$. Положим $f(u_{3i-2}) = 2i-1, f(u_{3i-2}) = 2i$, а $f(u_{3i}) = \lambda - 2i + 1$, если $x_i = false$, и $f(u_{3i}) = \lambda - 2i$, если $x_i = true$, при $i = 1, 2, \ldots, n$. Для $j = 1, 2, \ldots, m$ каждая из дизъюнкций C_j содержит некоторый литерал $z = true$. Если $z = x_i$, то положим $f(v_j) = \lambda - 2i + 1$. Если же $z = \overline{x_i}$, то $f(v_j) = \lambda - 2i$. Кроме того, положим $f(w) = 2p-1$, а оставшиеся m вершин дерева $T_{s,t}$ пометим различными числами из множества $\{3p-1, 3p, \ldots, 3p+m-2\}$. Легко видеть, что f обладает нужными свойствами.

Допустим теперь, что f является $L(p,1,1)$ - помечиванием $T_{s,t}$. Для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ положим $x_i = false$, если $2i-1, \lambda - 2i + 1 \in \{f(u_{3i-2}), f(u_{3i-1}), f(u_{3i})\}$, и $x_i = true$, если $2i, \lambda - 2i \in \{f(u_{3i-2}), f(u_{3i-1}), f(u_{3i})\}$. Рассмотрим $f(v_j)$ при $j = 1, 2, \ldots, m$. Ясно, что $f(v_j) \neq f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_s)$. Следовательно, если $f(u_j) = 2i-1$ или $f(u_j) = \lambda - 2i + 1$ для некоторого $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, то элементарная дизъюнкция C_j содержит литерал $x_i = true$. Аналогично, $f(u_j) = 2i$ или $f(u_j) = \lambda - 2i$, то элементарная дизъюнкция C_j содержит литерал $\overline{x_i}$ и $x_i = false$.

Очевидно, что описанное построение $T_{s,t}$ и списков возможных меток может быть осуществлено полиномиальным алгоритмом.

Отметим, что мы доказали NP-полноту задачи для случая, когда числовые параметры $p, \lambda = O(|V(T_{s,t})|)$. Заметим также, что задача является NP-полной для любого $\lambda \geq 5p + t - 3$.

Преобразуем теперь задачу списочного помечивания к задаче обычного $L(p, 1, 1)$ - помечивания. Для этого сконструируем деревья, выделенные вершины которых будут в любых помечиваниях иметь метки из множеств вида $\{i_1, i_2, \ldots, i_r\} \cup \{\lambda - i_1, \lambda - i_2, \ldots, \lambda - i_r\}$.

Пусть $2 \leq p$, $2p \leq \lambda$. Построим последовательно деревья, которые будут обозначены через T, H и F.

Рассмотрим звезду $K_{1,\lambda-p}$ с центральной вершиной x. Добавим ещё одну вершину y и соединим её с x путём длины 2. Обозначим получившееся дерево через T. Вершину y мы будем называть корнем T.

Выделим некоторые очевидные свойства $L(p, 1, 1)$ - помечиваний таких деревьев в отдельную лемму.

Лемма 2. *Для дерева T найдётся $L(p, 1, 1)$ - помечивание, и для каждого такого помечивания f либо $f(x) = 0$ и $f(y) \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$, либо $f(x) = \lambda$ и $f(y) \in \{\lambda - p + 1, \lambda - p + 2, \ldots, \lambda - 1\}$.*

Построим теперь дерево H. Для этого рассмотрим p звёзд $K_{1,\lambda-p}$, $K_{1,\lambda-p-1}, \ldots, K_{\lambda-2p+1}$ с центральными вершинами $x_0, x_1, \ldots, x_{p-1}$ соответственно. Затем мы добавим ещё одну вершину y, которую соединим с $x_0, x_1, \ldots, x_{p-1}$ рёбрами. Из предыдущей леммы и определения $L(p, 1, 1)$ - помечиваний сразу следует следующее утверждение.

Лемма 3. *Для дерева H найдётся L(p,1,1) - помечивание, и для каждого такого помечивания f либо $f(x_i) = i$ при всех $i = 0, 1, \ldots, p-1$, либо $f(x_i) = \lambda - i$ при всех $i = 0, 1, \ldots, p - 1$.*

Обозначим через H_k дерево H с корневой вершиной, являющейся листом H смежным вершине x_k, при $k = \{1, 2, \ldots, p - 1\}$. Вершину y мы назовём центральной вершиной.

Пусть $S \subset \{1, 2, \ldots, p-1\}$, а $\{i_1, i_2, \ldots, i_r\} = \{1, 2, \ldots, p-1\} \setminus S$. Построим деревья $H_{i_1}, H_{i_2}, \ldots, H_{i_r}$, корни которых мы объединим в одну вершину u. Затем рассмотрим дерево T с корнем v, который соединим с u ребром. Обозначим получившееся дерево через $F(S)$. Назовём вершину v корнем F.

Лемма 4. *Пусть $i \in \{0, 1, \ldots, \lambda\}$. Для дерева $F(S)$ найдётся $L(p, 1, 1)$ - помечивание f, для которого $f(v) = i$, тогда и только тогда, когда либо $i \in S$, либо $\lambda - i \in S$.*

Доказательство. Это утверждение сразу следует из лемм 3 и 4, а также следующего замечания. Рассмотрим дерево H_k, к которому добавлена вершина w, соединённая с корнем ребром. Тогда для любого $L(p, 1, 1)$ - помечивания f этого дерева $|f(w) - k| \leq p - 1$.

Перейдём теперь непосредственно к преобразованию задачи списочного $L(p, 1, 1)$ - помечивания дерева $T_{s,t}$.

Пусть p, λ, s, t — положительные целые числа, $2 \leq p$, $\lambda = 5p + 2s + 3t - 1$, $S(u_1), S(u_2), \ldots, S(u_s)$ — списки возможных меток вершин $u_1, u_2, \ldots, u_s$, а $S(v_1), S(v_2), \ldots, S(v_t)$ — списки возможных меток вершин $v_1, v_2, \ldots, v_t$. Положим $S_i = S(u_i) \cap \{1, 2, \ldots, p-1\}$ при $i = 1, 2, \ldots, s$, а $S'_j = S(v_j) \cap \{1, 2, \ldots, p-1\}$ при $j = 1, 2, \ldots, t$. Построим деревья $F(S_i)$, корни которых совпадают с вершинами u_i дерева $T_{s,t}$, при $i = 1, 2, \ldots, s$, а также деревья $F(S'_j)$, корни которых совпадают с вершинами v_j, при $j = 1, 2, \ldots, t$. Обозначим полученное дерево через R.

Докажем, что списочное $L(p, 1, 1)$ - помечивание дерева $T_{s,t}$ существует тогда и только тогда, когда существует $L(p, 1, 1)$ - помечивание R.

Пусть f является списочным $L(p, 1, 1)$ - помечиванием дерева $T_{s,t}$. Построим $L(p, 1, 1)$ - помечивание R. Положим $g(u_i) = f(u_i)$ при $i = 1, 2, \ldots, s$, $g(v_j) = f(v_j)$ при $j = 1, 2, \ldots, t$. Для вершины w дерева $T_{s,t}$ $g(w) = 2p - 1$. Оставшиеся t вершин дерева $T_{s,t}$ пометим различными числами из множества $\{3p - 1, 3p, \ldots, 3p + t - 2\}$. Опишем помечивание деревьев F. Вершины этих деревьев, смежные вершинам $T_{s,t}$ (в каждом дереве их 2), помечаются различными числами из множества $3p + t - 1, 3p + t, \ldots, 3p + 3t + 2s - 2\}$. Центральные вершины деревьев H получают метку 0 или λ. Помечивание остальных вершин строится однозначно.

Если f является $L(p, 1, 1)$ - помечиванием дерева R, то из леммы 4 сразу следует, что сужение f на множество вершин $T_{s,t}$ будет списочным помечиванием дерева $T_{s,t}$.

5. Заключение

Отметим, что хотя все результаты получены для помечиваний с тремя ограничениями на расстояния, но они обобщаются на случай $k \geq 3$ ограничений.

Таким образом, следующая задача является NP-полной для любых целых $k \geq 3$ и $p \geq 2$:

УСЛОВИЕ: Даны дерево T и граф H.
ВОПРОС: Существует ли $H(p,1,1,\dots,1)$ - помечивание T, где в списке параметров $k-1$ единиц?

Следующая задача также является NP-полной для любого $k \geq 3$:

УСЛОВИЕ: Дано дерево T, положительное целое число p и неотрицательное целое число λ.
ВОПРОС: Верно ли, что $\lambda_{p,1,1,\dots,1}(T) \leq \lambda$, где в списке параметров $k-1$ единиц?

Обсудим в заключение одну нерешённую задачу. Как уже было отмечено выше, вычисление $\lambda_{p,1,1}(T)$ для деревьев является NP-трудной задачей в случае, если параметр p включён во вход. Вопрос о сложности вычисления $\lambda_{p,1,1}(T)$ для фиксированных $p \geq 2$ остаётся открытым. В [5] показано, что для любых целых p_1, p_2, p_3, $p_1 \geq p_2 \geq p_3 \geq 1$ выполнено неравенство:

$$p_3(\chi(T^3)-1) \leq \lambda_{p_1,p_2,p_3}(T) \leq p_2\chi(T^3) + p_1 + \max\{p_1-p_2, p_3\} - 3,$$

где $\chi(G)$ это хроматическое число графа G. Отсюда следует, что

$$\chi(T^3) - 1 \leq \lambda_{p,1,1}(T) \leq \chi(T^3) + 2p - 4$$

при $p \geq 2$. Для $p = 2$ верхняя и нижняя границы отличаются на единицу. Однако даже для такого p не ясно, как можно (и можно ли) вычислить $\lambda_{2,1,1}(T)$ с помощью полиномиального алгоритма.

Литература

1. **Гэри М., Джонсон Д.** Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.

2. **Bertossi A.A., Pinotti M.G., Rizzi R.** Channel assignment on strongly simplicial graphs // *In: Internetional parallel and distributed processing symposium, 17th IPDPS '03, Nice. IEEE Computer society. V.222. 2003.*

3. **Broersma H.J.** A general framework for coloring problems: old results, new results, and open problems. Memorandum №1704. Department of applied mathematics, Faculty of EEMCS, University of Twente, the Netherlands, 2003.

4. **Chang G.J., Kuo D.** The $L(2,1)$-labeling problem on graphs // *SIAM J. Disk. Math. 1965. V.9. P. 309-316.*

5. **Fiala J., Golovach P.A., Kratochvil J.** Elegant Distant constrained labelings of graphs of bounded treewidth // *In: Graph Theoretic Concepts in Computer Science, WG'04. Lecture Notes in Comp. Sci. 2005. V.3553.*

6. **Fiala J., Golovach P.A., Kratochvil J.** Distant constrained labelings of graphs of bounded treewidth // *In: 32nd Internationa Colloquium on Automata, Languages and Programming, ICALP 2005. Lecture Notes in Comp. Sci. 2005. V.3580. P. 360-372.*

7. **Fiala J., Kloks T., Kratochvil J.** Fixed-parameter complexity of λ-coloring // *In: Graph Theoretic Concepts in Computer Science, WG'99. Lecture Notes in Comp. Sci. 1999. V.1665. P. 350-363.*

8. **Fiala J., Kratochvil J. Proskurowski A.** Distance constrained labeling of precoloring trees // *In: Theoretical Computer Science. 7th ICTCS 2001. Lecture Notes in Comp. Sci. 2001. V.2202. P. 285-292.*

9. **Fiala J., Kratochvil J.** Complexity of partial covers of graphs // *In: Algorithms and compupation. ISAAC 2001. Lecture Notes in Comp. Sci. 2001. V.2223. P. 537-549.*

10. **Fiala J., Kratochvil J.** Partial covers of graphs // *Discussiones Mathematicae Graph Theory. 2002. V.22. P. 89-99.*

11. **Griggs J.R., Yeh R.K.** Labelling graphs with a condition at distance 2 // *SIAM J. Disk. Math. 1992. V.5. P. 586-595.*

12. **Van den Heuvel J., Leese R.A., Shepherd M.A.** Graph labeling and radio channel assignment // *Journal of Graph Theory. 1998. V.29. №4. P. 263-283.*

13. **Leese R.A.** Radio spectrum: a raw material for the telecommunications industry // *In: 10th Conference of the European Consortium for Mathematics in Industry. Goteborg. 1998.*

14. **Lin Y-L., Skiena S.** Algorithms for square roots of graphs // *SIAM J. Discrete Mathematics. 1995. V.8. №1. P. 99-118.*

15. **Murphey R.A., Pardalos P.M., Resende M.G.** Frequency assignment problems. AT&T Labs Research Technical Report: 98.16.1. 1998.

Summary

Golovach P.A. Distance constrained labelings of trees

An assignment of nonnegative integers to the vertices of a graph G is $L(p_1, p_2, \ldots, p_k)$ - labeling (or coloring) if for every two vertices at distance at most $i \leq k$, the difference of the integers (labels) assigned to them is at least p_i. An interest to such labelings is motivated by their usage in models of telecommunication networks. We prove that the existence problem of $L(p, 1, 1)$ - labeling with labels, that are at most λ, is NP-complete for trees.

Сыктывкарский университет *Поступила 4.02.2006*