Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1. Вып.6. 2006

УДК 519.217

О НЕКОТОРЫХ ЭРГОДИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ОДНОРОДНОЙ МАРКОВСКОЙ ЦЕПИ С НЕПРЕРЫВНЫМ ПАРАМЕТРОМ

Е.В. Воробьева

Для произвольной Марковской цепи с конечным числом состояний доказано, что вектор финальных вероятностей ортогонален столбцам генератора. В случае дискретного пространства состояний найдено явное выражение финальных вероятностей через резольвенту генератора.

Одной из основных задач в изучении поведения цепей Маркова является исследование их асимптотического поведения. Для цепей с дискретным параметром известна система линейных (алгебраических) уравнений, задающая финальные вероятности через элементы матрицы переходных вероятностей. Для цепей с непрерывным параметром аналогичная формула проводится в работе А.В. Булинского и А.Н. Ширяева [2], но здесь будет приведено оригинальное доказательство, не опирающееся на свойства траекторий цепи.

Однородная Марковская цепь с непрерывным параметром однозначно задается своим генератором $Q = (q_{ij})$. Известно, что переходные вероятности находятся как решения системы дифференциальных уравнений $P'(t) = QP(t)$ или $P'(t) = P(t)Q$ $(P(0) = I)$. Доказано [3], что если цепь неприводима (см [4]), то существует $\lim\limits_{t\to\infty} p_{ij}(t) = p_j$, не зависящий от i; в случае приводимой цепи разумно рассматривать ее как совокупность двух или более неприводимых подцепей. Обозначим через $\tilde{P} = (\tilde{p}_{ij})$ матрицу финальных вероятностей, где $\tilde{p}_{ij} = p_j$. Из свойств матрицы Q следует, что одно из ее собственных значений будет 0, и соответствующий ему элемент решения и будет матрицей предельных вероятностей. Докажем следующее утверждение.

Теорема 1. *Матрица Q, являющаяся генератором однородной, неприводимой Марковской цепи, имеет собственное значение $\lambda = 0$ кратности 1.*

Доказательство. Пусть $\lambda = 0$ имеет кратность 2, тогда первые два слагаемых решения системы дифференциальных уравнений имеют вид $c_1 + c_2 te^{0t} = c_1 + c_2 t$, а это значит, что $(c_1 + c_2 t)\underset{t\to\infty}{\longrightarrow}\infty$, следовательно не существует p_j. Получили противоречие. Следовательно, $\lambda = 0$ имеет кратность 1. ■

Это утверждение позволяет доказать следующую теорему, результат которой демонстрирует линейную зависимость финальных вероятностей и коэффициентов матрицы Q.

Теорема 2. *Вектор финальных вероятностей $\mathbf{p} = (p_j)$ ортогонален всем столбцам матрицы Q.*

Доказательство. 1. Построим преобразование подобия A такое, что

$$A^{-1}QA = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & Q_1 & \\ 0 & & \end{pmatrix}. \tag{1}$$

На самом деле это преобразование можно рассматривать как неполную диагонализацию, именно на данном этапе мы используем результат теоремы 1. Домножая обе части дифференциального уравнения слева на A^{-1} и справа на A, получаем

$$A^{-1}P'(t)A = A^{-1}QAA^{-1}P(t)A,$$

или

$$(A^{-1}P(t)A)' = A^{-1}QAA^{-1}P(t)A.$$

Подставляя (1), получаем

$$A^{-1}P(t)A)' = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & Q_1 & \\ 0 & & \end{pmatrix} A^{-1}P(t)A. \tag{2}$$

Решение этого уравнения находится в виде

$$A^{-1}P(t)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} + \sum_k B_k e^{\lambda_k t}, \tag{3}$$

где

$$B_k = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \tilde{B}_k & \\ 0 & & \end{pmatrix}, \quad \sum_k B_k = I. \tag{4}$$

Первый элемент суммы и условие, накладываемое на сумму $\tilde{B}_k$, непосредственно следует из начального условия $P(0) = I$. Таким образом, получаем, что матрица финальных вероятностей, то есть часть решения, не зависящая от времени, имеет вид

$$\tilde{P} = A \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} A^{-1}. \tag{5}$$

2. Найдем условия, которым должны удовлетворять элементы матрицы A. Для этого рассмотрим пару вспомогательных уравнений

$$QA = IQA = AA^{-1}QA = A \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & Q_1 & \\ 0 & & \end{pmatrix},$$

$$A^{-1}Q = A^{-1}QI = A^{-1}QAA^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & Q_1 & \\ 0 & & \end{pmatrix} A^{-1}.$$

Выпишем из них систему двух очевидных условий

$$\begin{cases} \sum\limits_k \left(\sum\limits_j \delta_{ij} q_{jk} \right) a_{k1} = 0 \\ \sum\limits_k \left(\sum\limits_j a_{1j}^{-1} q_{jk} \right) \delta_{km} = 0 \end{cases}$$

и определим по ним вид A.

$$\sum_k \left(\sum_j \delta_{ij} q_{jk} \right) a_{k1} = 0,$$

таким образом, получаем, что

$$\sum_k q_{jk} a_{k1} = 0 \quad \forall j. \tag{6}$$

Очевидно, что одним из решений уравнения (6) будет $a_{i1} = const$, то без нарушения общности будем считать, что $a_{i1} = 1$. В результате получаем, что

$$\sum_k \left(\sum_j a_{1j}^{-1} q_{jk} \right) \delta_{km} = 0,$$

и, следовательно,

$$\sum_k a_{1j}^{-1} q_{jk} = 0 \quad \forall k. \tag{7}$$

Значит, вектор $\nu = \{a_{11}^{-1}, \cdots, a_{1n}^{-1}\}$ ортогонален всем столбцам матрицы Q. Заметим также, что ν – это вектор, составленный из алгебраических дополнений первого столбца матрицы A. В результате получили два условия, накладываемые на матрицу A . Приведем пример возможного вида для A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\nu_2 & \dots & -\nu_n \\ 1 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & & & 1 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

где все остальные элементы нулевые. Нетрудно заметить, что $A_{1j} = \nu_j$ и, следовательно, матрица A является искомой.

3. Найдем теперь матрицу $\tilde{P}$.

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} 1 & -\nu_2 & \dots & -\nu_n \\ 1 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} A^{-1}.$$

При этом матрица A^{-1} имеет вид

$$\frac{1}{\mid A \mid} \begin{pmatrix} 1 & \nu_2 & \dots & \nu_n \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где $\mid A \mid = 1 + \nu_2 + \cdots + \nu_n$.

В результате получаем

$$\tilde{P} = \frac{1}{\mid A \mid} \begin{pmatrix} 1 & -\nu_2 & \dots & -\nu_n \\ 1 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \nu_2 & \dots & \nu_n \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\mid A \mid}\begin{pmatrix} 1 & \nu_2 & \dots & \nu_n \\ 1 & \nu_2 & \dots & \nu_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \nu_2 & \dots & \nu_n \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что матрица $\tilde{P}$ стохастическая. Следовательно, вектор $\mathbf{p} = (p_j)$ представим в виде

$$\mathbf{p} = \frac{1}{1+\nu_2+\dots+\nu_n}(1, \nu_2, \cdots, \nu_n) \qquad (9)$$

и ортогонален любому столбцу матрицы. ■

Таким образом, у нас появилась возможность легко находить финальные вероятности Марковской цепи с конечным числом состояний.

Пользуясь полугрупповыми свойствами Марковских цепей, можно доказать более общую теорему.

Теорема 3. *Для Марковской цепи с непрерывным параметром и дискретным пространством состояний, такой, что* $-q_{ii} < +\infty$ *и* $\sum\limits_{j\neq i} = -q_{ii}$ *для любого* i*, справедливо следующее равенство:*

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = \lim_{\lambda\to 0}(\lambda R(\lambda, Q)).$$

Доказательство. Воспользуемся тем, что полугруппа является обратным преобразованием Лапласа для резольвенты генератора $R(\lambda, Q) = (\lambda I - Q)^{-1}$ (см.[1])

$$P(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} R(\lambda, Q)e^{\lambda t}d\lambda,$$

что равносильно

$$P(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \lambda R(\lambda, Q)\frac{e^{\lambda t}}{\lambda}d\lambda,$$

где $\gamma > 0$. Замкнем контур интегрирования в левую полуплоскость и заметим, что $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \lambda R(\lambda, Q)e^{\lambda t}$ есть вычет подынтегральной функции в нуле, так как $\lambda = 0$ – полюс первого порядка (ранее доказывалось, см. теорему 1, что $\lambda = 0$ является собственным значением матрицы Q кратности 1). При этом очевидно, что все остальные полюса отрицательны, и при стремлении временного параметра t к бесконечности их вклад будет стремиться к 0. Таким образом получаем, что

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = \lim_{\lambda\to 0}(\lambda R(\lambda, Q)). \quad \blacksquare$$

Автор благодарит профессра В.П. Одинца за постановку задачи.

Литература

1. **Хилле Э., Филлипс Р.** Функциональный анализ и полугруппы. М.: ИИЛ, 1962.

2. **Булинский А.В., Ширяев А.Н.** Теория случайных процессов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.

3. **Дуб Дж.** Вероятностные процессы. М.: ИЛ, 1956.

4. **Одинец В.П., Воробьева Е.В.** О классификации состояний однородной Марковской цепи с непрерывным параметром // *Теоретические и методические проблемы обучения в школе и вузе (математика, информатика). СПб.-Мурманск, 2004. С. 53-58.*

Summary

Vorobyova E.V. Some ergodic properties of the homogeneous Markov chain with the continuous parameter

We prove for any Markov chain with finite space of states that the final probabilities vector is orthogonal to the columns of generator. And in the case of any discrete space of states we find an explicit formula for final probabilities in terms of the generator's resolvent.

Санкт-Петербургский университет *Поступила 15.12.2005*