Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1. Вып.6. 2006

УДК 519.652

ФРЕЙМ МЕРСЕДЕС–БЕНЦ В n-МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ [1]

А.Б. Певный, М.Н. Истомина

В пространстве $\mathbb{R}^n$ построен жёсткий фрейм, состоящий из $n+1$ векторов такой, что углы между любыми двумя различными векторами равны $\frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{1}{n}$.

Система векторов $\{e_k\}_{k=1}^K$ в $\mathbb{R}^n$ называется жёстким фреймом в $\mathbb{R}^n$, если существует число $A > 0$ такое, что для любого $x \in \mathbb{R}^n$ выполнено равенство

$$\sum_{k=1}^{K}(\langle x, e_k\rangle)^2 = A\|x\|^2. \tag{1}$$

Здесь $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ — скалярное произведение векторов $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$. Из (1) следует, что $K \geq n$. Кроме того (см. [1], разд. 3.2), любой вектор $x \in \mathbb{R}^n$ можно представить в виде

$$x = \frac{1}{A}\sum_{k=1}^{K}\langle x, e_k\rangle e_k. \tag{2}$$

Классическим примером жёсткого фрейма является фрейм Мерседес-Бенц в $\mathbb{R}^2$, состоящий из трех векторов единичной длины, расположенных под углом 120°

$$e_1^2 = (0, 1),\ e_2^2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right),\ e_3^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) \tag{3}$$

Для него равенство (1) принимает вид

$$\sum_{i=1}^{3}(\langle x, e_i^2\rangle)^2 = \frac{3}{2}\|x\|^2, x \in \mathbb{R}^2.$$

[1]Работа поддержана грантом РФФИ 06-01-72032 - МНТИ-а

Характеристическим свойством этого фрейма является то, что углы между различными векторами равны $120°$.

Оказывается, для любого $n \geq 3$ можно построить аналогичную конструкцию в $\mathbb{R}^n$.

Теорема. *Для любого $n \geq 2$ можно построить систему из $n+1$ векторов $\mathfrak{F}_n = \{e_1^n, e_2^n, \ldots, e_{n+1}^n\}$ со свойствами:*

1. $\langle e_i^n, e_j^n \rangle = -\frac{1}{n}$, $i, j \in 1 : n+1, i \neq j$;
2. $\|e_i^n\| = 1, \quad i \in 1 : n+1$;
3. $\sum_{i=1}^{n+1} e_i^n = \mathbb{O}$;
4. *Система $\mathfrak{F}_n$ является жёстким фреймом с константой $A = (n+1)/n$.*

Доказательство проводится индукцией по n. При $n = 2$ фрейм (2) удовлетворяет всем утверждениям теоремы.

Допустим, что для $n-1$ все утверждения выполнены. Система $\mathfrak{F}_n$ получается из $\mathfrak{F}_{n-1}$ с помощью процедуры добавления.

Для $i \in 1 : n$ вектор e_i^n строится из e_i^{n-1} добавлением n–ой компоненты $-h_n$ и нормированием получившегося вектора:

$$e_i^n = c_n[e_i^{n-1}, -h_n], \quad \text{где } c_n = \frac{1}{\sqrt{1+h_n^2}}.$$

Положим $e_{n+1}^n = (0, 0, \ldots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n$. По индуктивному предположению $\langle e_i^{n-1}, e_j^{n-1} \rangle = -\frac{1}{n-1}$, $i, j \in 1 : n$, $i \neq j$. Тогда

$$\langle e_i^n, e_j^n \rangle = \begin{cases} c_n^2(\langle e_i^{n-1}, e_j^{n-1} \rangle + h_n^2) & , i, j \in 1 : n,\ i < j, \\ -c_n h_n & , i \in 1 : n,\ j = n+1. \end{cases}$$

Получим уравнение для определения h_n:

$$\frac{1}{1+h_n^2} \cdot \left(h_n^2 - \frac{1}{n-1} \right) = -c_n h_n = \frac{-h_n}{\sqrt{1+h_n^2}}.$$

Отсюда $h_n = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}$, $c_n = \frac{\sqrt{n^2-1}}{n}$. Тогда $\langle e_i^n, e_j^n \rangle = -\frac{1}{n}$, $i \neq j$. Имеем

$$\|e_i^n\|^2 = c_n^2(\|e_i^{n-1}\|^2 + h_n^2) = 1, \quad i \in 1 : n; \ \|e_{n+1}^n\| = 1.$$

Так же просто проверяется свойство 3.

Осталось доказать, что для любого $x \in \mathbb{R}^n$ выполняется тождество

$$\sum_{i=1}^{n+1}(\langle x, e_i^n\rangle)^2 = \frac{n+1}{n}\|x\|^2,$$

По индуктивному предположению верны равенства

$$\sum_{i=1}^{n}(\langle x, e_i^{n-1}\rangle)^2 = \frac{n}{n-1}\|x\|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad \sum_{i=1}^{n} e_i^{n-1} = \mathbb{O}.$$

Построим e_i^n с помощью процедуры добавления. Тогда из индуктивного предположения следует искомое тождество. Теорема доказана.

Замечания

1. Угол φ_n между двумя различными векторами e_i^n и e_j^n находится из условия $\cos\varphi_n = \langle e_i^n, e_j^n\rangle = -\frac{1}{n}$, отсюда $\varphi_n = \arccos(-\frac{1}{n}) = \frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{1}{n}$, значит

$$\frac{2\pi}{3} = \varphi_2 > \varphi_3 > \cdots > \varphi_n > \cdots > \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{n\longrightarrow\infty}\varphi_n = \frac{\pi}{2}.$$

2. Избыточное количество векторов $(n+1)$ в разложении (2) повышает надежность при восстановлении вектора x по коэффициентам $c_i = \langle x, e_i^n\rangle$, $i \in 1 : n+1$. Если любой из коэффициентов $\{c_i\}_{i=1}^{n+1}$ будет утрачен, то по оставшимся вектор x восстановить можно.

   Допустим, что утрачен коэффициент $c_k = \langle x, e_k^n\rangle$ с некоторым номером $k \in 1 : n+1$. Рассмотрим систему

$$\{e_1^n, \ldots, e_{k-1}^n, e_{k+1}^n, \ldots, e_{n+1}^n\} \tag{4}$$

   с выкинутым вектором e_k^n. В системе (4) скалярное произведение двух различных векторов равно $-\frac{1}{n}$, а норма каждого вектора равна 1. Поэтому матрица Грама системы (4) имеет вид

$$G = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & 1 & -\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

   Эта матрица имеет диагональное преобладание, поэтому $\det G \neq 0$ и, значит, система (4) линейно независима. Поэтому существует единственная система $\{\widetilde{e}_1, \ldots, \widetilde{e}_{k-1}, \widetilde{e}_{k+1} \ldots, \widetilde{e}_{n+1}\}$, биортогональная к (4), и вектор x восстанавливается по формуле

$$x = \sum_{i=1}^{k-1} c_i \widetilde{e}_i + \sum_{i=k+1}^{n+1} c_i \widetilde{e}_i.$$

3. Вопрос о восстановлении вектора x в случае, когда часть фреймовых коэффициентов утрачена, рассматривался во многих работах, см., например, [2]. Там же использовалось название Mercedes-Benz frame.

4. Из стандартного фрейма $\mathfrak{F}_n$ можно получить другие жёсткие фреймы. Умножим все векторы фрейма на произвольную ортогональную матрицу Q и перед получившимися векторами в произвольном порядке расставим знаки $+$ и $-$:

$$\{\pm Q e_1^n, \pm Q e_2^n, \ldots, \pm Q e_{n+1}^n\}. \tag{5}$$

Система (5) является жёстким фреймом.

Нерешенная задача. Доказать, что любой жёсткий фрейм с константой $\frac{n+1}{n}$, состоящий из $n+1$ единичных векторов, после некоторой перестановки элементов фрейма принимает вид (5).

Литература

1. **Daubechies Ingrid.** Ten lectures on wavelets. Philadelphia: SIAM, 1992.

2. **Casazza Peter, Kovačević Jelena.** Equal-norm tight frames with erasures // *Advances in Comp. Math. (Special issue on frames). 2002. P. 387-430.*

Summary

Pevnyi A.B., Istomina M.N. Mercedes-Benz frame in n-dimensional space

We construct an equal-norm tight frame in $\mathbb{R}^n$ consisting of $n+1$ vectors. The angles between any different vectors are equal $\frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{1}{n}$.

Сыктывкарский университет *Поступила 7.03.2006*