Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1. Вып.6. 2006

УДК 517.987

К ТЕОРЕМЕ АРЦЕЛА – БОРЕЛЯ. II

А.Г. Порошкин, М.Н. Габова, Е.Н. Греля

Теорема Арцела – Бореля о непрерывности предела последовательности непрерывных функций обобщается на случай функций со значениями в равномерном пространстве.

Теорема Арцела – Бореля устанавливает необходимое и достаточное условие непрерывности поточечного предела последовательности непрерывных числовых функций, заданных на отрезке (см., например, [1]). Согласно ей поточечный предел f последовательности (f_n) непрерывных функций является непрерывным в том и только том случае, когда f_n сходится к f *квазиравномерно.* В [2] эта теорема распространена на функции, заданные в произвольном топологическом пространстве с соответствующим изменением определения квазиравномерной сходимости. В [3] даны обобщения на случай функций, действующих из топологичского пространства в метрическое или в топологическую группу. В настоящей статье дается дальнейшее обобщение теоремы на функции со значениями в равномерном пространстве. В конце статьи дается обобщение одного эквивалента равномерной непрерывности функции на языке последовательностей (обычных или обобщенных). Речь идет о следующей теореме (см. [4]):

Теорема. *Функция* $f : E \to \mathbb{R}$ $(E \subset \mathbb{R})$ *равномерно непрерывна тогда и тогда, когда выполнено условие*

$$\forall x_n, x'_n \in E \ \ (x_n - x'_n \to 0 \Rightarrow f(x_n) - f(x'_n) \to 0). \tag{1}$$

Это простое условие, почти очевидное, легко переносимое на метрические пространства и удобное на практике, почему-то почти не используется в учебном процессе. К такому выводу, естественно приходишь, когда видишь, что ни в одном учебнике или задачнике оно ни словом не упоминается.

§ 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

1. Напомним кратко основные сведения о равномерных пространствах (см. [5, 6]) и введем понятие квазиравномерной сходимости в таких пространствах. Если $X \neq \emptyset$ — множество, то диагональ произведения $X \times X$ есть множество $\Delta = \{(x,x) : x \in X\}$. Если $U \subset X \times X$ — отношение в X, то обратным ему является отношение $U^{-1} := \{(y,x) : (x,y) \in U\}$. Композиция $U \circ V$ отношений U и V есть отношение $W = \{(x,z) : \exists y \in X : (x,y) \in U, (y,z) \in V\}$. *Окружением диагонали* или просто *окружением* называется симметричное ($U = U^{-1}$) отношение U, охватывающее диагональ: $U \supset \Delta$. Символом $\mathcal{D}_X$ обозначается множество всех окружений.

Определение 1. *Равномерностью* на множестве X называется подсемейство $\mathcal{U} \subset \mathcal{D}_X$, удовлетворяющее условиям (аксиомам равномерности):

$(U-1)$. Если $U \in \mathcal{U}$ и $U \subset V \in \mathcal{D}_X$, то $V \in \mathcal{U}$.

$(U-2)$. Если $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$, то $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}$.

$(U-3)$. Для любого $U \in \mathcal{U}$ найдется такое $V \in \mathcal{U}$, что $V \circ V \subset U$.

$(U-4)$. $\bigcap \mathcal{U} = \Delta$.

Определение 2. *Равномерное пространство* — это пара $(X, \mathcal{U})$, состоящая из некоторого множества X и равномерности $\mathcal{U}$ на нем [см.[5], с. 623].

Определение 3. Семейство $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}$ называется *базой равномерности* $\mathcal{U}$, если для любого $U \in \mathcal{U}$ существует такое $V \in \mathcal{B}$, что $V \subset U$.

Любая база $\mathcal{B}$ равномерности на множестве X обладает следующими свойствами:

$(BU-1)$. Для любых $U_1, U_2 \in \mathcal{B}$ найдется такое $U \in \mathcal{B}$, что $U \subset U_1 \cap U_2$.

$(BU-2)$. Для любого $U \in \mathcal{B}$ найдется такое $V \in \mathcal{B}$, что $V \circ V \subset U$.

$(BU-3)$. $\bigcap \mathcal{B} = \Delta$.

Топология в X, порожденная равномерностью $\mathcal{U}$, есть класс

$$\tau = \{G \subset X : \forall x \in G \ \ \exists U \in \mathcal{U} \ \text{ такое, что } \ U[x] \subset G\},$$

где $U[x] = \{y \in X : (x,y) \in U\}$ — x-сечение окружения U. Топологическое пространство (X, τ), порожденное равномерностью $\mathcal{U}$, есть T_1-пространство.

2. Пусть $X \neq \emptyset$ — множество, $(Y, \mathcal{V})$ — равномерное пространство, $f_n, f : X \to Y, \ \ n = 1, 2, \ldots$

Определение 4. Последовательность (f_n) сходится в точке $x \in X$ к функции f, если $\forall V \in \mathcal{V}\ \exists n_0$, такое что при $n \geq n_0$ выполняется условие $f_n(x) \in V[f(x)]$ или, что то же, $(f_n(x), f(x)) \in V$.

Определение 5. Говорим, что последовательность (f_n) *сходится на* X *квазиравномерно* к функции f, если выполняется следующее условие (А):

(А) для любого окружения $V \in \mathcal{V}$ и для любого натурального числа N найдется натуральное $N' > N$, такое что для любого $x \in X$ найдется номер $n_x \in [N, N']$, для которого $(f_{n_x}(x), f(x)) \in V$.

Будем при этом писать $f_n \xrightarrow{qu} f$ (на X.)

Замечание. Мы не требуем сходимости f_n к f в какой-либо точке из X.

Для произвольного номера n и произвольного окружения $V \in \mathcal{V}$ введем множество

$$X(n, V) := \{x \in X : (f_n(x), f(x)) \in V\}.$$

Теорема 1. $f_n \xrightarrow{qu} f$ *тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие* (Б):

(Б) $\forall V \in \mathcal{V}$ *и* $\forall N \in \mathbb{N}$ *найдется конечный набор номеров* $n_1, n_2, ...,$ $n_m \geq N$, *такой, что* $X = \bigcup\limits_{k=1}^{m} X(n_k, V)$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $V \in \mathcal{V}$ и $N \in \mathbb{N}$ выбраны, $f_n \xrightarrow{qu} f$ и $N' > N$ — отвечающее выбранным V и N натуральное число. Взяв $x_1 \in X$, найдем $n_1 = n_{x_1} \in [N, N']$, для которого $(f_{n_1}(x_1), f(x_1)) \in V$. Если $X \neq X(n_1, V)$, то для произвольного $x_2 \in X \backslash X(n_1, V)$ найдем соответствующий номер $n_2 \in [N, N']$, для которого $(f_{n_2}(x_2), f(x_2)) \in V$. Понятно, что $n_2 \neq n_1$. Далее для произвольного $x_3 \in X \backslash [X(n_1, V) \cup X(n_2, V)]$ (если последнее непусто) найдем $n_3 \in [N, N']$, чтобы $(f_{n_3}(x_3), f(x_3)) \in V$. Понятно,что $n_3 \neq n_1, n_2$. Продолжая процесс, на каждом новом шаге получим новое множество $X(n_k, V)$, которое может пересекаться с предыдущими, но не совпадает ни с одним из них. Через конечное число шагов $m \leq N' - N + 1$ мы исчерпаем все возможные номера, отвечающие всевозможным $x \in X$. Тогда $X = \bigcup\limits_{k=1}^{m} X(n_k, V)$.

Достаточность. Пусть выполняется условие (Б). Выберем $V \in \mathcal{V}$, $N \in \mathbb{N}$ и положим $N' = \max\{n_1, n_2, \ldots, n_m\}$. Тогда каково бы ни было $x \in X$, оно попадет в некоторое $X(n_k, V)$ так что $(f_{n_k}(x), f(x)) \in V$ и выполнено условие (А).

Замечание. Вообще говоря, квазиравномерный предел не единствен (см. [3, с. 12]). Кроме того, квазиравномерная сходимость не влечет поточечной сходимости, как и поточечная сходимость не влечет квазиравномерной. Однако, справедлива следующая

Теорема 2. *Если* $f_n \xrightarrow{qu} f$ *и равномерность* $\mathcal{V}$ *обладает счетной базой, то* $\forall x_0 \in X$ *найдется подпоследовательность* (f_{k_n})*, такая, что* $f_{k_n}(x_0) \to f(x_0)$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{B} = \{V_1, V_2, ...\}$ — счетная база равномерности $\mathcal{V}$. Можем считать, что $V_n \supset V_{n+1}$ $\forall n$. По определению квазиравномерной сходимости для V_1 и $N_1 = 2$ найдется номер $k_1 > N_1$, для которого $(f_{k_1}(x_0), f(x_0)) \in V_1$. Затем для V_2 и $N_2 = 2k_1$ найдется номер $k_2 > N_2$, для которого $(f_{k_2}(x_0), f(x_0)) \in V_2$. Продолжая, на $n-$м шаге для окружения V_n и номера $N_n = 2k_{n-1}$ найдем номер $k_n > N_n$, для которого $(f_{k_n}(x_0), f(x_0)) \in V_n$. Подпоследовательность (f_{k_n}) и сходится к f в точке x_0. Действительно, если V — произвольное окружение, то найдется номер n_0, такой что $V_n \subset V$ при $n > n_0$ и $(f_{k_n}(x_0), f(x_0)) \in V_n \subset V$ при $n > n_0$. Это и означает, что $f_{k_n}(x_0) \to f(x_0)$.

§ 2. СВЯЗЬ С ВОПРОСОМ О НЕПРЕРЫВНОСТИ

Пусть теперь (X, τ) — топологическое пространство, $(Y, \mathcal{V})$ — равномерное пространство.

Теорема 3.*Пусть* $f_n \xrightarrow{qu} f$ *на* X *и* $f_n(x_0) \to f(x_0)$ *в некоторой точке* x_0*. Тогда если все* f_n *непрерывны в точке* x_0*, то непрерывна в ней и* f.

Доказательство. Выберем произвольно окружение $V \in \mathcal{V}$ и, повторно применив аксиому (U-3) равномерности, подберем окружение $V' \in \mathcal{V}$, удовлетворяющую условию $V' \circ V' \circ V' \subset V$. Поскольку $f_n(x_0) \to f(x_0)$, то найдется номер $N \in \mathbb{N}$, такой что:

$$(f_n(x_0), f(x_0)) \in V' \text{ при } n > N. \tag{2}$$

Далее, в силу $f_n \xrightarrow{qu} f$ найдется такой номер $N' > N$, что $\forall x \in X$ $\exists n_x \in [N, N']$, такой что

$$(f_{n_x}(x), f(x)) \in V'. \tag{3}$$

Поскольку все $f_{n_x} \in C(x_0)$, то для каждого $n_x \in [N, N']$ найдется окрестность $U_{n_x}(x_0)$, такая, что верна импликация $s \in U_{n_x} \Rightarrow (f_{n_x}(s), f_{n_x}(x_0)) \in V'$. Так как номеров n_x конечное число, то и окрестностей U_{n_x} конечное же число, а поэтому их пересечение $U = \bigcap\limits_{n_x} U_{n_x}(x_0)$ также есть окрестность точки x_0, причем $\forall s \in U$ и каждого номера n_x выполняется условие

$$(f_{n_x}(s), f_{n_x}(x_0)) \in V'. \tag{4}$$

Теперь для произвольной точки $s \in U$ справедливы одновременно следующие включения:

а) $(f(s), f_{n_s}(s)) \in V'$ (в силу (3))

б) $(f_{n_s}(s), f_{n_s}(x_0)) \in V'$ (в силу (4))

в) $(f_{n_s}(x_0), f(x_0)) \in V'$ (в силу (2))

Из них следует, что $(f(s), f(x_0)) \in V' \circ V' \circ V' \subset V$, а это, в силу произвольности окружения $V \in \mathcal{V}$, означает, что $f \in C(x_0)$.

Следствие. *Пусть $f_n \xrightarrow{qu} f$ и $f_n \to f$ поточечно на X. Тогда если все $f_n \in C(X)$, то и $f \in C(X)$.*

В обратную сторону теорема верна лишь при дополнительном предположении относительно пространста X, а именно при условии компактности пространства X.

Теорема 4. *Пусть $f_n(x_0) \to f(x_0)$ в некоторой точке $x_0 \in X$. Тогда если все $f_n, f \in C(x_0)$, то $\forall V \in \mathcal{V}$ $\forall N \in \mathbb{N}$ $\exists n_0 \geq N$, такой, что $x_0 \in int\ X(n_0, V)$.*

Доказательство. Выберем произвольно окружение $V \in \mathcal{V}$ и номер $N \in \mathbb{N}$. Воспользовавшись дважды аксиомой (U-3) равномерности, найдем новое окружение $V_1 \in \mathcal{V}$, удовлетворяющее условию $V_1 \circ V_1 \circ V_1 \subset V$. В силу сходимости $f_n(x_0) \to f(x_0)$ найдется номер $n_0 \geq N$, такой, что $(f_n(x_0), f(x_0)) \in V_1$ при $n \geq n_0$. В частности,

$$(f_{n_0}(x_0), f(x_0)) \in V_1. \tag{5}$$

Далее, в силу непрерывности f_{n_0} и f в точке x_0 найдется окрестность U точки x_0, для всех точек x которой будут выполнены соотношения

$$(f_{n_0}(x), f_{n_0}(x_0)) \in V_1, \tag{6}$$

$$(f(x_0), f(x)) \in V_1. \tag{7}$$

Из (6), (5) и (7) следует, что $(f_{n_0}(x), f(x)) \in V_1 \circ V_1 \circ V_1 \subset V$ для любого $x \in U$, что можно записать в равносильной форме $x \in X(n_0, V)$ при $x \in U$. Значит $U \subset X(n_0, V)$ и тем самым $x_0 \in int\ X(n_0, V)$.

Теперь можем сформулировать необходимое и достаточное условие непрерывности поточечного предела последовательности непрерывных функций, заданных на компактном топологическом пространстве. Следующая теорема дает обобщение теоремы Арцела – Бореля на случай функций, действующих из компактного топологического в равномерное пространство.

Теорема 5. *Пусть X — компактное топологическое пространство, $(Y, \mathcal{V})$ — равномерное пространство, $f_n, f : X \to Y$, $n = 1, 2, \ldots$, и пусть $f_n \to f$ поточечно на X. Тогда если все $f_n \in C(X)$, то для*

$f \in C(X)$ необходимо и достаточно, чтобы f_n сходилась к f квазиравномерно.

Доказательство. Достаточность установлена в следствии из теоремы 3. Докажем необходимость.

Пусть $V \in \mathcal{V}$ и $N \in \mathbb{N}$ выбраны. Тогда по теореме 4 $\forall x \in X\ \exists n_x \geq N$ со свойством $x \in int\ X(n_x, V)$. Семейство $(int\ X(n_x, V))_{x \in X}$ покрывает X и поскольку X компактно, то найдется конечное подсемейство $\{int\ X(n_1, V)), int\ X(n_2, V), \ldots, int\ X(n_m, V)\}$, также покрывающее X. Таким образом,

$$X = \bigcup_{k=1}^{m} int\ X(n_k, V) \subset \bigcup_{k=1}^{m} X(n_k, V),$$

где все $n_k \geqslant N$, и по теореме 1 $f_n \xrightarrow{qu} f$.

Теоремы 5 и 10 в работе [3], доказанные соответственно для метрических пространств и топологических групп, являются частными случаями нашей теоремы 5.

§ 3. СЛУЧАЙ ПРОИЗВОЛЬНОГО ТОПОЛОГИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

Обратимся теперь к случаю некомпактного топологического пространства X. В этом случае введенная выше квазиравномерная сходимость не будет решать в полном объеме вопрос о непрерывности предельной функции — теорема верна лишь в сторону достаточности. Например, последовательность $f_n(x) = \frac{x^2}{n}$ имеет непрерывную предельную функцию, однако, не сходится к ней квазиравномерно в смысле определения 5. Чтобы получить аналог теоремы 5 в этом случае, нам придется несколько изменить определение квазиравномерной сходимости (ср. с определением 2 на с. 408 в [2]). При этом мы используем результат, полученный в теореме 4, который и был использован в доказательстве теоремы 5 в части необходимости.

Пусть снова X — топологическое пространство, $(Y, \mathcal{V})$ — равномерное пространство и $f_n, f : X \to Y,\ \ n = 1, 2, 3, \ldots$

Определение 6. Будем говорить, что последовательность (f_n) сходится на X к функции f *квазиравномерно*-2, если выполнено следующее условие (B):

(B) Для любого окружения $V \in \mathcal{V}$, любого номера $N \in \mathbb{N}$ и любого $x \in X$ найдется такой номер $n_x \geq N$, что $x \in int\ X(n_x, V)$.

При этом пишем $f_n \xrightarrow{qu-2} f$.

Следствие. *Если равномерность $\mathcal{V}$ обладает счетной базой и $f_n \xrightarrow{qu-2} f$, то для любого $x_0 \in X$ найдется подпоследовательность (f_{k_n}), для которой $f_{k_n}(x_0) \to f(x_0)$.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.

При наличии счетной базы равномерности $\mathcal{V}$ заключение следствия равносильно следующему условию:

(Г) Для любого окружения $V \in \mathcal{V}$, любого номера $N \in \mathbb{N}$ и любого $x \in X$ найдется такой номер $n_x \geq N$, что $(f_{n_x}(x), f(x)) \in V$.

Отметим еще, что в общем случае ни одно из условий (A), (B) не является следствием другого (примеры см. в [3], с. 14).

Теорема 6. *Пусть $f_n \xrightarrow{qu-2} f$ и $f_n(x_0) \to f(x_0)$ в некоторой точке $x_0 \in X$. Тогда если все $f_n \in C(x_0)$, то и $f \in C(x_0)$.*

Доказательство. Выбрав произвольно окружение $V \in \mathcal{V}$ и применив повторно аксиому (U-3) равномерности, найдем такое $V_1 \in \mathcal{V}$, чтобы $V_1 \circ V_1 \circ V_1 \subset V$. В силу $f_n(x_0) \to f(x_0)$ найдем такой номер N, чтобы при $n \geq N$ выполнялось условие

$$(f_n(x_0), f(x_0)) \in V_1. \tag{8}$$

Далее, в силу $f_n \xrightarrow{qu-2} f$ для точки x_0 найдется такой номер $n_0 \geq N$, что $x_0 \in int\ X(n_0, V_1)$, а поэтому найдется такая окрестность $U_1 \ni x_0$ в X, что $U_1 \subset X(n_0, V_1)$. Следовательно, для любого $x \in U_1$ имеем

$$(f(x), f_{n_0}(x)) \in V_1. \tag{9}$$

Наконец, в силу непрерывности функции f_{n_0} в точке x_0 найдется окрестность $U_2 \ni x_0$, для любой точки x которой также имеем

$$(f_{n_0}(x), f_{n_0}(x_0)) \in V_1. \tag{10}$$

Тогда если взять $U = U_1 \cap U_2$, то для $x \in U$ и для n_0 выполнены все три условия (8), (9), (10), а поэтому $(f(x), f(x_0)) \in V_1 \circ V_1 \circ V_1 \subset V$.

Так как V выбиралось произвольно, то это и означает, что f непрерывна в точке x_0.

Теперь можем дать следующий критерий непрерывности предела последовательности непрерывных функций, действующих из произвольного топологического пространства X в равномерное пространство Y.

Теорема 7. *Пусть $f_n \to f$ на X и все $f_n \in C(X)$. Тогда $f \in C(X)$ в том и только том случае, когда $f_n \xrightarrow{qu-2} f$.*

Доказательство. Достаточность следует из теоремы 6, необходимость из теоремы 4.

§ 4. РАСПРОСТРАНЕНИЕ НА СЛУЧАЙ ОБОБЩЕННЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Полученные в предыдущих параграфах результаты легко переносятся и на случай обобщенных последовательностей функций. Напомним (см., например, [7], с. 199), что *обобщенной последовательностью* или *направлением* в множестве E называется функция $\varphi : \mathrm{A} \to E$, отображающая направленное вверх упорядоченное множество A в множество E. Обозначаем $(x_\alpha)_{\alpha\in \mathrm{A}}$ или просто (x_α). Здесь $x_\alpha = \varphi(\alpha) \in E$. Если в E введена топология $\tau = \{U\}$, то элемент $x \in E$ называется пределом направления (x_α), если $\forall U \in \tau\ \exists \alpha_0 \in \mathrm{A} : \forall \alpha \in \mathrm{A}\ (\alpha \geq \alpha_0 \Longrightarrow x_\alpha \in U)$.

Пусть теперь $f_\alpha, f : X \to Y, \alpha \in \mathrm{A},\ X$ — множество, $(Y, \mathcal{V})$ — равномерное пространство. Как выше для произвольных $\alpha \in \mathrm{A}, V \in \mathcal{V}$ полагаем

$$X(\alpha, V) := \{x \in X : (f_\alpha(x), f(x)) \in V\}.$$

Кроме того, для различных выводов понадобятся следующие условия (аналогичные введенным выше условиям, связанным с натуральными индексами):

(А$'$) $\forall V \in \mathcal{V}\ \forall \alpha \in \mathrm{A}\ \exists \bar{\alpha} > \alpha :\ \forall x \in X\ \exists \alpha_x \in [\alpha, \bar{\alpha}]$, для которого $(f_{\alpha_x}(x), f(x)) \in V$.

(Г$'$) $\forall V \in \mathcal{V}\ \forall \alpha \in \mathrm{A}\ \forall x \in X\ \exists \alpha_x > \alpha$, для которого $(f_{\alpha_x}(x), f(x)) \in V$.

(Б$'$) $\forall V \in \mathcal{V}\ \ \forall \alpha \in \mathrm{A}$ найдется конечный набор индексов $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m \geq \alpha$, такой, что $X = \bigcup\limits_{k=1}^{m} X(\alpha_k, V)$.

Наконец, если X — топологическое пространство, то введем, как в § 3, условие

(В$'$) $\forall V \in \mathcal{V}\ \forall \alpha' \in \mathrm{A}\ \forall x \in X\ \exists \alpha_x > \alpha'$, для которого $x \in int\, X(\alpha_x, V)$.

В отличие от обычных последовательностей функций для обобщенных последовательностей условия (А$'$) и (Б$'$), вообще говоря, не равносильны, так как между парой индексов α и $\bar{\alpha} > \alpha$ может оказаться бесконечно много индексов из A. Поэтому в определении квазиравномерной сходимости нам придется потребовать выполнения условия (Б$'$).

Определение 7. Будем говорить, что направление функций (f_α) сходится *квазиравномерно* к функции f на X, если для f_α и f выполняется уловие (Б$'$).

Теорема 7. *Пусть X — множество, $(Y, \mathcal{V})$ — равномерное пространство, (f_α) — направление функций из X в $Y, f : X \to Y$. Если*

$\mathcal{V}$ обладает счетной базой, а для f_α, f выполнено условие (Γ')*, то для любого $x_0 \in X$ найдется последовательность индексов $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n < \ldots$, такая, что $f_{\alpha_n}(x_0) \to f(x_0)$.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.

Теорема 8. *Пусть X — топологическое пространство, направление f_α сходится квазиравномерно к f на X и $f_\alpha(x_0) \to f(x_0)$ в некоторой точке $x_0 \in X$. Тогда если $f_\alpha \in C(x_0)$ $\forall \alpha \in$* A*, то и $f \in C(x_0)$.*

Доказательство проводится теми же рассуждениями, что и доказательство теоремы 3.

Теорема 9. *Пусть $f_\alpha(x_0) \to f(x_0)$ в некоторой точке $x_0 \in X$. Тогда если все $f_\alpha, f \in C(x_0)$, то выполняется условие* (B$'$).

См. доказательство теоремы 4.

Теорема 10. *Пусть X — компактное топологическое пространство и $f_\alpha \to f$ поточечно на X, причем все $f_\alpha \in C(X)$. Тогда для $f \in C(X)$ необходимо и достаточно, чтобы f_α сходилась к f на X квазиравномерно.*

Повторяем рассуждения из доказательства теоремы 5.

По аналогии с обычными последовательностями введем понятие квазираномерной-2 сходимости для направлений функций и приведем критерий непрерывности предельной функции в случае **произвольных** топологических пространств.

Определение 8. Говорим, что направление (f_α) сходится к функции f *квазиравномерно*-2 на X, если для f_α и f выполняется условие (B$'$). Можно использовать то же обозначение, что и в определении 6: $f_\alpha \xrightarrow{qu-2} f$.

Теорема 11. *Пусть $f_\alpha \in C(X) \forall \alpha$ и $f_\alpha \to f$ поточечно на X. Тогда для непрерывности f на X необходимо и достаточно, чтобы f_α сходилась к f квазиравномерно-2 на X.*

Следует из теорем 8 и 9.

§ 5. О РАВНОМЕРНОЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ ФУНКЦИЙ

Если $(X,\mathcal{U})$ и $(Y,\mathcal{V})$ — равномерные пространства, то функция $f : X \to Y$ *равномерно непрерывна*, если $\forall V \in \mathcal{V}$ $\exists U \in \mathcal{U}$, такое, что $\forall (x, x') \in X^2$ $((x, x') \in U \Rightarrow (f(x), f(x')) \in V)$.

В параграфе дадим критерий равномерной непрерывности в терминах обобщенных последовательностей.

Определение 9. Пусть $(X,\mathcal{U})$ — равномерное пространство. Направление $((x_\alpha, x'_\alpha))_{\alpha \in \mathrm{A}}$ в X^2 назовем Δ-*направлением*, если $\forall U \in \mathcal{U}$ $\exists \alpha_0 \in$ A, такой, что $(x_\alpha, x'_\alpha) \in U$ при $\alpha \geq \alpha_0$.

Заметим, что в случае метрического пространства X направление $((x_\alpha, x'_\alpha))_{\alpha\in A}$ есть Δ-направление тогда и только тогда, когда $\varrho(x_\alpha, x'_\alpha) \to 0$, а в случае топологической группы X — тогда и только тогда, когда $x_\alpha - x'_\alpha \to 0$.

Теорема 12. *Если $(X,\mathcal{U})$ и $(Y,\mathcal{V})$ — равномерные пространства, то функция $f : X \to Y$ равномерно непрерывна в том и только том случае, когда для любого Δ-направления (x_α, x'_α) в X^2 направление $(f(x_\alpha), f(x'_\alpha))$ также есть Δ-направление в Y^2.*

Доказательство. Необходимость. Для произвольного окружения $V \in \mathcal{V}$ в силу равномерной непрерывности f найдем такое окружение $U \in \mathcal{U}$, чтобы из $(x, x') \in U$ следовало $(f(x), f(x')) \in V$. Тогда если (x_α, x'_α) есть Δ-направление в X^2, то найдется такой индекс $\alpha_0 \in$ A, что при $\alpha \geq \alpha_0$ имеем $(x_\alpha, x'_\alpha) \in U$ и $(f(x_\alpha), f(x'_\alpha)) \in V$. В силу произвольности V последнее означает, что $(f(x_\alpha), f(x'_\alpha))$ есть Δ-направление в Y^2.

Достаточность. Предположим, что f удовлетворяет условию теоремы, но не является равномерно непрерывной. Значит, имеется окружениее $V_0 \in \mathcal{V}$, для которого при любом выборе $U \in \mathcal{U}$ найдется такая пара $(x_\alpha, x'_\alpha) \in U$, что $(f(x_\alpha), f(x'_\alpha)) \notin V_0$. Пусть $\mathcal{B}$ — база равномерности $\mathcal{U}$. Упорядочим $\mathcal{B}$ по "включению наоборот": считаем $U \leq U'$ при $U \supset U'$. В силу аксиомы $(BU-1)$ базы упорядоченное множество $(\mathcal{B}, \leq)$ направлено вверх. По предположению $\forall U \in \mathcal{B}\ \exists (x_U, x'_U) \in U$, для которой $(f(x_U), f(x'_U)) \notin V_0$. Полученное направление (x_U, x'_U) является Δ-направлением в X^2, а поэтому и $(f(x_U), f(x'_U))$ есть Δ-направление в Y^2. Но это противоречит условию $(f(x_U), f(x'_U)) \notin V_0$.

Замечание. Если равномерность в X обладает счетной базой, то в теореме 12 можно ограничится обычными последовательностями:

функция $f : X \to Y$ равномерно непрерывна в том и только том случае, когда для любой Δ-последовательности (x_n, x'_n) в X^2 соответствующая последовательность $(f(x_n), f(x'_n))$ также является Δ-последовтельностью в Y^2.

Доказательство получается небольшим изменением рассуждений в доказательстве теоремы 12.

Отметим еще, что если (x_α, x'_α) есть Δ-направление в X^2 и $x_\alpha \to x_0$ в топологии τ, порожденной равномерностью $\mathcal{U}$, то и $x'_\alpha \to x_0$. Все сказанное здесь позволяет легко доказать теорему Кантора о равномерной непрерывности непрерывной функции $f : X \to Y$ в случае компактности пространства (X, τ).

Краткое содержание статьи опубликовано в тезисах [8].

Несколько слов по истории вопроса

Д.Г. Стоксом одновременно с Л. Зайделем [9] в 1848 г. было введено понятие равномерной сходимости функциональной последовательности и ряда и установлено, что равномерный предел последовательности непрерывных на отрезке функций является также непрерывной функцией. Однако такая сходимость не является необходимым условием непрерывности предельной функции и ряд математиков занялся поиском необходимого условия. Одним из первых обратил внимание на то, что равномерная сходимость — слишком сильное требование, У. Дини. Он ослабил это требование и ввел некоторое обобщение равномерной сходимости, но и оно оказалось лишь достаточным в указанном вопросе. Дини же установил, что в случае монотонности последовательности функций $(f_n(x))$, заданных на отрезке, для непрерывности предельной функции необходима и достаточна равномерная сходимость.

Первый разрешил эту проблему сложным методом Ч. Арцела. С целью упрощения определений и рассуждений в работах Арцела Э. Борель подверг известные определения некоторым изменениям и пришел к новому виду сходимости, которую назвал *квазиравномерной.* Она и решила вопрос о необходимом и достаточном условии непрерывности предельной функции.

Литература

1. **Лузин Н.Н.** Теория функций действительного переменного. М.: Учпедгиз, 1948. 318 с.

2. **Александров П.С.** Введение в общую теорию множеств и функций. М.;Л.: Гостехиздат, 1948. 412 с.

3. **Порошкин А.Г., Смирнова А.С.** К теореме Арцела — Бореля *// Труды Сыктывкарского лесного института. Серия: Математика. Физика. 2004. Т.5. С. 10-19.*

4. **Порошкин А.А., Порошкин А.Г.** Непрерывность. – Уч. пособие. Сыктывкар: Изд-во Сыктывкарского университета, 2001. 66 с.

5. **Келли Дж.Л.** Общая топология. М.: Наука, 1968. 384 с.

6. **Энгелькинг Р.** Общая топология. М.: Мир, 1986. 752 с.

7. **Владимиров Д.А.** Теория булевых алгебр. СПб: СПбГУ, 2000. 616 с.

8. **Габова М.Н., Греля Е.Н., Порошкин А.Г.** К теореме Арцела — Бореля. II // *Проблемы математического образования в вузах и школах России в условиях его модернизации. Материалы межрегиональной научно-методической конференции. 23-24 мая 2005 г. Сыктывкар. Коми гос.пединститут, 2005. С. 70-73.*

9. **Боголюбов Н.А.** Математики. Механики. Биографический справочник. Киев: Наукова думка, 1983. 640 с.

Summary

Poroshkin A.G., Gabova M.N., Grelya E.N. On the Arzela – Borel theorem. II.

Let X be a topological space, $(Y, \mathcal{V})$ — uniform space and (f_α) be a sequence or directedness of functions $f_\alpha : X \to Y$. In this paper autors prove the generalization of Arzela — Borel theorem: when $f_\alpha \in C(X)$ $\forall\alpha$ and $f_\alpha(x) \to f(x)$ $\forall x \in X$, then $f \in C(X)$ if and only if f_α converges to f on X quasi-uniformly.

Сыктывкарский университет *Поступила 20.11.05*