Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1. Вып.6. 2006

УДК 517.982.1

О НОРМИРОВАННОЙ РЕШЕТКЕ И ЕЕ ПОПОЛНЕНИИ ПО НОРМЕ

А.И. Векслер, А.В. Колдунов

В статье даются отрицательные ответы на два вопроса, касающиеся связей между свойствами нормированной решетки и ее пополнения по норме.

1. Пусть X – нормированная решетка (НР), Y – ее пополнение по норме (банахово пополнение), $\pi : X \to Y$ – каноническое вложение X в Y. Ранее авторы изучали некоторые вопросы о связи между свойствами X и Y. Результаты анонсированы на конференциях "Герценовские чтения" (см. [1], и [2]) и в настоящее время в развернутом (и расширенном) виде печатаются. Здесь даются ответы на два вопроса, связанные с этими результатами (см. Вопросы 1 и 2).

Определение 1. Пусть $x \in X$. Если из того, что (x_n) – последовательность Коши и $|x| \geq x_n \downarrow 0$, следует $x_n \to 0$ (т.е. $\|x_n\| \to 0$), то говорят, что элемент x удовлетворяет условию (A_o) или $x \in (A_o)$. Множество всех $x \in (A_o)$ образует замкнутый по норме идеал X_o в X. Если $X_o = X$, то говорят, что X удовлетворяет условию (A_o) $(X \in (A_o))$. Иногда в этом случае говорят, что норма в X псевдо-σ-лебегова.

X всегда погружается в Y (при отображении π) с сохранением граней конечных множеств. Известная теорема Каваи- Люксембурга ([3], [4]) говорит, что для того чтобы πX было порядково плотно в Y (т.е., если $y > 0$, то $y \geq \pi x$ для некоторого $x > 0$) и, в частности, X погружалось в Y с сохранением всех граней, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось $X \in (A_o)$.

Пусть Y_o – полоса в Y, порожденная множеством πX_o, а Y_1 – дополнительная полоса в Y. Тогда πX_o порядково плотно в Y_o. Более того $Y_o \cap \pi X = \pi X_o$. *Через* $\Delta(X)$ *обозначается множество всех последовательностей Коши* $(u_n) \subset X$ *таких, что* $u_n \downarrow 0$, *но* $\|u_n\| \geq \delta > 0$.

© Векслер А.И., Колдунов А.В., 2006.

Тогда $\pi u_n \to y > 0$ (т.е. $\|\pi u_n - y\| \to 0$). *Совокупность всех таких* Y *обозначается* $\overline{\Delta}(Y)$. $\overline{\Delta}(Y)$ порядково плотно в Y_1^+. Ранее авторы нашли векторно-решеточные и топологические условия, накладываемые на НР X, необходимые и достаточные для того, чтобы в Y выполнялось одно из трех следующих свойств: Y_o – полоса с проекциями; $Y_o = cl\pi X_o$; Y_o – полоса с проекциями и одновременно $Y_o = cl\pi X_o$ (для каждого условия в отдельности). Но для двух основных вопросов в этой заметке (решаемых в части 4) эти условия нам не понадобятся. Приведем (в части 3) лишь очень простые и не очень содержательные условия (см. Предложения 2 и 3), да еще для частного случая X с сильной единицей e, нужные для решения Вопроса 1.

2. Начнем со следующего примера (см. [4] и [5]).

Пример 1. Пусть $X = \{(\xi_n)\}$ есть НР l^∞ с нормой $\|x\| = \|x\|_o + \|x\|_1$, где

$$\|x\|_o = \max\{|\xi_n|/n\}, \quad \text{а} \quad \|x\|_1 = \overline{\lim}|\xi_n|.$$

X можно реализовать в качестве векторной решетки (ВР) $C(\beta\mathbf{N})$ (где $\beta\mathbf{N}$ – стоун-чеховская компактификация пространств $\mathbf{N}$ натуральных чисел). При этом окажется, что

$$\|x\|_1 = \max\{|x(s)| : s \in \beta\mathbf{N} \setminus \mathbf{N}\}.$$

Отметим, что идеал X_o в X по составу элементов совпадает с ВР $c_o \subset l^\infty$.

Подсчеты показывают, что Y есть прямая сумма банаховых решеток (БР)

$$Y = c_o^{(n)} \oplus C(\beta\mathbf{N} \setminus \mathbf{N}), \tag{1}$$

где $c_o^{(n)}$ – БР c_o с весом $(1/n)$ (т.е. $c_o^{(n)} = \{(\xi_n) : \xi_n/n \to 0\}$ с нормой, являющейся естественным продолжением $\|\cdot\|_o$). При этом $c_o^{(n)}$ и есть Y_o, а $C(\beta\mathbf{N} \setminus \mathbf{N})$ есть Y_1. Отображение π сопоставляет каждому $x \in l^\infty = C(\beta\mathbf{N})$ пару $(x|_{\beta\mathbf{N}}, x|_{\beta\mathbf{N}\setminus\mathbf{N}})$. При этом функция $x|_{\beta\mathbf{N}}$, неотличима от исходной функции $x \in l^\infty$, но теперь является функцией-элементом в $c_o^{(n)}$. Исходная же норма $\|\cdot\|_o$ расщепилась. Именно $\|\cdot\|_o$ породила равномерную с весом $(1/n)$ норму в первом слагаемом из (1), а $\|\cdot\|_1$ перешла в обычную равномерную норму во втором слагаемом. Оказывается, что Y_o является полосой с проекциями и $Y_o = cl\pi X_o$.

Рассмотрим оператор $U : X \to Y$, где $Ux = \mathrm{Pr}_{Y_o}\pi x$. В этом случае $\|U\| = 1, UX_o = \pi X_o, U|_{X_o}$ сохраняет порядок в обе стороны, $UX_o = \pi X_o$ порядково плотно в Y_o и плотно в Y_o по норме.

Если, к примеру, заменить $\|x\|_o$ на $\sum|\xi_n|^p$ $(1 \le p < +\infty)$, то первое слагаемое в (1) изменится на l^p с весом. Если же заменить $\|\cdot\|_1$ на

$\max\{|x(s)| : s \in F\}$, где F – непустое замкнутое множество в $\beta\mathbf{N} \setminus \mathbf{N}$, то второе слагаемое в (1) перейдет в БР $C(F)$. Но во всех этих случаях Y_o останется полосой с проекциями и останется равенство $Y_o = cl\pi X_o$. Все, что сказано в предыдущем абзаце об операторе U останется в силе. Более того, это останется в силе для любой НР X с порядково плотным X_o, если Y_o - полоса с проекциями и $Y_o = cl\pi X_o$. Естественно возникают два вопроса.

Вопрос 1. Пусть X – НР, X_o порядково плотен в X и Y_o – полоса с проекциями. Верно ли, что $Y_o = cl\pi X_o$ и, следовательно, существует оператор U с указанными выше свойствами?

Вопрос 2. Пусть X – НР, X_o порядково плотен в X и $Y_o = cl\pi X_o$. Верно ли, что Y_o – полоса с проекциями и, следовательно, существует оператор U с указанными выше свойствами?

Основная цель заметки - дать отрицательные ответы на оба вопроса с помощью приведения соответствующих примеров. Большее внимание будет уделено Вопросу 1; см. Пример 2. О причинах этого будет сказано ниже. Предварительно нам понадобятся некоторые относительно простые утверждения, делающие независимым изложение Примера 2 от предыдущих результатов. Этому будет посвящена следующая часть статьи.

3. **Предложение 1**. Пусть I – идеал в НР X. Тогда $cl_Y\pi I$ есть идеал в Y.

Доказательство. Пусть $x \in I^+$ и $0 < y \leq \pi x$. По [4]

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ v \in [0, y]\ \exists\ (x_n) \subset X^+(\pi x_n \downarrow v, \pi x_n \to v \quad \text{и} \quad \|y - v\| < \varepsilon).$$

Имеем $x \wedge x_n \in I^+$, $x \wedge x_n \downarrow$ и $\pi(x \wedge x_n) \downarrow v$. Значит $v \in cl\pi I$ и потому $y \in cl\pi I$. □

В дальнейшем X *– всюду* НР *с сильной единицей* e. *Если существует* $\mathrm{Pr}_{Y_o}\pi e$ *– а тогда существует и* $\mathrm{Pr}_{Y_1}\pi e$ *– будем обозначать* $e_i = \mathrm{Pr}_{Y_i}\pi e$ $(i = 0, 1)$.

Предложение 2. Для того, чтобы Y_o была полосой с проекциями, необходимо и достаточно, чтобы в Y существовал элемент $e_o = \lim \pi x_n$, где $0 \leq x_n \leq e$.

Доказательство. Необходимость очевидна, ибо если $\pi x'_n \to e_o$, то $\pi(x'_n \vee 0 \wedge e) \to e_o \vee 0 \wedge \pi e = e_o$.

Достаточность. Пусть сначала Z – любая архимедова ВР, B – какая-либо ее полоса. Тогда совокупность H всех $z \in Z$, обладающих проекцией в B, есть идеал в Z.Действительно H есть линейное множество. Пусть теперь $0 < z' \leq z \in H$. Тогда, очевидно, $z' \wedge \mathrm{Pr}_B z = \mathrm{Pr}_B z'$.

Отсюда, в частности, если $x \in X^+$, то $x \leq \lambda e$ и потому существует $\mathrm{Pr}_{Y_o}\pi x$ (так как e_o существует).

Теперь возьмем произвольный $y \in Y^+$. Тогда $y = \lim \pi x_n$, где $(x_n) \subset X^+$. По уже доказанному существует $\mathrm{Pr}_{Y_o}\pi x_n$ (и конечно $\mathrm{Pr}_{Y_1}\pi x_n$), которые мы обозначим $(\pi x_n)_i$ $(i = 0, 1)$. Имеем $\pi x_n = (\pi x_n)_o + (\pi x_n)_1$. Очевидно $((\pi x_n)_i)$ $(i = 0, 1)$ суть последовательности Коши. Тогда $(\pi x_n)_i \to y_i \in Y_i^+$. Так как $y_0 + y_1 = y$, то $y_i = \mathrm{Pr}_{Y_i} y$.

Предложение 3. Для того, чтобы Y_o была полосой с проекциями и одновременно выполнялось $Y_o = cl\pi X_o$, необходимо и достаточно, чтобы в Y_o существовал $e_o = \mathrm{Pr}_{Y_o}\pi e$, а в X_o – монотонно возрастающая последовательность $(x_n) \subset [0, e]$ такая, что $\pi x_n \to e_o$.

Доказательство. Необходимость. В силу условия существует $(x'_n) \subset X_o$ такая, что $\pi x'_n \to e_o$. Можно, конечно, считать, что $(x'_n) \subset [0, e]$. А теперь положим $x_n = x'_1 \vee \ldots \vee x'_n$. Тогда $x_n \uparrow$ и $\|e_o - \pi x_n\| \leq \|e_o - \pi x'_n\|$. Потому $\pi x_n \to e_o$.

Достаточность. В силу Предложения 2, Y_o – полоса с проекциями. Пусть теперь $y \in Y_o^+$. Тогда $y = \lim \pi x'_n$, где $(x'_n) \subset X_o$. Можно считать, что $(x'_n) \subset X^+$. Обозначим $(y_n)_i = \mathrm{Pr}_{Y_o}\pi x'_n$ $(i = 0, 1)$. Имеем $\|y - (y_n)_o\| \leq \|y - \pi x'_n\|$. Значит $(y_n)_o \to y$. Но $0 \leq x'_n \leq \lambda_n e$. Отсюда $(y_n)_o \leq \lambda_n e_o \in cl\pi X_o$. В силу Предложения 1, $(y_n)_o \in cl\pi X_o$, т.е. $(y_n)_o = \lim \pi x_n^k$, где $(x_n^k) \subset X_o^+$.

Не умаляя общности, можно считать, что $\|y - (y_n)_o\| < 1/n$ и $\|(y_n)_o - \pi x_n^n\| < 1/n$ (в противном случае можно соответствующие последовательности разредить). Теперь имеем

$$\|y - \pi x_n^n\| \leq \|y - (y_n)_o\| + \|(y_n)_o - \pi x_n^n\| < 2/n,$$

$$\text{т.е.}\quad y = \lim \pi x_n^n \in cl\pi X_o. \qquad \square$$

Еще раз подчеркнем, что существуют и более содержательные условия, обеспечивающие выполнение соответствующих свойств полосы Y_o в Предложениях 2 и 3. Кроме того, эти условия даются для любых НР без требования наличия сильных единиц.

4. Здесь будут даны примеры, дающие отрицательные ответы на Вопросы 1 и 2. Начнем с первого вопроса. Соответствующий Пример 2 нигде не публиковался и вне этой заметки не публикуется.

Пример 2. Рассмотрим единичный квадрат $K = [0, 1] \times [0, 1]$. Обозначим его нижнюю сторону через F и рассмотрим на F две непересекающиеся последовательности точек (s_m) и (t_m) $(m \in \mathbf{N})$ с плотным в F объединения каждая. Присоединив к F объединение $\bigcup\{I_m : m \in \mathbf{N}\}$, где $I_m = \{s_m\} \times [0, 1/m] \subset K$, получим компакт Q с топологией, индуцируемой из K. Пусть X – НР $C(Q)$ с нормой $\|x\| = \|x\|_1 = \|x\|_2$, где

$$\|x\|_1 = \max\{|x(t_m)/m| : m \in \mathbf{N}\},$$

$$\|x\|_2 = \max\{\max[|x(q)/m| : q \in I_m] : m \in \mathbf{N}\}.$$

Покажем, что Y_o – полоса в Y с проекциями, но $e_o = \mathrm{Pr}_{Y_o}\pi e \overline{\in} cl \pi X_o$.

Доказательство. i) Отметим очевидное утверждение: если $x \in [0, e]$ и $x(q) = 0$ на $\bigcup\{I_m \cup \{t_m\} : m \leq m_o\}$, то $\|x\|_i \leq 1/m_o$ $(i = 1, 2)$ и потому $\|x\| \leq 2/m_o$.

ii) Теперь проверим, что если (x_n) - последовательность Коши, $(x_n) \subset [0, e]$ и $x_n \downarrow 0$, то $x_n(q)$ равномерно сходится к 0 на I_m при каждом m.

Предположим противное для некоторого m. Так как I_m – компакт, то найдутся $s \in I_m$ и $\delta > 0$ такие, что $x_n(s) \geq \delta (n \in \mathbf{N})$. Далее найдется такой $n_o \in \mathbf{N}$, что $\|x_{n_o+p} - x_{n_o}\| \leq \delta/(7m)$ для любого натурального p. Вблизи q найдется $q_o \in I_m$, для которой $x_n(q_o) \downarrow 0$, но $\delta/2 < x_{n_o}(q_o) \leq 1$. Пусть $n_1 > n_o$ и $x_{n_1}(q_o) < \delta/3$. Теперь имеем

$$|x_{n_1} - x_{n_o}|(q_o) > \delta/2 - \delta/3 = \delta/6.$$

А тогда

$$\delta/(7m) \geq \|x_{n_1} - x_{n_o}\| \geq |x_{n_1} - x_{n_o}|(q_o)/m \geq \delta/(6m).$$

Противоречие.

iii) Теперь для каждого $m \in \mathbf{N}$ и каждого $l \in \mathbf{N}$ рассмотрим на F пиковую функцию g_l^m такую, что $g_l^m(t_m) = 1$, $g_l^m(t_m - 1/l) = g_l^m(t_m + 1/l) = 0$, линейна на каждом интервале $[t_m - 1/l, t_m]$ и $[t_m, t_m + 1/l]$ и равна 0 на остальной части. Продолжим g_l^m до $x_l^m \in X = C(Q)$, полагая $x_l^m(I_m) = g_l^m(s_m)$. Проверим, что $(g_l^m) \in \Delta(X)$ при каждом m.

Действительно, поскольку $q_l^m(q) \downarrow 0$ для любой $q \in F$, $q \neq t_m$, то $x_l^m(q) \downarrow 0$, если $q \neq t_m$. Значит $x_l^m \downarrow 0$. Далее $x_l^m(t_m) = 1$. Поэтому $\|x_l^m\| \geq 1/m$. Осталось проверить, что (x_l^m) – последовательность Коши.

Прежде всего заметим, что если $s_k \to t_m$, то $k \to \infty$. То же самое верно для $t_k \to t_m$, при условии, что $k > m$. Отсюда следует, что для каждого l найдется такое k_l, что $k_l \uparrow \infty$ и если $s_k \in [t_m - 1/l, t_m = 1/l]$ или $t_k \in [t_m - 1/l, t_m + 1/l]$, то $k > k_l$. Поэтому для $k \leq k_l$ имеем $x_l^m(t_k) = x_l^m(s_k) = 0$. Поскольку кроме того $x_l^m(t_m) = 1$, то по i) $\|x_{l+p}^m - x_l^m\|_i < 1/k_l$ при любом p. Итак $\|x_{l+p}^m - x_l^m\| \leq 2/k_l$ при любом m. Потому $(x_l^m) \in \Delta(X)$. Значит $y^m = \lim \pi x_l^m \in \overline{\Delta}(Y)$.

iv) С помощью построенных последовательностей $(x_l^m : l \in \mathbf{N})$ $(m \in \mathbf{N})$ проверим, что если $x \in X_o$, то $x(F) = 0$. Очевидно, можно считать, что $0 \leq x \leq e$.

Допустим противное. Тогда $x(t_{m_o}) > 0$ для некоторого m_o. Положим $u_l = x_l^{m_o} \wedge x$. Очевидно (u_l) есть последовательность Коши и $u_l \downarrow 0$, но $\|u_l\| \geq u_l(t_{m_o})/m_o = x(t_{m_o})/m_o > 0$ при любом l. Значит $(u_l) \in \Delta(X)$. Отсюда $Y_o \ni \pi x \geq \lim \pi u_l > 0$ и при этом $\lim \pi u_l \in Y_1$. Противоречие.

v) Покажем теперь, что верно и обратное: если $x(F) = 0$, то $x \in X_o$. Опять можно ограничиться случаем $0 \leq x \leq e$.

Предположим противное. Тогда в силу того, что $\overline{\Delta}(Y)$ порядково плотно в Y_1, найдется $(u_n) \in \Delta(X)$ такая, что $x \geq (u_n)$. Имеем $u_n(F) = 0$, откуда $\|u_n\|_1 = 0$. Убедимся, что $\|u_n\|_2 \to 0$. Это будет противоречить тому, что $(u_n) \in \Delta(X)$.

Пусть $\varepsilon > 0$ и $1/m_o < \varepsilon$. Тогда

$$\|u_n\|_2 = \max\{\max[u_n(q)/m : q \in I_m] : m \in \mathbf{N}\}.$$

Имеем $\max\{\max[u_n(q)/m : q \in I_m] : m \geq m_o\} < \varepsilon$, а

$$\max\{\max[u_n(q)/m : q \in I_m] : m < m_o\} \to 0$$

равномерно в силу ii).

Итак, доказано, что $X_o = \{x \in X : x(F) = 0\}$.

vi) Покажем, что не существует $(x_n) \subset X_o^+$ такой, что $(x_n) \subset [0, e]$, $x_n \uparrow$ и $\pi x_n \to e_o = \mathrm{Pr}_{Y_o} \pi e$.

Действительно, допустим, что такая последовательность (x_n) (а значит и e_o) существует. Проверим, что $x_n \uparrow e$.

Если это не так, то $x_n + x \leq e$ при некотором $x > 0$. Не умаляя общности, можно считать, что $x \in X_o$, так как X_o порядково плотен в X. Но тогда и существует $\lim \pi(x_n + x) = e_o + \pi x \leq \pi e$. Проектируя неравенство на полосу Y_o, получаем $e_o + \pi x \leq e_o$ при том, что $\pi x > 0$. Противоречие.

Теперь в силу утверждения, двойственного к ii), $x_n(q)$ равномерно сходится на каждом I_m. В частности, $x_n(s_1) \uparrow 1$. Но это невозможно, так как $x_n \in X_o$ и потому $x_n(s_1) = 0$.

vii) А теперь докажем, что все же $e_o = \mathrm{Pr}_{Y_o} \pi e$ существует. Построим последовательность $(x_n) \subset [0, e]$ такую, что $\pi x_n \to e_0$.

Именно, возьмем любые $x_n \in [0, e]$ такие, что

$$x_n(\bigcup\{I_m : m \leq n\}) = 1, \quad x_n(\bigcup\{t_m : m \leq n\}) = 0. \tag{2}$$

Тогда $(x_{n+p} - x_n)$ $(\bigcup\{I_m : m \leq n\} \cup \bigcup\{t_m : m \leq n\}) = 0$. В силу i), $\|x_{n+p} - x_n\| \leq 2/n$ при любом $p \in \mathbf{N}$, т.е. (x_n) есть последовательность Коши. Обозначим $y = \lim \pi x_n$ и проверим, что $y = e_o$.

Очевидно, $0 \le y \le \pi e$. Сначала покажем, что $y \in Y_o$. Для этого достаточно проверить, что $\|x_n \wedge u_n\| \to 0$ для любой $(u_n) \in \Delta(X)$. Можно считать, что $u_n \le e$. Пусть $\varepsilon > 0$ и $1/m_o < \varepsilon$. Имеем

$$\|x_n \wedge u_n\|_1 \le \max\{x_n(t_m)/m : m \le m_o\} + \max\{x_n(t_m)/m : m > m_o\}. \quad (3)$$

Тогда второе слагаемое в правой части (3) меньше $1/m_o < \varepsilon$ в силу i), а первое слагаемое равно 0 при $n \ge m_o$ в силу (2). Далее

$$\|x_n \wedge u_n\|_2 \le \max\{[\max u_n(q)/m : q \in I_m] : m \le m_o\}+$$

$$+\max\{[\max u_n(q)/m : q \in I_m] : m > m_o\}. \quad (4)$$

Второе слагаемое в правой части (4) меньше $1/m_o < \varepsilon$. Первое же слагаемое может быть сделано меньше ε при достаточно большом $n = n_o \ge m_o$ и очевидно при всех $n \ge n_o$. Итак $\|x_n \wedge u_n\| < 3\varepsilon$ при $n \ge n_o$. Отсюда $\|x_n \wedge u_n\| \to 0$, т.е. $y \in Y_o^+$.

Теперь убедимся, что $\|\pi x \wedge (\pi e - y)\| = 0$ для любого $x \in X_o$, $x \in [0, e]$. Это будет означать, что $\pi e - y \in Y_1^+$. Имеем $x(F) = 0$ в силу iv). Значит, $\|x \wedge (e - x_n)\| = \|x \wedge (e - x_n)\|_2$. Но $x_n(I_m) = 1$ для всех $m \le n$ по (2). Отсюда $(e - x_n)(I_m) = 0$ при $m \le n$. Значит,

$$\|x \wedge (e - x_n)\| = \|x \wedge (e - x_n)\|_2 \le \max\{\max[x(q)/m : q \in I_m] : m > n\} \le 1/n$$

в силу i). Итак $y \in Y_o^+$, $\pi e - y \in Y_1^+$ и $y + (\pi e - y) = \pi e$. Значит, действительно $y = e_o$.

Остается заметить, что в силу vii) и Предложения 2, Y_o является полосой с проекциями, но в силу vi) и Предложения 3 имеем $Y_o \ne cl\pi X_o$. □

Теперь о Вопросе 2. Фактически, отрицательный ответ на него уже содержался в примере 2 из [1]. Для полноты картины приведем его в модифицированном и более простом виде.

Пример 3. Обозначим НР X Из Примера 1 через Z_1. В качестве Z_2 возьмем произвольную БР $C(T)$ на бесконечном компакте T, с равномерной нормой. Пусть теперь

$$X = \{x = (z_1, z_2) \in Z_1 \oplus Z_2 : z_1(s_o) = z_2(t_o)\},$$

где $Z_1 \oplus Z_2$ - прямая сумма НР Z_1 и Z_2, s_o – произвольная фиксированная точка из $\beta\mathbf{N} \setminus \mathbf{N}$, а t_o – произвольная фиксированная неизолированная точка из T, с нормой $\|x\| = \|z_1\| + \|z_2\|$.

В этом случае оказывается, что $X_o = \{x \in X : z_1(\beta\mathbf{N} \setminus \mathbf{N}) = z_2(t_o) = 0\}$. БР Y можно представить $Y = \{y \in c_o^{(n)} \oplus C(\beta\mathbf{N} \setminus \mathbf{N}) \oplus C(T) : y(s_o) = y(t_o)\}$, а

$$Y_o = \{y_o \in Y : y_0(\beta\mathbf{N} \setminus \mathbf{N}) = 0\},$$

$$Y_1 = \{y_1 \in Y : y_1 \in \{0\} \oplus C(\beta\mathbf{N} \setminus \mathbf{N}) \oplus \{0\}, y_1(s_0) = 0\}.$$

Заметим, что $y_o(t_o) = 0$ для всех $y_o \in Y_o$.

Поскольку $Y_o \oplus Y_1 \neq Y$, то обе полосы Y_o и Y_1 не являются полосами с проекциями. В то же время легко сообразить, что $Y_o = cl\pi X_o$.

Литература

1. **Векслер А.И., Колдунов А.В.** Порядково-топологические свойства банахова пополнения нормированной решетки // *Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения-2004. СПб. 2004. С. 114-118.*

2. **Векслер А.И., Колдунов А.В.** О строении банахова пополнения нормированной решетки // *Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения-2005. СПб. 2005. С. 127-130.*

3. **Kawai L.** Locally solid lattices // *Math. Soc. Japan, 1957. V.9. P. 281-314.*

4. **Luxemburg W.A.J.** Notes on Banach function spaces. XVI A,B // *Proc. Nederl. Akad. 1965. V.A68. №1. P. 87-104.*

5. **Векслер А.И.** О двух вопросах теории полуупорядоченных пространств // *Сиб. матем. журн. 1964. Т.5. №4. С. 952-954.*

Summary

Veksler A.I., Koldunov A.V. On the normed lattice and its normed competion

Here (negative) answers on two problems conserning the relations between properties of a normed lattice and its normed completion are presented.

Санкт-Петербургский университет

Поступила 15.12.2005