*Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1. Вып.6. 2006*

УДК 539.3

ЗАДАЧА ОБ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ КРУГЛОЙ ЖЕСТКО ЗАДЕЛАННОЙ ПЛАСТИНЫ [1]

В.В. Миронов, Н.В. Кузнецова

В работе рассматривается задача об осесимметричных собственных колебаниях круглой жестко заделанной пластины в рамках теории С.П.Тимошенко. Своеобразие задачи состоит в том, что собственная частота входит не только в уравнение равновесия, но и в граничные условия. В пособии [1] в связи с этим рассматривались граничные условия *типа* жесткой заделки (т.е. собственная частота в граничных уравнениях не учитывалась). В данной работе получено точное решение названной спектральной задачи.

Система уравнений равновесия круглой осесимметричной пластины в рамках теории Кирхгофа-Тимошенко в полярных координатах имеют вид [1]

$$\Delta^2 w = \frac{R^4}{D}(q - \sigma\Delta q),$$
$$\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\psi_\rho) = -\frac{R}{\mu h}\rho q,$$
$$\Delta^2\Phi = \nu\Delta m_n, \tag{1}$$

где

$\Delta = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}(\rho\dfrac{\partial}{\partial\rho})$ – оператор Лапласа, $\rho = \dfrac{r}{R}$ – безразмерная координата, $\sigma = \dfrac{h_\psi^2}{R^2}$ – параметр поперечных сдвигов, t – время, R, h,

[1]Работа выполнена при поддержке программы "Государственная поддержка ведущих научных школ РФ" (грант НШ – 2180.2003.1)

$D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ – радиус, толщина, цилиндрическая жесткость пластины, E, ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала,

$$h_\psi^2 = \frac{h^2}{6(1-\nu)}.$$

В случае свободных колебаний пластины на нее действуют удельные силы инерции

$$q = -\gamma h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad m_n = 0, \tag{2}$$

где γ – плотность материала пластины.

Используем разделение переменных по формулам

$$w(\rho, t) = u(\rho) e^{i\omega t}, \quad \Phi(\rho, t) = \Psi(\rho) e^{i\omega t}, \tag{3}$$

ω – частота собственных колебаний.

Подставив формулы (2), (3) в уравнения $(1)_1$, $(1)_3$ приходим к следующим равенствам

$$\Delta^2 u = \lambda(u - \sigma \Delta u), \quad \Delta^2 \Psi = 0, \tag{4}$$

где

$$\lambda = \gamma h R^4 \omega^2 / D. \tag{5}$$

Рассмотрим теперь граничные условия жесткого защемления, считая, что пластина свободна в тангенциальном направлении. На краю $\rho = 1$ должны быть выполнены граничные условия

$$w = 0, \quad \theta_\rho = -\frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial \rho} + \psi_\rho = 0, \quad \Phi = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} = 0. \tag{6}$$

Из уравнений $(4)_2$, $(6)_3 - (6)_4$ следует, что $\Psi \equiv 0$.

На основании уравнения $(1)_2$ получаем

$$\psi_\rho = -\frac{R}{\mu h}\frac{1}{\rho}\int_0^\rho q(\xi, t)\xi d\xi. \tag{7}$$

С учетом последнего выражения и уравнения $(6)_2$ приходим к следующему равенству:

$$\theta_\rho = -\frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial \rho} - \frac{R}{\mu h}\frac{1}{\rho}\int_0^\rho q(\xi, t)\xi d\xi. \tag{8}$$

Воспользовавшись в правой части этого равенства формулой разделения переменных $(3)_1$ и формулой $(2)_1$ равенству (8) можно придать вид

$$u'(1) + \lambda\sigma \int_0^1 u(\rho)\rho d\rho. \tag{9}$$

Таким образом, приходим к следующей краевой задаче на собственные значения:

$$\Delta^2 u = \lambda(u - \sigma\Delta u), \qquad (10)_1$$

$$u(1) = 0, \quad u'(1) + \lambda\sigma \int_0^1 u(\rho)\rho d\rho = 0. \qquad (10)_2$$

К граничным условиям $(10)_2$ необходимо присоединить еще условие конечности прогиба при $\rho = 0$.

Особенностью рассматриваемой задачи является то, что собственная частота входит как в уравнение равновесия, так и в граничное условие. Последний факт затрудняет применение проекционных методов решения задачи, например, методов В.Ритца, Б.Г.Галеркина или итерационных методов, например, О.Келлога.

Уравнение равновесия $(10)_1$ запишем так:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}u(\rho))) = \lambda(u(\rho) - \sigma\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}u(\rho))). \tag{11}$$

Общее решение дифференциального уравнения (11) имеет вид

$$\begin{aligned} u(\rho) = c_1 J\left(0, \sqrt[4]{\frac{\lambda}{4}}\sqrt[2]{\sqrt{\lambda\sigma^2} - \sqrt{4+\lambda\sigma^2}}\rho\right) + \\ + c_2 J\left(0, \sqrt[4]{\frac{\lambda}{4}}\sqrt[2]{\sqrt{\lambda\sigma^2} + \sqrt{4+\lambda\sigma^2}}\rho\right) + \\ + c_3 Y\left(0, \sqrt[4]{\frac{\lambda}{4}}\sqrt[2]{\sqrt{\lambda\sigma^2} - \sqrt{4+\lambda\sigma^2}}\rho\right) + \\ + c_4 Y\left(0, \sqrt[4]{\frac{\lambda}{4}}\sqrt[2]{\sqrt{\lambda\sigma^2} + \sqrt{4+\lambda\sigma^2}}\rho\right), \end{aligned} \tag{12}$$

где J, Y – функции Бесселя первого и второго рода соответственно.

Из условия конечности прогиба при $\rho = 0$ сразу следует, что $c_3 = 0$, $c_4 = 0$.

Константы c_1, c_2 определяются из граничных условий жесткой заделки $(10)_2$. Подставив в них выражение (12) придем к однородной системе линейных уравнений относительно двух констант c_1, c_2. Условием существования нетривиального решения такой системы является равенство нулю ее определителя. Опуская громоздкие промежуточные выкладки выпишем определитель $det = det(\lambda, \sigma)$ системы

$$det(\lambda,\sigma) =$$

$$= J\left(0, \sqrt[4]{\frac{\lambda}{4}}\sqrt[2]{\sqrt{\lambda\sigma^2} - \sqrt{4+\lambda\sigma^2}}\right) J\left(1, \sqrt[4]{\frac{\lambda}{4}}\sqrt[2]{\sqrt{\lambda\sigma^2} + \sqrt{4+\lambda\sigma^2}}\right) \cdot$$

$$\cdot\left(-\sqrt[4]{\frac{\lambda}{4}}\sqrt{\sqrt{\lambda\sigma^2} + \sqrt{4+\lambda\sigma^2}} + \frac{\sqrt[4]{\lambda^3}\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\sqrt{\lambda\sigma^2} + \sqrt{4+\lambda\sigma^2}}}\right) -$$

$$-J\left(0, \sqrt[4]{\frac{\lambda}{4}}\sqrt[2]{\sqrt{\lambda\sigma^2} + \sqrt{4+\lambda\sigma^2}}\right) J\left(1, \sqrt[4]{\frac{\lambda}{4}}\sqrt[2]{\sqrt{\lambda\sigma^2} - \sqrt{4+\lambda\sigma^2}}\right) \cdot$$

$$\cdot\left(-\sqrt[4]{\frac{\lambda}{4}}\sqrt{\sqrt{\lambda\sigma^2} - \sqrt{4+\lambda\sigma^2}} + \frac{\sqrt[4]{\lambda^3}\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\sqrt{\lambda\sigma^2} - \sqrt{4+\lambda\sigma^2}}}\right). \qquad (13)$$

Трансцендентное уравнение (13) относительно λ при фиксированном параметре поперечных сдвигов σ имеет бесконечное число вещественных корней, которые и являются собственными значениями задачи (10).

В табл.1 приведены значения первых четырех собственных частот при различных параметрах σ.

Табл. 1

σ	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
0.000	104.3631	1581.744	7939.549	25022.24
0.005	95.96715	1232.178	5036.697	12749.74
0.010	88.79436	1009.085	3700.906	8619.612
0.020	77.19946	742.2014	2435.235	5271.343

Как усматривается из приведенной таблицы

– учет поперечных сдвигов существенно влияет на спектр собственных значений, при этом, влияние поперечных сдвигов тем заметнее, чем больше параметр σ, т.е. чем больше отношение h/R;

– при $\sigma = 0$ (т.е. при рассмотрении задачи в рамках теории Г.Кирхгофа) собственные значения, вычисленные по формуле (13) вполне удовлетворительно согласуются с аналогичными значениями, вычисленными методами В.Ритца и О.Келлога [1];

– при $\sigma > 0$ (при учете поперечных сдвигов) собственные значения из табл.1 и вычисленные методом О.Келлога [1], являются существенно различными, потому, что при расчете собственных значений методом О.Келлгога принимались граничные условия типа жесткой заделки, т.е. в них не учитывались поперечные сдвиги.

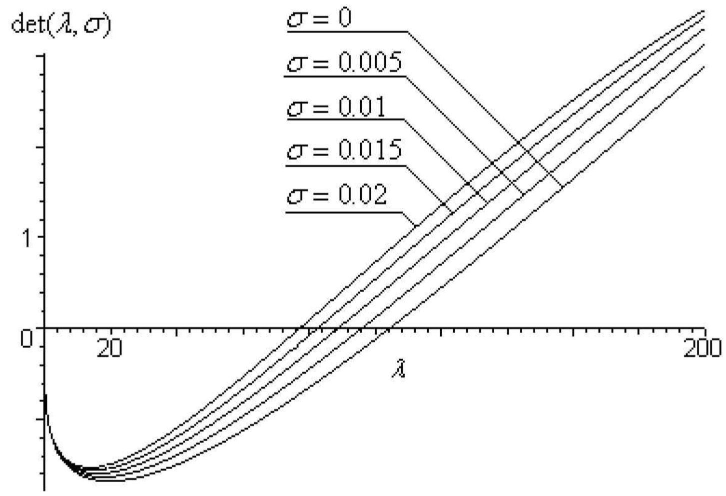

Рис. 1. Графики определителя $det(\lambda, \sigma)$

На рис.1 приведены графики определителя $det(\lambda, \sigma)$ при различных σ в районе первого собственного значения λ_1, из которого усматривается влияние поперечных сдвигов на собственные значения.

Литература

1. **Михайловский Е.И.** Лекции по вариационным методам механики упругих тел: Учеб. пособие. Сыктывкар: Изд-во Сыктывкарского ун-та, 2002. 256 с.

Summary

Mironov V.V., Kuznetsova N.V. The task about axis-symmetrical eigen-oscillations of round rigidly fixed plates

In this paper the task about axis-symmetrical eigen-oscillation of round rigidly fixed plates is considiered. The analytical solution is given.

Сыктывкарский университет *Поступила 01.02.2006*