

УДК 539.3

*Памяти моих учителей
Валентина Валентиновича Новожилова
и
Климентия Феодосьевича Черныха
посвящаяю*

КЛАССИЧЕСКАЯ ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ ОБОЛОЧЕК ¹

Е.И. Михайловский

Классической принято называть линейную теорию тонких упругих оболочек, основанную на гипотезах Г. Кирхгофа [1] и впервые достаточно детально разработанную А. Лявом [2], допустившему, однако, ряд неточностей. В данной работе последовательно выводятся общие (базовые) уравнения современного варианта классической теории оболочек, который составляют:

- уравнения равновесия А. Лява [2], записанные в терминах статических величин В.В. Новожилова [3];
- кинематические уравнения А. Лява [2] с исправленной А.Л. Гольденвейзером [4] формулой для кручения;
- уравнения неразрывности А.Л. Гольденвейзера [4];
- определяющие уравнения упругости В.В. Новожилова-Л.И. Балабуха [3,5];
- распространенные на оболочку граничные величины Г. Кирхгофа [6];
- деформационные граничные величины К.Ф. Черныха [7], обобщенные автором на случай многосвязной области срединной поверхности [8].

¹Работа выполнена при поддержке программы “Государственная поддержка ведущих научных школ РФ” (грант НШ – 2180.2003.1)

В работе показано также, что уравнения неразрывности, выведенные А.Л. Гольденвейзером из соотношений Гаусса и Петерсона-Кодацци для деформированной срединной поверхности оболочки, могут быть формально получены непосредственно из уравнений равновесия с учетом кинематических уравнений.

При изложении используется предложенная автором [9] операторная форма записи полевых уравнений и граничных величин. Обозначения совпадают в основном с принятыми в работе [10].

1. Некоторые соотношения и обозначения для деформированной поверхности

1.1. Деформация поверхности

Отнесем поверхность к *ортogonalным* лагранжевым координатам α^1, α^2 . Пусть уравнения этой поверхности до деформации (*исходная конфигурация*) и после деформации (*актуальная конфигурация*) имеют соответственно вид

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\alpha^1, \alpha^2), \quad (1.1)$$

$$\mathbf{r}^* = \mathbf{r}(\alpha^1, \alpha^2) + \mathbf{u}(\alpha^1, \alpha^2). \quad (1.2)$$

Вектор перемещения точки поверхности \mathbf{u} будем представлять равенствами

$$\mathbf{u} = u^\nu \mathbf{r}_\nu + w \mathbf{n} = u_\mu \mathbf{r}^\mu + w \mathbf{n} \quad (1.3)_1$$

или

$$\mathbf{u} = u_\alpha \mathbf{e}_\alpha + u_\beta \mathbf{e}_\beta + w \mathbf{n}. \quad (1.3)_2$$

При этом в формуле (1.3)₂ приняты следующие обозначения:

$$u_\alpha \triangleq u_{\langle 1 \rangle} = A^{-1} u_1 = A u^1, \quad u_\beta \triangleq u_{\langle 2 \rangle} = B^{-1} u_2 = B u^2,$$

где $u_{\langle 1 \rangle}, u_{\langle 2 \rangle}$ – физические компоненты вектора \mathbf{u} ; $\mathbf{e}_\alpha = A^{-1} \mathbf{r}_1 = A \mathbf{r}^1$, $\mathbf{e}_\beta = B^{-1} \mathbf{r}_2 = B \mathbf{r}^2$; $A \triangleq \sqrt{a_{11}}$, $B \triangleq \sqrt{a_{22}}$ – параметры Ламе.

Суммировать в формуле (1.3)₁ и ниже следует *исключительно* по одноименным нижнему и верхнему греческим индексам.

Используя деривационные формулы Гаусса-Вейнгартена, находим

$$\partial_i \mathbf{u} \triangleq \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \alpha^i} = \varepsilon_{i\alpha} \mathbf{r}^\alpha - \vartheta_i \mathbf{n}, \quad (1.4)$$

где

$$\varepsilon_{ij} = \nabla_i u_j - b_{ij} w, \quad \vartheta_i = -\partial_i w - b_i^\alpha u_\alpha; \quad (1.5)$$

∇_i – ковариантная производная.

Соотношения (1.5) в физических компонентах имеют вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_\alpha &\triangleq \varepsilon_{\langle 11 \rangle} = A^{-2} \varepsilon_{11} = \frac{\partial u_\alpha}{A \partial \alpha} + \rho_\alpha u_\beta - \sigma_\alpha w, \\ \varepsilon_\beta &\triangleq \varepsilon_{\langle 22 \rangle} = B^{-2} \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_\beta}{B \partial \beta} + \rho_\beta u_\alpha - \sigma_\beta w, \\ \omega_\alpha &\triangleq \varepsilon_{\langle 12 \rangle} = (AB)^{-1} \varepsilon_{12} = \frac{\partial u_\beta}{A \partial \alpha} - \rho_\alpha u_\alpha + \tau_{\alpha\beta} w, \\ \omega_\beta &\triangleq \varepsilon_{\langle 21 \rangle} = (AB)^{-1} \varepsilon_{21} = \frac{\partial u_\alpha}{B \partial \beta} - \rho_\beta u_\beta + \tau_{\alpha\beta} w, \\ \vartheta_\alpha &\triangleq \vartheta_{\langle 1 \rangle} = -\frac{\partial w}{A \partial \alpha} - \sigma_\alpha u_\alpha + \tau_{\alpha\beta} u_\beta, \\ \vartheta_\beta &\triangleq \vartheta_{\langle 2 \rangle} = -\frac{\partial w}{B \partial \beta} - \sigma_\beta u_\beta + \tau_{\alpha\beta} u_\alpha; \end{aligned} \quad (1.6)_1$$

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= -\frac{1}{R_\alpha} = b_{\langle 11 \rangle}, \quad \sigma_\beta = -\frac{1}{R_\beta} = b_{\langle 22 \rangle}, \quad \tau_{\alpha\beta} = -\frac{1}{R_{\alpha\beta}} = -b_{\langle 12 \rangle}, \\ \rho_\alpha &= \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta}, \quad \rho_\beta = \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \end{aligned} \quad (1.6)_2$$

($\sigma_\alpha, \sigma_\beta, -\tau_{\alpha\beta}$ – физические компоненты тензора кривизны поверхности $\mathbf{B} = b_{\alpha\beta} \mathbf{r}^\alpha \otimes \mathbf{r}^\beta$; ρ_α, ρ_β – геодезические кривизны поверхности вдоль α -, β -линий; \otimes – знак тензорного произведения).

С учетом приведенных соотношений компоненты тензора деформации Грина-Лагранжа определяются по формуле

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2} (\overset{*}{a}_{ij} - a_{ij}) = \frac{1}{2} (\varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ji}) + \frac{1}{2} (\vartheta_i \vartheta_j + \varepsilon_i^\alpha \varepsilon_{j\alpha}). \quad (1.7)$$

Далее получаем следующую формулу для вектора нормали к деформированной поверхности:

$$\begin{aligned} \overset{*}{\mathbf{n}} &= \frac{1}{\sqrt{a}} \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = \mathcal{A}^{-1} \left(1 + \varepsilon_\alpha^\alpha + \frac{1}{\sqrt{a}} \varepsilon_1^\alpha \varepsilon_{2\alpha} \right) \mathbf{n} + \\ &+ \mathcal{A}^{-1} (\vartheta_\beta + c_{\beta}^\alpha c^{\nu\mu} \varepsilon_{\nu\alpha} \vartheta_\mu) \mathbf{r}^\beta. \end{aligned} \quad (1.8)_1$$

Здесь

$\mathcal{A} = \sqrt{a^*/a}$, $a^* = a_{11}^* a_{22}^* - a_{12}^{*2}$, $a = a_{11} a_{22}$, $c_{ij} = (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) \cdot \mathbf{n}$ – ковариантная компонента дискриминантного тензора поверхности.

В физических компонентах формула (1.8)₁ принимает вид

$$\mathbf{n}^* = \mathcal{A}^{-1}[(1 + \tilde{\varepsilon})\mathbf{n} + \tilde{\vartheta}_\alpha \mathbf{e}_\alpha + \tilde{\vartheta}_\beta \mathbf{e}_\beta], \quad (1.8)_2$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\vartheta}_\alpha &= (1 + \varepsilon_\beta)\vartheta_\alpha - \omega_\alpha \vartheta_\beta, \quad \tilde{\vartheta}_\beta = (1 + \varepsilon_\alpha)\vartheta_\beta - \omega_\beta \vartheta_\alpha, \\ \tilde{\varepsilon} &= \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta + \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta - \omega_\alpha \omega_\beta. \end{aligned} \quad (1.8')$$

На основании соотношений (1.2), (1.4) и формул Гаусса-Вейнгартена находим

$$\mathbf{r}_{ij}^* \triangleq \partial_j \partial_i \mathbf{r}^* = (\delta_i^\alpha + \varepsilon_i^\alpha) \mathbf{r}_{\alpha j} - (\partial_j \varepsilon_{i\alpha} + b_{j\alpha} \vartheta_i) \mathbf{r}^\alpha - (\partial_j \vartheta_i) \mathbf{n}, \quad (1.9)$$

отсюда с учетом того, что $b_{ij}^* = b_{ji}^*$, следует формула

$$\begin{aligned} \mathcal{A} b_{ij}^* &= \mathcal{A} \mathbf{n}^* \cdot \mathbf{r}_{ij}^* = (1 + \tilde{\varepsilon}) [b_{ij} - \frac{1}{2} (\partial_i \vartheta_j + \partial_j \vartheta_i - b_i^\alpha \varepsilon_{j\alpha} - b_j^\alpha \varepsilon_{i\alpha})] + \\ &+ [\Gamma_{ij}^\alpha + \Gamma_{ij}^\beta \varepsilon_\beta^\alpha + \frac{1}{2} (\nabla_i \varepsilon_j^\alpha + \nabla_j \varepsilon_i^\alpha + b_i^\alpha \vartheta_j + b_j^\alpha \vartheta_i)] \tilde{\vartheta}_\alpha. \end{aligned} \quad (1.10)$$

1.2. Деформация линии вместе с поверхностью

Формулам для \mathbf{r}_i^* (см. (1.4)) и \mathbf{n}^* (см. (1.8)₂) можно придать вид

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_i^* &= (\nu_i + \varepsilon_{i\alpha} \nu^\alpha) \boldsymbol{\nu} + (t_i + \varepsilon_{i\alpha} t^\alpha) \mathbf{t} - \vartheta_i \mathbf{n}, \\ \mathbf{n}^* &= \mathcal{A}^{-1} (1 + \tilde{\varepsilon}) \mathbf{n} + \mathcal{A}^{-1} \tilde{\vartheta}_\nu \boldsymbol{\nu} + \mathcal{A}^{-1} \tilde{\vartheta}_t \mathbf{t}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где (рис. 1.1)

$$\begin{aligned} \tilde{\vartheta}_\nu &= \vartheta_\nu + \begin{vmatrix} \vartheta_\alpha & \omega_\alpha \\ \vartheta_\beta & \varepsilon_\beta \end{vmatrix} \cos \gamma + \begin{vmatrix} \varepsilon_\alpha & \vartheta_\alpha \\ \omega_\beta & \vartheta_\beta \end{vmatrix} \sin \gamma, \\ \tilde{\vartheta}_t &= \vartheta_t - \begin{vmatrix} \vartheta_\alpha & \omega_\alpha \\ \vartheta_\beta & \varepsilon_\beta \end{vmatrix} \sin \gamma + \begin{vmatrix} \varepsilon_\alpha & \vartheta_\alpha \\ \omega_\beta & \vartheta_\beta \end{vmatrix} \cos \gamma; \end{aligned} \quad (2.2)_1$$

$$\vartheta_\nu = \vartheta_\gamma \nu^\gamma = \vartheta_\alpha \cos \gamma + \vartheta_\beta \sin \gamma = -\frac{dw}{ds_\nu} - \sigma_\nu u_\nu + \tau_\nu u_t,$$

$$\vartheta_t = \vartheta_\gamma t^\gamma = -\vartheta_\alpha \sin \gamma + \vartheta_\beta \cos \gamma = -\frac{dw}{ds_t} - \sigma_t u_t + \tau_t u_\nu; \quad (2.2)_2$$

$$\begin{aligned} u_\nu &= u_\gamma \nu^\gamma = u_\alpha \cos \gamma + u_\beta \sin \gamma, \\ u_t &= u_\gamma t^\gamma = -u_\alpha \sin \gamma + u_\beta \cos \gamma; \end{aligned} \quad (2.2)_3$$

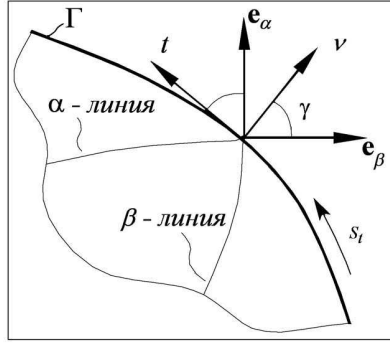


Рис. 1.1.

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{r}_1 = A \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{e}_\alpha = A \cos \gamma, \\ t_1 &= -A \sin \gamma, \quad \nu^1 = A^{-1} \cos \gamma, \\ t^1 &= -A^{-1} \sin \gamma, \quad \nu_2 = B \sin \gamma, \\ t_2 &= B \cos \gamma, \quad \nu^2 = B^{-1} \sin \gamma, \\ t^2 &= B^{-1} \cos \gamma; \end{aligned} \quad (2.2)_4$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds_t} &= t^\alpha \nabla_\alpha = -\frac{\sin \gamma}{A} \nabla_1 + \frac{\cos \gamma}{B} \nabla_2, \\ \frac{d}{ds_\nu} &= \nu^\alpha \nabla_\alpha = \frac{\cos \gamma}{A} \nabla_1 + \frac{\sin \gamma}{B} \nabla_2; \end{aligned} \quad (2.2)_5$$

$$\begin{aligned} \sigma_t &= \sigma_\alpha \sin^2 \gamma + \tau_{\alpha\beta} \sin 2\gamma + \sigma_\beta \cos^2 \gamma, \\ \tau_t &= \frac{1}{2}(\sigma_\alpha - \sigma_\beta) \sin 2\gamma + \tau_{\alpha\beta} \cos 2\gamma, \\ \sigma_\nu &= \sigma_\alpha \cos^2 \gamma - \tau_{\alpha\beta} \sin 2\gamma + \sigma_\beta \sin^2 \gamma. \end{aligned} \quad (2.2)_6$$

Выведем теперь формулы для \mathbf{t}^* и $\boldsymbol{\nu}^*$ в проекциях на направления $\boldsymbol{\nu}$, \mathbf{t} , \mathbf{n} . Вводя параметр, характеризующий кратность удлинения элемента линии Γ (см. рис. 1.1)

$$\lambda_t = ds_t^*/ds_t,$$

находим

$$\begin{aligned} \mathbf{t}^* &= \frac{d\mathbf{r}^*}{ds_t^*} = \lambda_t^{-1} \frac{d\mathbf{r}}{ds_t} = \lambda_t^{-1} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha^\beta} \frac{d\alpha^\beta}{ds_t} = \lambda_t^{-1} t^\beta \mathbf{r}_\beta = \\ &= \lambda_t^{-1} [(1 + \varepsilon_{tt})\mathbf{t} - \omega_{tt}\boldsymbol{\nu} - \vartheta_t \mathbf{n}], \end{aligned} \quad (2.4)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_{tt} &= \varepsilon_{\alpha\beta} t^\alpha t^\beta = \varepsilon_\beta \cos^2 \gamma - \frac{\omega}{2} \sin 2\gamma + \varepsilon_\alpha \sin^2 \gamma = \\ &= \frac{du_t}{ds_t} + \rho_t u_\nu - \sigma_t w, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\omega_{tt} &= \varepsilon_{\alpha\beta} t^\alpha \nu^\beta = \omega_\beta \cos^2 \gamma + (\varepsilon_\beta - \varepsilon_\alpha) \sin \gamma \cos \gamma - \omega_\alpha \sin^2 \gamma = \\
&= \frac{du_\nu}{ds_t} - \rho_t u_t + \tau_t w; \\
\omega &= \omega_\alpha + \omega_\beta, \quad \rho_t = \frac{d\gamma}{ds_t} + \frac{\cos \gamma}{A} \Gamma_{21}^2 + \frac{\sin \gamma}{B} \Gamma_{12}^1. \quad (2.4')
\end{aligned}$$

В последней формуле (для геодезической кривизны ρ_t) приняты обозначения Γ_{ij}^k для символов Кристоффеля 2-го рода. Ниже эти символы, связанные с ковариантным дифференцированием, будут неоднократно использоваться. Поэтому приведем здесь всю их совокупность. Имеем

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \alpha}, \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \beta}, \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{B}{A^2} \frac{\partial B}{\partial \alpha}, \\
\Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \beta}, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \alpha}, \quad \Gamma_{11}^2 = -\frac{A}{B^2} \frac{\partial A}{\partial \beta}. \quad (2.4)
\end{aligned}$$

□ Справедлива формула Фосса-Вейля для “сокращенных символов Кристоффеля”

$$\Gamma_{\alpha j}^\alpha = \frac{1}{\sqrt{a}} \partial_j \sqrt{a}, \quad (2.5)$$

с помощью которой нетрудно установить следующие полезные равенства:

$$\begin{aligned}
\sqrt{a} \nabla_\alpha u^\alpha &= \partial_\alpha (\sqrt{a} u^\alpha), \\
\sqrt{a} \nabla_\alpha t^{\alpha i} &= \partial_\alpha (\sqrt{a} t^{\alpha i}) + \sqrt{a} \Gamma_{\alpha\beta}^i t^{\alpha\beta}. \quad (2.6)
\end{aligned}$$

Последние соотношения использовались, в свою очередь, при выводе автором формул интегрирования по частям, связанных как с исходной, так и с актуальной конфигурациями поверхности [11]:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega u^\beta \partial_\beta v d\Omega &= - \int_\Omega \frac{1}{\sqrt{a}} \partial_\beta (\sqrt{a} u^\beta) v d\Omega + \int_{\partial\Omega} \nu_\beta u^\beta v ds_t, \\
\int_\Omega t^{\alpha\beta} \nabla_\alpha u_\beta d\Omega &= - \int_\Omega A \nabla_\alpha (A^{-1} t^{\alpha\beta}) u_\beta d\Omega + \int_{\partial\Omega} \nu_\alpha t^{\alpha\beta} u_\beta ds_t \quad (2.7)
\end{aligned}$$

(Ω – область на поверхности, $\partial\Omega$ – ее граница). ■

Из соотношения (2.4) вытекает, в частности, следующая формула:

$$\lambda_t^2 = 1 + 2\varepsilon_{tt} + \varepsilon_{tt}^2 + \omega_{tt}^2 + \vartheta_t^2. \quad (2.8)$$

И, наконец, используя формулы (2.1), (2.4), находим

$$\begin{aligned}
\tilde{\nu} &= \tilde{\mathbf{t}} \times \tilde{\mathbf{n}} = (\lambda_t \mathcal{A})^{-1} [(1 + \tilde{\varepsilon})(1 + \varepsilon_{tt}) + \vartheta_t \tilde{\vartheta}_t] \nu - \\
&- (\lambda_t \mathcal{A})^{-1} [(1 + \tilde{\varepsilon})\omega_{tt} - \vartheta_\nu \tilde{\vartheta}_\nu] \mathbf{t} - (\lambda_t \mathcal{A})^{-1} [(1 + \varepsilon_{tt})\tilde{\vartheta}_\nu + \omega_{tt} \tilde{\vartheta}_t] \mathbf{n}. \quad (2.9)
\end{aligned}$$

2. Линейная теория оболочек

2.1. Уравнения неразрывности деформаций срединной поверхности оболочки

Геометрическую гипотезу Кирхгофа можно записать так (см. форм. (1.1.2)):

$$\mathbf{R}(\alpha, \xi) = \mathbf{r}(\alpha) + \xi \mathbf{n}(\alpha) \xrightarrow{\text{deform}} \mathbf{R}^*(\alpha, \xi) = \mathbf{r}^*(\alpha) + \xi \mathbf{n}^*(\alpha). \quad (1.1)$$

В работе [12] показано, что “нет никакого смысла” сохранять слагаемые порядка h/R_α , h/R_β , $h/R_{\alpha\beta}$ (ниже – критерий Н-Ф), так как теорией, основанной на допущении (1.1), ряд слагаемых такого порядка все равно не учитывается. Следствием принятия критерия Н-Ф является то, что величины, зависящие от ξ следует учитывать в линейном приближении по этой переменной. Ниже линейную аппроксимацию будем использовать, не оговариваясь.

На основании соотношений (1.1.2), (1.1) имеем

$$\mathbf{u}^\xi = \mathbf{R}^* - \mathbf{R} = \mathbf{u} + \xi(\mathbf{n}^* - \mathbf{n}). \quad (1.2)$$

Учитывая, что в рамках линейной теории (см. форм. (1.1.8)₁)

$$\mathbf{n}^* = \mathbf{n} + \vartheta_\gamma \mathbf{r}^\gamma, \quad (1.3)$$

формуле (1.2) можно придать вид

$$\mathbf{u}^\xi = \mathbf{u} + \xi \vartheta_\gamma \mathbf{r}^\gamma. \quad (1.4)$$

Принимая во внимание, что (см. (1.1.4), (1.3))

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_i^* &\triangleq \partial_i \mathbf{r}^* = \mathbf{r}_i + \varepsilon_{i\alpha} \mathbf{r}^\alpha - \vartheta_i \mathbf{n}, \\ \mathbf{n}_i^* &\triangleq \partial_i \mathbf{n}^* = \mathbf{n}_i + (\nabla_i \vartheta_\alpha) \mathbf{r}^\alpha + b_i^\alpha \vartheta_\alpha \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_i^* &\triangleq \partial_i \mathbf{R}^* = \mathbf{r}_i^* + \xi \mathbf{n}_i^* = \mathbf{R}_i + (\varepsilon_{i\alpha} + \xi \nabla_i \vartheta_\alpha) \mathbf{r}^\alpha + \\ &+ (-\delta_i^\alpha + \xi b_i^\alpha) \vartheta_\alpha \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где

$$\mathbf{R}_i = (\delta_i^\alpha - \xi b_i^\alpha) \mathbf{r}_\alpha. \quad (1.6')$$

Выведем формулы для векторов взаимного базиса исходной конфигурации \mathbf{R}^j путем предварительного вычисления контравариантных компонент метрического тензора \mathbf{G} , которые понадобятся при получении соотношений закона Гука.

Прежде всего, на основании формулы (1.6') имеем ($\mathbf{R}_3 = \mathbf{n}$)

$$g_{ij} = \mathbf{R}_i \cdot \mathbf{R}_j = a_{ij} - 2\xi b_{ij} + \xi^2 b_i^\alpha b_{j\alpha} \approx a_{ij} - 2\xi b_{ij},$$

$$g_{i3} = 0, \quad g_{33} = 1, \quad i, j = 1, 2. \quad (1.7)$$

Определитель матрицы метрического тензора имеет следующие вид и значение:

$$g = \det[g_{ij}] = \begin{vmatrix} a_{11} - 2\xi b_{11} & -2\xi b_{12} & 0 \\ -2\xi b_{12} & a_{22} - 2\xi b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \approx a(1 - 2\xi b_\alpha^\alpha). \quad (1.8)$$

Компоненты g^{ij} будем вычислять по известной формуле

$$g^{ij} = g^{-1} \tilde{g}^{ij},$$

где \tilde{g}^{ij} – алгебраическое дополнение элемента g_{ij} в определителе (1.8).

В результате простейших выкладок получаем

$$g^{ij} = a^{ij} + 2\xi a^{i\alpha} b_\alpha^j, \quad g^{i3} = 0, \quad g^{33} = 1, \quad i, j = 1, 2. \quad (1.9)$$

С помощью этих соотношений находим

$$\mathbf{R}^i = g^{i\alpha} \mathbf{R}_\alpha = a^{i\alpha} (\mathbf{r}_\alpha + \xi b_\alpha^\beta \mathbf{r}_\beta),$$

$$\mathbf{R}^3 = g^{3\alpha} \mathbf{R}_\alpha = g^{33} \mathbf{R}_3 = \mathbf{R}_3 = \mathbf{n}. \quad \blacksquare \quad (1.10)$$

Тензор-градиент движения (deformation gradient) [13] в выбранной координации $(\alpha^1, \alpha^2, \xi)$ имеет вид

$$\mathbf{V} = \mathbf{R}_\alpha^* \otimes \mathbf{R}^\alpha + \mathbf{n}^* \otimes \mathbf{n}. \quad (1.11)$$

Принимая во внимание, что

$$\mathbf{1} = \mathbf{R}_\alpha \otimes \mathbf{R}^\alpha + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n},$$

с учетом формул (1.3), (1.6), и (1.10) находим

$$\mathbf{V} - \mathbf{1} = [\varepsilon_{\nu\mu} + \xi (\nabla_\nu \vartheta_\mu + \varepsilon_{\gamma\mu} b_\nu^\gamma)] \mathbf{r}^\mu \otimes \mathbf{r}^\nu + \vartheta_\mu (\mathbf{r}^\mu \otimes \mathbf{n} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{r}^\mu). \quad (1.12)$$

Используя (1.12), получаем следующее выражение для тензора малых деформаций Коши [11]:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &\triangleq e_{\nu\mu}^{\xi} \mathbf{r}^{\nu} \otimes \mathbf{r}^{\mu} = \frac{1}{2}[\mathbf{V} - \mathbf{1} + (\mathbf{V} - \mathbf{1})^*] = \\ &= \frac{1}{2}[\varepsilon_{\nu\mu} + \varepsilon_{\mu\nu} + \xi(\nabla_{\nu}\vartheta_{\mu} + \nabla_{\mu}\vartheta_{\nu} + \varepsilon_{\gamma\mu}b_{\nu}^{\gamma} + \varepsilon_{\gamma\nu}b_{\mu}^{\gamma})]\mathbf{r}^{\nu} \otimes \mathbf{r}^{\mu} \triangleq \\ &\triangleq (e_{\nu\mu} + \xi \varkappa_{\nu\mu})\mathbf{r}^{\nu} \otimes \mathbf{r}^{\mu}, \end{aligned} \quad (1.13)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} e_{ij} &= \frac{1}{2}(\varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ji}) = \frac{1}{2}(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i) - b_{ij} w, \\ \varkappa_{ij} &= \frac{1}{2}(\nabla_i \vartheta_j + \nabla_j \vartheta_i) + \frac{1}{2}(\varepsilon_{\nu i} b_j^{\nu} + \varepsilon_{\nu j} b_i^{\nu}). \end{aligned} \quad (1.13')$$

С помощью формул (1.5) в рамках линейной теории находим

$$b_{ij}^* = b_{ij} + \varepsilon_{i\nu} b_j^{\nu} - \nabla_j \vartheta_i = b_{ij} + \varepsilon_{j\nu} b_i^{\nu} - \nabla_i \vartheta_j \quad (1.14)$$

или

$$b_{ij} - b_{ij}^* = \frac{1}{2}(\nabla_i \vartheta_j + \nabla_j \vartheta_i) - \frac{1}{2}(\varepsilon_{i\nu} b_j^{\nu} + \varepsilon_{j\nu} b_i^{\nu}). \quad (1.14')$$

Вычитая последнее равенство из (1.13')₂, получим

$$\varkappa_{ij} = b_{ij} - \underbrace{b_{ij}^*}_{\varepsilon_{i\nu} b_j^{\nu} + \varepsilon_{j\nu} b_i^{\nu}}. \quad (1.15)$$

На основании равенств (1.13), (1.15) имеем

$$e_{ij}^{\xi} = e_{ij} + \xi(\underbrace{e_{i\nu} b_j^{\nu} + e_{j\nu} b_i^{\nu}}_{\varepsilon_{i\nu} b_j^{\nu} + \varepsilon_{j\nu} b_i^{\nu}}) + \xi(b_{ij} - b_{ij}^*), \quad (1.16)$$

т.е. подчеркнутые слагаемые в формуле для компонент тензора Коши на основании критерия Н-Ф следует отбрасывать и соответственно формулу (1.15) – принимать в виде

$$\varkappa_{ij} = b_{ij} - b_{ij}^*. \quad (1.17)$$

Далее на основании (1.12) приходим к следующей формуле для тензора поворота материальной частицы оболочки:

$$\mathbf{\Omega} = \frac{1}{2}[\mathbf{V} - \mathbf{1} - (\mathbf{V} - \mathbf{1})^*] =$$

$$= \frac{1}{2} [\nabla_\mu u_\nu - \nabla_\nu u_\mu + \xi (\nabla_\mu \vartheta_\nu - \nabla_\nu \vartheta_\mu + \varepsilon_{\gamma\nu} b_\mu^\gamma - \varepsilon_{\gamma\mu} b_\nu^\gamma)] \mathbf{r}^\nu \otimes \mathbf{r}^\mu + \vartheta_\mu (\mathbf{r}^\mu \otimes \mathbf{n} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{r}^\mu). \quad (1.18)$$

Тензор же, описывающий поворот окрестности точки на срединной поверхности, определяется формулой

$$\mathbf{\Omega}|_{\xi=0} = \frac{1}{2} (\nabla_\mu u_\nu - \nabla_\nu u_\mu) \mathbf{r}^\nu \otimes \mathbf{r}^\mu + \vartheta_\mu (\mathbf{r}^\mu \otimes \mathbf{n} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{r}^\mu). \quad (1.19)$$

Кососимметричному тензору (1.19) отвечает следующий сопутствующий вектор:

$$\boldsymbol{\omega} = c^{\nu\mu} \vartheta_\nu \mathbf{r}_\mu + \omega_n \mathbf{n}, \quad (1.20)$$

где

$$\omega_n = \frac{1}{2} c^{\nu\mu} \nabla_\nu u_\mu = \frac{1}{2} c^{\nu\mu} \varepsilon_{\nu\mu}. \quad (1.20')$$

Используя формулу (1.20), получаем

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n} = c^{\nu\mu} c_{\gamma\mu} \vartheta_\nu \mathbf{r}^\gamma = \delta_\gamma^\nu \vartheta_\nu \mathbf{r}^\gamma = \vartheta_\nu \mathbf{r}^\nu,$$

т.е. соотношению (1.4) можно придать вид

$$\mathbf{u}^\xi = \mathbf{u} + \boldsymbol{\omega} \times \xi \mathbf{n}. \quad (1.21)$$

Дифференцируя (1.20), придем к следующему равенству:

$$\partial_i \boldsymbol{\omega} = c^{\nu\mu} \chi_{i\nu} \mathbf{r}_\mu + \zeta_i \mathbf{n}, \quad (1.22)$$

где

$$\chi_{ij} = \nabla_i \vartheta_j - c_{j\gamma} b_i^\gamma \omega_n, \quad \zeta_i = \partial_i \omega_n + c^{\nu\mu} b_{i\mu} \vartheta_\nu. \quad (1.22')$$

Учитывая, что на основании соотношений (1.14), (1.17)

$$\mathfrak{a}_{ij} = \nabla_i u_j - b_i^\nu \varepsilon_{j\nu}, \quad (1.23)$$

и принимая во внимание (1.20'), первую формулу из (1.22') можно записать в виде

$$\chi_{ij} = \mathfrak{a}_{ij} + b_i^\nu \varepsilon_{j\nu} - \frac{1}{2} c_{j\gamma} c^{\nu\mu} b_i^\gamma \varepsilon_{\nu\mu} = \mathfrak{a}_{ij} + b_i^\nu e_{j\nu}. \quad (1.24)$$

□ Переходя в формулах (1.22'), (1.24) к физическим компонентам и учитывая соотношения (1.1.6), получим

$$\mathfrak{a}_\alpha \triangleq \chi_{\langle 11 \rangle} = \tau_\alpha + \tau_{\alpha\beta} \omega_n, \quad \mathfrak{a}_\beta \triangleq \chi_{\langle 22 \rangle} = \tau_\beta - \tau_{\alpha\beta} \omega_n; \quad (1.25)_1$$

$$\chi_{\langle 12 \rangle} = \tau + \sigma_\alpha \frac{\omega}{2} + \tau_{\alpha\beta} \varepsilon_\alpha, \quad \chi_{\langle 21 \rangle} = \tau + \sigma_\beta \frac{\omega}{2} + \tau_{\alpha\beta} \varepsilon_\beta, \quad (1.25)_2$$

где

$$\omega_n = \frac{1}{2AB} \left(\frac{\partial B u_\beta}{\partial \alpha} - \frac{\partial A u_\alpha}{\partial \beta} \right) = \frac{\omega_\alpha - \omega_\beta}{2}; \quad (1.25')$$

$$\tau_\alpha = \frac{1}{A} \frac{\partial \vartheta_\beta}{\partial \alpha} - \rho_\alpha \vartheta_\alpha, \quad \tau_\beta = \frac{1}{B} \frac{\partial \vartheta_\alpha}{\partial \beta} - \rho_\beta \vartheta_\beta,$$

$$\begin{aligned} \tau = \varkappa_{\langle 12 \rangle} - \tau_{\alpha\beta} (\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta) &= \tau_\alpha - \sigma_\beta \omega_\alpha - \tau_{\alpha\beta} \varepsilon_\beta = \\ &= \tau_\beta - \sigma_\alpha \omega_\beta - \tau_{\alpha\beta} \varepsilon_\alpha. \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (1.25'')$$

Далее на основании соотношений (1.1.5)₁ и (1.13')₁ имеем

$$\varepsilon_{ij} = e_{ij} + \frac{1}{2} (\nabla_i u_j - \nabla_j u_i).$$

С учетом этой формулы соотношению (1.1.4) можно придать вид

$$\partial_i \mathbf{u} = [e_{i\nu} + \frac{1}{2} (\nabla_i u_\nu - \nabla_\nu u_i)] \mathbf{r}^\nu - \vartheta_i \mathbf{n}. \quad (1.26)$$

С другой стороны, нетрудно убедиться в справедливости равенства

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i = \frac{1}{2} (\nabla_i u_\nu - \nabla_\nu u_i) \mathbf{r}^\nu - \vartheta_i \mathbf{n}. \quad (1.27)$$

Сравнивая соотношения (1.26) и (1.27), получаем

$$\partial_i \mathbf{u} = e_{i\nu} \mathbf{r}^\nu + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i. \quad (1.28)$$

Основываясь на формулах (1.22), (1.28), уравнения неразрывности деформаций выведем путем раскрытия равенств

$$\partial_1 \partial_2 \boldsymbol{\omega} = \partial_2 \partial_1 \boldsymbol{\omega}, \quad \partial_1 \partial_2 \mathbf{u} = \partial_2 \partial_1 \mathbf{u}. \quad (1.29)$$

Раскрывая первое равенство (1.29), в результате громоздких, но несложных преобразований получим

$$\begin{aligned} \nabla_\mu (c^{\nu\mu} c^{\alpha i} \chi_{\nu\alpha}) + b_\nu^i c^{\nu\mu} \zeta_\mu &= 0, \quad i = 1, 2, \\ -\nabla_\nu (c^{\nu\mu} \zeta_\mu) + b_{\mu\beta} (c^{\nu\mu} c^{\alpha\beta} \chi_{\nu\alpha}) &= 0. \end{aligned} \quad (1.30)$$

На основании второго равенства (1.29) приходим к следующим скалярным уравнениям:

$$\nabla_\mu (c^{\nu\mu} c^{i\alpha} e_{\nu\alpha}) + c^{i\mu} \zeta_\mu = 0, \quad i = 1, 2,$$

$$c^{\nu\mu}(b_\mu^\alpha e_{\nu\alpha} - \chi_{\mu\nu}) = 0. \quad (1.31)$$

Последнее уравнение удовлетворяется тождественно, что легко усматривается с учетом формулы (1.24).

Исключив величины $c^{\nu\mu}\zeta_\mu$ с помощью уравнения (1.31)₁ из уравнений (1.30), получим следующую систему *уравнений неразрывности*:

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha(c^{\nu\alpha}c^{\mu i}\chi_{\nu\mu}) + b_\beta^i\nabla_\alpha(c^{\nu\alpha}c^{\mu\beta}e_{\nu\mu}) &= 0, \quad i = 1, 2, \\ \nabla_\alpha\nabla_\beta(c^{\nu\alpha}c^{\mu\beta}e_{\nu\mu}) - b_{\alpha\beta}(c^{\nu\alpha}c^{\mu\beta}\chi_{\nu\mu}) &= 0. \end{aligned} \quad (1.32)$$

2.2. Уравнения равновесия

2.2.1. Вспомогательные соотношения

Компоненты тензора Грина-Лагранжа для оболочки, как трехмерного тела, определяются по формулам (см. (1.7), (1.17))

$$\gamma_{ij}^\xi = \frac{1}{2}(g_{ij}^* - g_{ij}) = \gamma_{ij} + \xi\alpha_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \quad (2.1)$$

где

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij}^* - a_{ij}), \quad \alpha_{ij} = b_{ij} - b_{ij}^*. \quad (2.1')$$

□ Ниже вплоть до уравнений равновесия все соотношения записываются в терминах величин, относящихся к актуальной конфигурации, однако знак “*” над ними не ставится для упрощения записи. Начиная с уравнений равновесия отсутствие знака “*” будет означать, как и прежде, “принадлежность” к исходной конфигурации, так как в линейной теории упомянутые конфигурации не различаются. ■

С учетом сделанного замечания на основании (2.1) можно записать

$$\delta\gamma_{ij}^\xi = \frac{1}{2}\delta a_{ij} - \xi\delta b_{ij}, \quad (2.2)$$

где

$$\begin{aligned} \delta a_{ij} &= \mathbf{r}_i \cdot \delta \mathbf{r}_j + \mathbf{r}_j \cdot \delta \mathbf{r}_i, \\ \delta b_{ij} &= \nabla_i(\mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{r}_j) + b_i^\nu \mathbf{r}_\nu \cdot \partial_j \delta \mathbf{r}. \end{aligned} \quad (2.2')$$

Справедливость последней формулы усматривается из следующих соотношений:

$$\begin{aligned} \underline{\nabla_i \delta \mathbf{r}_j} &= \partial_i \delta \mathbf{r}_j - \Gamma_{ij}^\alpha \delta \mathbf{r}_\alpha = \delta \mathbf{r}_{ij} - \Gamma_{ij}^\alpha \delta \mathbf{r}_\alpha = \\ &= \delta(\Gamma_{ij}^\alpha \mathbf{r}_\alpha + b_{ij} \mathbf{n}) - \Gamma_{ij}^\alpha \mathbf{r}_\alpha = \delta(\Gamma_{ij}^\alpha) \mathbf{r}_\alpha + (\delta b_{ij}) \mathbf{n} - b_{ij} \delta \mathbf{n}, \end{aligned}$$

$$\nabla_i(\mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{r}_j) = -b_i^\alpha \mathbf{r}_\alpha \cdot \delta \mathbf{r}_j + \mathbf{n} \cdot \underline{\nabla_i \delta \mathbf{r}_j} = -b_i^\alpha \mathbf{r}_\alpha \cdot \delta \mathbf{r}_j + \delta b_{ij}.$$

Вычислим далее элементарный объем деформированной оболочки. Имеем (см. форм. (1.6))

$$\begin{aligned} dV &= (\mathbf{R}_1 d\alpha^1 \times \mathbf{R}_2 d\alpha^2) \cdot \mathbf{n} d\xi = \\ &= [1 - \xi b_\alpha^\alpha + \xi^2 (b_1^1 b_2^2 - b_1^2 b_2^1)] \sqrt{a} d\alpha^1 d\alpha^2 d\xi = d\Omega d\xi. \end{aligned} \quad (2.3)$$

(Подчеркнутые слагаемые следует отбрасывать в соответствии с критерием Н-Ф.)

2.2.2. Полевые уравнения равновесия

Выведем полевые уравнения равновесия оболочки, исходя из вариационного уравнения Лагранжа

$$\delta U = A(\delta \mathbf{u}^\xi). \quad (2.4)$$

Вариация упругой энергии деформации с учетом соотношений (2.2), (2.2') может быть преобразована следующим образом:

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \left[\int_{-h/2}^{h/2} \sigma^{\alpha\beta} (\delta a_{\alpha\beta} - \xi \delta b_{\alpha\beta}) d\xi \right] d\Omega = \\ &= \int_{\Omega} [S^{\alpha\beta} \mathbf{r}_\alpha \cdot \delta \mathbf{r}_\beta - M^{\alpha\beta} \nabla_\alpha (\mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{r}_\beta) - M^{\alpha\beta} b_\alpha^\nu \mathbf{r}_\nu \cdot \partial_\beta \delta \mathbf{r}] d\Omega, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где

$$S^{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma^{ij} d\xi, \quad M^{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma^{ij} \xi d\xi. \quad (2.5')$$

Используя формулы интегрирования по частям (1.2.7), получаем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} S^{\alpha\beta} \mathbf{r}_\alpha \cdot \partial_\beta \delta \mathbf{r} d\Omega &= - \int_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{a}} \partial_\beta (\sqrt{a} S^{\alpha\beta} \mathbf{r}_\alpha) \cdot \delta \mathbf{r} d\Omega + \\ &+ \oint_{\partial\Omega} S^{\alpha\beta} \nu_\beta \mathbf{r}_\alpha \cdot \delta \mathbf{r} ds_t; \\ - \int_{\Omega} M^{\alpha\beta} \nabla_\alpha (\mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{r}_\beta) d\Omega &= - \int_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{a}} \partial_\beta [\sqrt{a} (\nabla_\alpha M^{\alpha\beta}) \mathbf{n}] \cdot \delta \mathbf{r} d\Omega + \\ &+ \oint_{\partial\Omega} (\nabla_\alpha M^{\alpha\beta}) \nu_\beta \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{r} ds_t + \oint_{\partial\Omega} M^{\alpha\beta} \nu_\alpha \mathbf{r}_\beta \cdot \delta \mathbf{n} ds_t; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\int_{\Omega} M^{\alpha\beta} b_{\alpha}^{\nu} \mathbf{r}_{\nu} \cdot \partial_{\beta} \delta \mathbf{r} d\Omega &= \int_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{a}} \partial_{\beta} (\sqrt{a} M^{\alpha\beta} b_{\alpha}^{\nu} \mathbf{r}_{\nu}) \cdot \delta \mathbf{r} d\Omega - \\
&- \oint_{\partial\Omega} M^{\alpha\beta} \nu_{\beta} b_{\alpha}^{\nu} \mathbf{r}_{\nu} \cdot \delta \mathbf{r} ds_t. \tag{2.6}
\end{aligned}$$

Вводя обозначения

$$\delta U = \int_{\Omega} \{\dots\}_1 d\Omega + \int_{\partial\Omega} \{\dots\}_2 ds_t, \tag{2.7}$$

$$T^{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma^{\alpha i} \mathbf{R}_{\alpha} \cdot \mathbf{r}^i d\xi = S^{ij} - b_{\alpha}^j M^{\alpha i}, \tag{2.8}$$

находим

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} \{\dots\}_1 d\Omega = \\
&= - \int_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{a}} [\partial_{\beta} (\sqrt{a} T^{\beta\nu}) \mathbf{r}_{\nu} + \sqrt{a} T^{\beta\nu} (\Gamma_{\beta\nu}^{\mu} \mathbf{r}_{\mu} + b_{\beta\nu} \mathbf{n}) + \\
&+ \partial_{\beta} (\sqrt{a} \nabla_{\alpha} M^{\alpha\beta}) \mathbf{n} - \sqrt{a} (\nabla_{\alpha} M^{\alpha\beta}) b_{\beta}^{\mu} \mathbf{r}_{\mu}] \cdot \delta \mathbf{r} d\Omega. \tag{2.9}
\end{aligned}$$

В предположении, что вариации на границе $\partial\Omega$ отсутствуют, на основании (2.4) можно записать

$$\begin{aligned}
\partial_{\beta} (\sqrt{a} T^{\beta i}) + \sqrt{a} \Gamma_{\beta\nu}^i T^{\beta\nu} - \sqrt{a} b_{\beta}^i \nabla_{\alpha} M^{\alpha\beta} &= -\sqrt{a} f^i, \\
\partial_{\beta} (\sqrt{a} \nabla_{\alpha} M^{\alpha\beta}) + \sqrt{a} T^{\beta\nu} b_{\beta\nu} &= -\sqrt{a} f_n, \tag{2.10}
\end{aligned}$$

где f^i, f_n – функции, которые будут определены после раскрытия правой части уравнения (2.4).

Принимая во внимание формулы (1.2.6) *полевым уравнениям равновесия* (2.10) можно придать вид

$$\begin{aligned}
\nabla_{\alpha} T^{\alpha i} - b_{\beta}^i \nabla_{\alpha} M^{\alpha\beta} &= -f^i, \quad i = 1, 2, \\
\nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} M^{\alpha\beta} + b_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} &= -f_n. \tag{2.11}
\end{aligned}$$

Раскроем теперь правую часть уравнения Лагранжа (2.4). При этом отдельно рассмотрим работу внешних сил, действующих на лицевые поверхности, $-A_{\Omega}(\delta \mathbf{u}^{\xi})$ и работу сил, приложенных к боковой поверхности, $-A_{\partial\Omega}(\delta \mathbf{u}^{\xi})$. Имеем

$$A_{\Omega}(\delta \mathbf{u}^{\xi}) = \int_{\Omega} (\mathbf{q}^+ \cdot \delta \mathbf{u}^+ - \mathbf{q}^- \cdot \delta \mathbf{u}^-) d\Omega, \tag{2.12}$$

где

$$\delta \mathbf{u}^{\pm} = \delta \mathbf{r} \pm \frac{1}{2} h \delta \mathbf{n}. \quad (2.12')$$

Используя обозначения

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \mathbf{q}^+ - \mathbf{q}^- = q^{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} + q_n \mathbf{n}, \\ \mathbf{m} &= \frac{1}{2} h (\mathbf{q}^+ + \mathbf{q}^-) = m^{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} + m_n \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

выражению (2.12) можно придать вид

$$\begin{aligned} A_{\Omega}(\delta \mathbf{u}^{\xi}) &= \int_{\Omega} (\mathbf{q} \cdot \delta \mathbf{r} + m^{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \cdot \delta \mathbf{n}) d\Omega = \\ &= \int_{\Omega} [(q^{\beta} - m^{\alpha} b_{\alpha}^{\beta}) \mathbf{r}_{\beta} + (q_n + \nabla_{\alpha} m^{\alpha}) \mathbf{n}] \cdot \delta \mathbf{r} d\Omega - \oint_{\partial \Omega} m^{\alpha} \nu_{\alpha} \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{r} ds_t. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Таким образом, имеем

$$f^i = q^i - \underline{\underline{m^{\alpha} b_{\alpha}^i}}, \quad f_n = q_n + \nabla_{\alpha} m^{\alpha}. \quad (2.15)$$

(Подчеркнутым слагаемым в соответствии с критерием Н-Ф и формулой (2.13)₂ следует пренебрегать.)

2.2.3. Операторная форма записи полевых уравнений равновесия

Для получения уравнений, удобных для практического применения, проще исходить из системы (2.10), (2.15). Преобразовав эту систему с использованием формулы (1.2.7)₂ и перейдя к физическим компонентам, получим три уравнения равновесия относительно следующих семи статических величин:

$$\begin{aligned} T_{\alpha} &\triangleq T_{\langle 11 \rangle}, \quad T_{\beta} \triangleq T_{\langle 22 \rangle}, \quad T_{\langle 12 \rangle}, \quad T_{\langle 21 \rangle}, \\ M_{\alpha} &\triangleq M_{\langle 11 \rangle}, \quad M_{\beta} \triangleq M_{\langle 22 \rangle}, \quad H \triangleq M_{\langle 12 \rangle} = M_{\langle 21 \rangle}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Очевидно, что седьмая искомая статическая величина появилась из-за несимметричности компонент T^{ij} . Если же вернуться к усилиям S^{ij} , то искомым величин будет шесть. Однако более компактные и удобные для преобразований уравнения получаются, если использовать комбинированную систему величин, предложенную В.В. Новожиловым [4]

$$T_{\alpha}, \quad T_{\beta}, \quad S = S_{\langle 12 \rangle} = S_{\langle 21 \rangle}, \quad M_{\alpha}, \quad M_{\beta}, \quad H, \quad (2.17)$$

исключив из уравнений равновесия величины $T_{\langle 12 \rangle}, T_{\langle 21 \rangle}$ с помощью формул

$$T_{\langle 12 \rangle} = S + \tau_{\alpha\beta} M_\alpha - \sigma_\beta H, \quad T_{\langle 21 \rangle} = S + \tau_{\alpha\beta} M_\beta - \sigma_\alpha H. \quad (2.18)$$

Окончательно систему уравнений равновесия, преобразованную с учетом соотношений Гаусса-Петерсона-Кодацци

$$\begin{aligned} \frac{\partial A \sigma_\alpha}{\partial \beta} + \frac{1}{B} \frac{\partial B^2 \tau_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} &= \sigma_\beta \frac{\partial A}{\partial \beta}, \quad \frac{\partial B \sigma_\beta}{\partial \alpha} + \frac{1}{A} \frac{\partial A^2 \tau_{\alpha\beta}}{\partial \beta} = \sigma_\alpha \frac{\partial B}{\partial \alpha}, \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) &= -AB(\sigma_\alpha \sigma_\beta - \tau_{\alpha\beta}^2), \end{aligned} \quad (2.19)$$

можно представить в следующем виде:

$$R_\circ \mathbf{L}_1 t + \mathbf{L}_2 m = -ABq, \quad (2.20)$$

где (\oplus – знак транспонирования)

$$t = (T_\alpha, S, T_\beta)^\oplus, \quad m = (M_\alpha, H, M_\beta)^\oplus, \quad q = (q_\alpha, q'_n, q_\beta)^\oplus.$$

$$(q'_n = q_n + \frac{1}{B} \frac{\partial B m_{\langle 1 \rangle}}{\partial \alpha} + \frac{1}{A} \frac{\partial A m_{\langle 2 \rangle}}{\partial \beta}); \quad (2.20')$$

$$R_\circ \mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial B(\cdot)}{\partial \alpha} & \frac{1}{A} \frac{\partial A^2(\cdot)}{\partial \beta} & -\frac{\partial B}{\partial \alpha} \\ AB\sigma_\alpha & -2AB\tau_{\alpha\beta} & AB\sigma_\beta \\ -\frac{\partial A}{\partial \beta} & \frac{1}{B} \frac{\partial B^2(\cdot)}{\partial \alpha} & \frac{\partial A(\cdot)}{\partial \beta} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{L}_2 = \begin{bmatrix} -\sigma_\alpha \frac{\partial B(\cdot)}{\partial \alpha} & l_{\alpha\beta}^{(2)} & l_{\alpha\beta}^{(3)} \\ l_{\alpha\beta}^{(\circ)} & l & l_{\beta\alpha}^{(\circ)} \\ l_{\beta\alpha}^{(3)} & l_{\beta\alpha}^{(2)} & -\sigma_\beta \frac{\partial A(\cdot)}{\partial \beta} \end{bmatrix},$$

$$l_{\alpha\beta}^{(\circ)} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{1}{A} \frac{\partial B(\cdot)}{\partial \alpha} - \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} - AB\tau_{\alpha\beta}^2,$$

$$l_{\alpha\beta}^{(2)} = -\frac{\sigma_\alpha}{A} \frac{\partial A^2(\cdot)}{\partial \beta} - \frac{\partial A \sigma_\alpha(\cdot)}{\partial \beta} - \sigma_\beta \frac{\partial A}{\partial \beta} + \frac{\tau_{\alpha\beta}}{B} \frac{\partial B^2(\cdot)}{\partial \alpha},$$

$$l_{\alpha\beta}^{(3)} = \sigma_\alpha \frac{\partial B}{\partial \alpha} + 2\tau_{\alpha\beta} \frac{\partial A(\cdot)}{\partial \beta} + A \frac{\partial \tau_{\alpha\beta}}{\partial \beta},$$

$$l = \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{1}{A^2} \frac{\partial A^2(\cdot)}{\partial \beta} + \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{1}{B^2} \frac{\partial B^2(\cdot)}{\partial \alpha} + AB(\sigma_\alpha + \sigma_\beta)\tau_{\alpha\beta},$$

$$(l_{\beta\alpha}^{(\circ)}, l_{\beta\alpha}^{(2)}, l_{\beta\alpha}^{(3)}) = (\alpha, A \rightleftharpoons \beta, B)(l_{\alpha\beta}^{(\circ)}, l_{\alpha\beta}^{(2)}, l_{\alpha\beta}^{(3)}). \quad (2.20'')$$

2.2.4. Граничные уравнения равновесия

Вариационное уравнение Лагранжа (2.4) при условии, что полевые уравнения (2.11), (2.15) выполняются, принимает вид

$$\oint_{\partial\Omega} \{\dots\}_2 ds_t = A_{\partial\Omega}(\delta\mathbf{u}^\xi) - \oint_{\partial\Omega} m^\alpha \nu_\alpha \delta w ds_t, \quad (2.21)$$

где (см. форм. (2.6))

$$\begin{aligned} & \oint_{\partial\Omega} \{\dots\}_2 ds_t = \\ & = \oint_{\partial\Omega} \{ [T^{\alpha\beta} \mathbf{r}_\beta + (\nabla_\beta M^{\alpha\beta}) \mathbf{n}] \cdot \nu_\alpha \delta \mathbf{r} + M^{\alpha\beta} \nu_\beta \mathbf{r}_\alpha \cdot \delta \mathbf{n} \} ds_t. \end{aligned} \quad (2.21')$$

Учитывая, что

$$\mathbf{r}_\beta = \nu_\beta \boldsymbol{\nu} + t_\beta \mathbf{t}, \quad \mathbf{r}_\alpha \cdot \delta \mathbf{n} = \nu_\alpha \delta \vartheta_\nu + t_\alpha \delta \vartheta_t,$$

на основании (2.21') можно записать

$$\oint_{\partial\Omega} \{\dots\}_2 ds_t = \oint_{\partial\Omega} (T_{\nu\nu} \delta u_\nu + T_{\nu t} \delta u_t + T_{\nu n} \delta w + M_{\nu\nu} \delta \vartheta_\nu + \underline{M_{\nu t} \delta \vartheta_t}) ds_t, \quad (2.22)$$

где

$$\begin{aligned} T_{\nu\nu} &= T^{\alpha\beta} \nu_\alpha \nu_\beta = T_\alpha \cos^2 \gamma + S \sin 2\gamma + T_\beta \sin^2 \gamma + \\ &+ \frac{1}{2} [\tau_{\alpha\beta} (M_\alpha + M_\beta) - (\sigma_\alpha + \sigma_\beta) H] \sin 2\gamma, \\ T_{\nu t} &= T^{\alpha\beta} \nu_\alpha t_\beta = S \cos 2\gamma + \frac{1}{2} (T_\beta - T_\alpha) \sin 2\gamma - \\ &- (\sigma_\beta \cos^2 \gamma - \sigma_\alpha \sin^2 \gamma) H + \tau_{\alpha\beta} (M_\alpha \cos^2 \gamma - M_\beta \sin^2 \gamma), \\ T_{\nu n} &= \nu_\alpha \nabla_\beta M^{\beta\alpha} = \frac{\cos \gamma}{AB} \left(\frac{\partial B M_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{1}{A} \frac{\partial A^2 H}{\partial \beta} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} M_\beta \right) + \\ &+ \frac{\sin \gamma}{AB} \left(\frac{\partial A M_\beta}{\partial \beta} + \frac{1}{B} \frac{\partial B^2 H}{\partial \alpha} - \frac{\partial A}{\partial \beta} M_\alpha \right), \\ M_{\nu\nu} &= M^{\alpha\beta} \nu_\alpha \nu_\beta = M_\alpha \cos^2 \gamma + H \sin 2\gamma + M_\beta \sin^2 \gamma, \\ M_{\nu t} &= M^{\alpha\beta} \nu_\alpha t_\beta = H \cos 2\gamma + \frac{1}{2} (M_\beta - M_\alpha) \sin 2\gamma. \end{aligned} \quad (2.22')$$

Рассмотрим интеграл, соответствующий подчеркнутому в (2.22) слагаемому. Принимая во внимание формулу (1.2.2)₂ и предполагая, что контур $\partial\Omega$ является гладким, получаем

$$\oint_{\partial\Omega} M_{\nu t} \delta \vartheta_t ds_t = \oint_{\partial\Omega} M_{\nu t} \left(-\frac{d\delta w}{ds_t} - \sigma_t \delta u_t + \tau_t \delta u_\nu \right) ds_t =$$

$$= \oint_{\partial\Omega} \left(\frac{dM_{vt}}{ds_t} \delta w - \sigma_t M_{vt} \delta u_t + \tau_t M_{vt} \delta u_\nu \right) ds_t.$$

С учетом этого соотношения формула (2.22) принимает вид

$$\oint_{\partial\Omega} \{ \dots \}_2 ds_t = \oint_{\partial\Omega} (Q_{\nu\nu} \delta u_\nu + Q_{\nu t} \delta u_t + Q_{\nu n} \delta w + M_{\nu\nu} \delta \vartheta_\nu) ds_t, \quad (2.23)$$

где

$$Q_{\nu\nu} = T_{\nu\nu} + \tau_t M_{vt}, \quad Q_{\nu t} = T_{\nu t} - \sigma_t M_{vt}, \quad Q_{\nu n} = T_{\nu n} + \frac{dM_{vt}}{ds_t}. \quad (2.23')$$

Вычислим теперь работу внешних сил, действующих на боковую поверхность оболочки. Названные силы уравниваются напряжениями у боковой поверхности, поэтому их можно представить так (лат. *externus* – внешний):

$$\begin{aligned} \overset{e}{\sigma}_\nu &= \boldsymbol{\nu} \cdot \overset{e}{\Sigma} = \boldsymbol{\nu} \cdot (\overset{e}{\sigma}^{\alpha\beta} \mathbf{R}_\alpha \otimes \mathbf{R}_\beta + \overset{e}{\sigma}^{\alpha 3} \mathbf{R}_\alpha \otimes \mathbf{n} + \overset{e}{\sigma}^{3\alpha} \mathbf{n} \otimes \mathbf{R}_\alpha + \\ &+ \overset{e}{\sigma}^{33} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) = [\overset{e}{\sigma}^{\alpha\beta} (\mathbf{r}_\beta - \xi b_\beta^\nu \mathbf{r}_\nu) + \overset{e}{\sigma}^{\alpha 3} \mathbf{n}] (\nu_\alpha - \xi b_\alpha^\mu \nu_\mu). \end{aligned} \quad (2.24)$$

На основании (2.24) находим

$$\begin{aligned} A_{\partial\Omega}(\delta \mathbf{u}^\xi) &= \oint_{\partial\Omega} \left(\int_{-h/2}^{h/2} \overset{e}{\sigma}_\nu \cdot \delta \mathbf{u}^\xi \right) ds_t^\xi = \\ &= \oint_{\partial\Omega} \left[\int_{-h/2}^{h/2} \overset{e}{\sigma}_\nu \cdot (\delta \mathbf{r} + \xi \delta \mathbf{n}) (1 - \xi \sigma_t) d\xi \right] ds_t = \\ &= \oint_{\partial\Omega} \left[(T^{\alpha\beta} \nu_\alpha \mathbf{r}_\beta + T_{\cdot n}^\alpha \nu_\alpha \mathbf{n}) \cdot \delta \mathbf{r} + M^{\alpha\beta} \nu_\alpha \mathbf{r}_\beta \cdot \delta \mathbf{n} \right] ds_t. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Здесь (см. форм. (2.5'), (2.8)₂)

$$T^{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \overset{e}{\sigma}^{\alpha i} \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{r}^j d\xi, \quad M^{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \overset{e}{\sigma}^{ij} \xi d\xi, \quad T_{\cdot n}^i = \int_{-h/2}^{h/2} \overset{e}{\sigma}^{i3} d\xi. \quad (2.25')$$

Выполнив в (2.25) преобразования, подобные тем, что были сделаны при переходе от (2.21') к (2.23), будем иметь

$$A_{\partial\Omega}(\delta \mathbf{u}^\xi) = \oint_{\partial\Omega} (\overset{e}{Q}_{\nu\nu} \delta u_\nu + \overset{e}{Q}_{\nu t} \delta u_t + \overset{e}{Q}_{\nu n} \delta w + \overset{e}{M}_{\nu\nu} \delta \vartheta_\nu) ds_t, \quad (2.26)$$

где (см. (2.23'))

$$\begin{aligned} \overset{e}{Q}_{\nu\nu} &= T^{\overset{e}{\alpha}\overset{e}{\beta}} \nu_\alpha \nu_\beta + \tau_t M^{\overset{e}{\alpha}\overset{e}{\beta}} \nu_\alpha t_\beta, \quad \overset{e}{Q}_{\nu t} = (T^{\overset{e}{\alpha}\overset{e}{\beta}} - \sigma_t M^{\overset{e}{\alpha}\overset{e}{\beta}}) \nu_\alpha t_\beta, \\ \overset{e}{Q}_{\nu n} &= T^{\overset{e}{\alpha}} \nu_\alpha + \frac{d}{ds_t} (M^{\overset{e}{\alpha}\overset{e}{\beta}} \nu_\alpha t_\beta), \quad \overset{e}{M}_{\nu\nu} = M^{\overset{e}{\alpha}\overset{e}{\beta}} \nu_\alpha \nu_\beta. \end{aligned} \quad (2.26')$$

Окончательно, учитывая, что вариации δu_ν , δu_t , δw , $\delta \vartheta_\nu$ являются независимыми, придем к следующей системе граничных уравнений равновесия (т.н. *естественные* граничные условия):

$$Q_{\nu\nu} = \overset{e}{Q}_{\nu\nu}, \quad Q_{\nu t} = \overset{e}{Q}_{\nu t}, \quad Q_{\nu n} = \overset{e}{Q}_{\nu n} - m_\nu, \quad M_{\nu\nu} = \overset{e}{M}_{\nu\nu}. \quad (2.27)$$

В общем случае граничное уравнение (2.21) будет выполняться и в том случае, когда часть или все геометрические величины (u_ν , u_t , w , ϑ_ν) заданы на $\partial\Omega$. Пусть, например,

$$u_\nu = \varphi_\nu(M), \quad u_t = \varphi_t(M), \quad M \in \partial\Omega, \quad (2.28)_1$$

где $\varphi_\nu(M)$, $\varphi_t(M)$ – заданные функции.

Тогда

$$\delta u_\nu = \delta \varphi_\nu(M) = 0, \quad \delta u_t = \delta \varphi_t(M) = 0,$$

и граничное уравнение (2.21) принимает вид

$$\oint_{\partial\Omega} [(Q_{\nu n} - \overset{e}{Q}_{\nu n} + m_\nu) \delta w + (M_{\nu\nu} - \overset{e}{M}_{\nu\nu}) \delta \vartheta_\nu] ds_t = 0.$$

Так как в этом уравнении вариации δw , $\delta \vartheta_\nu$ являются произвольными, то из него вытекают два уравнения равновесия

$$Q_{\nu n} = \overset{e}{Q}_{\nu n} - m_\nu, \quad M_{\nu\nu} = \overset{e}{M}_{\nu\nu}. \quad (2.28)_2$$

При этом не связанные с вариационным уравнением Лагранжа равенства (2.28)₁ называются *внешними* граничными условиями.

2.3. Статико-геометрическая аналогия

в полевых уравнениях

Сравнивая однородные ($f^i = 0$, $f_n = 0$) уравнения равновесия (2.11) и уравнения неразрывности (1.40), убеждаемся в том, что они имеют одинаковый вид по отношению к величинам T^{ij} , M^{ij} и (соответственно)

$$c^{i\mu} c^{j\nu} \chi_{\mu\nu}, \quad -c^{i\mu} c^{j\nu} e_{\mu\nu}.$$

Это свойство полевых уравнений механики оболочек, называемое *статико-геометрической аналогией* (с.з.а.), будем записывать так:

$$T^{ij} \xrightarrow{\text{с.з.а.}} c^{i\mu} c^{j\nu} \chi_{\mu\nu}, \quad M^{ij} \xrightarrow{\text{с.з.а.}} -c^{i\mu} c^{j\nu} e_{\mu\nu}. \quad (3.1)$$

Конкретизируя индексы i, j и переходя к физическим компонентам, соответствие (3.1) можно представить в виде таблиц (см. форм. (1.13'), (1.1.6)₁)

$$\left| \begin{array}{c|c|c|c} T_{\langle 11 \rangle} = T_\alpha & T_{\langle 22 \rangle} = T_\beta & T_{\langle 12 \rangle} & T_{\langle 12 \rangle} \\ \chi_{\langle 22 \rangle} = \varkappa_\beta & \chi_{\langle 11 \rangle} = \varkappa_\alpha & -\chi_{\langle 21 \rangle} & -\chi_{\langle 12 \rangle} \end{array} \right|, \quad (3.2)_1$$

$$\left| \begin{array}{c|c|c} M_{\langle 11 \rangle} = M_\alpha & M_{\langle 22 \rangle} = M_\beta & M_{\langle 12 \rangle} = H \\ -e_{\langle 22 \rangle} = -\varepsilon_\beta & -e_{\langle 11 \rangle} = -\varepsilon_\alpha & e_{\langle 12 \rangle} = \frac{\omega}{2} \end{array} \right|, \quad (3.2)_2$$

где (см. также форм. (1.25))

$$T_{\langle 12 \rangle} = S + \tau_{\alpha\beta} M_\alpha - \sigma_\beta M_{\langle 21 \rangle}, \quad T_{\langle 21 \rangle} = S + \tau_{\alpha\beta} M_\beta - \sigma_\alpha M_{\langle 12 \rangle}. \quad (3.2')$$

Из сравнения формул (3.2') и (1.25) с учетом таблиц (3.2) убеждаемся, что

$$S \xrightarrow{\text{с.з.а.}} -\tau. \quad (3.3)$$

Окончательно с учетом обозначений (2.20') можно записать

$$t \xrightarrow{\text{с.з.а.}} \varkappa, \quad m \xrightarrow{\text{с.з.а.}} -\varepsilon, \quad (3.4)$$

где

$$\varkappa \triangleq (\varkappa_\beta, -\tau, \varkappa_\alpha)^\oplus, \quad \varepsilon \triangleq (\varepsilon_\beta, -\frac{\omega}{2}, \varepsilon_\alpha)^\oplus. \quad (3.4')$$

На основании (2.20) и соотношений (3.4) уравнения неразрывности (1.32) в операторной форме имеют вид

$$R_o \mathbf{L}_1 \varkappa - \mathbf{L}_2 \varepsilon = 0. \quad (3.5)$$

Далее, принимая во внимание формулы (1.6)₁ и (1.23), т.н. *кинетические уравнения*, связывающие параметры деформации со смещениями, можно записать так:

$$R_o^{-1} \mathbf{D}_1 u = \varepsilon, \quad R_o^{-2} \mathbf{D}_2 u = \varkappa, \quad (3.6)$$

где

$$u = (u_\alpha, w, u_\beta)^\oplus; \quad (3.6')$$

$$R_o^{-1}\mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} & -\sigma_\beta & \frac{1}{B} \frac{\partial(\)}{\partial \beta} \\ \frac{A}{2B} \frac{\partial(\)}{\partial \beta} & -\tau_{\alpha\beta} & -\frac{1}{2A} \frac{\partial(\)}{\partial \alpha} \frac{1}{B} \\ \frac{1}{A} \frac{\partial(\)}{\partial \alpha} & -\sigma_\alpha & \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \end{bmatrix},$$

$$R_o^{-2}\mathbf{D}_2 = \begin{bmatrix} d_{\alpha\beta}^{(1)} & d_{\alpha\beta}^{(2)} & d_{\alpha\beta}^{(3)} \\ d_{\alpha\beta}^{(0)} & d & d_{\beta\alpha}^{(0)} \\ d_{\beta\alpha}^{(3)} & d_{\beta\alpha}^{(2)} & d_{\beta\alpha}^{(1)} \end{bmatrix},$$

$$d_{\alpha\beta}^{(0)} = -\frac{\sigma_\alpha}{B} \frac{\partial(\)}{\partial \beta} - \frac{\sigma_\alpha}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} - \frac{1}{A} \frac{\partial \tau_{\alpha\beta}}{\partial \alpha},$$

$$d_{\alpha\beta}^{(1)} = -\frac{\sigma_\alpha}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{1}{B} \frac{\partial \tau_{\alpha\beta}(\)}{\partial \beta} + \frac{\tau_{\alpha\beta}}{2AB} \frac{\partial A(\)}{\partial \beta},$$

$$d_{\alpha\beta}^{(2)} = -\frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial(\)}{\partial \beta} \right) - \frac{1}{A^2 B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial(\)}{\partial \alpha},$$

$$d_{\alpha\beta}^{(3)} = -\frac{1}{B} \frac{\partial \sigma_\beta(\)}{\partial \beta} + \frac{\tau_{\alpha\beta}}{2} \left(\frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} - \frac{1}{A} \frac{\partial(\)}{\partial \alpha} \right),$$

$$d = \frac{1}{AB} \frac{\partial^2(\)}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{1}{A^2 B} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial(\)}{\partial \alpha} - \frac{1}{AB} \frac{\partial^2(\)}{\partial \alpha \partial \beta},$$

$$d_{\beta\alpha}^{(i)} = (\alpha, A \rightleftharpoons \beta, B) d_{\alpha\beta}^{(i)}, \quad i \in 0 : 3. \quad (3.6'')$$

□ Следует обратить внимание на то, что матричные дифференциальные операторы $R_o\mathbf{L}_1$, \mathbf{L}_2 (см. (2.20'')), $R_o\mathbf{D}_1$, $R_o^{-2}\mathbf{D}_2$ обладают одинаковой структурой со своеобразной антисимметрией относительно центрального элемента, наиболее отчетливо усматриваемой на примере оператора $R_o^{-2}\mathbf{D}_2$. Отмеченное свойство может быть использовано, в частности, для проверки правильности записи соответствующих полевых уравнений.

Характерный радиус кривизны или размер срединной поверхности оболочки $R_o = const$ введен с целью нормирования операторов, а именно, если $\bar{u} = (\bar{u}_\alpha, \bar{w}, \bar{u}_\beta)$ – столбец плавных функций, то справедливы оценки

$$\|\mathbf{L}_1 \bar{u}\| \sim \|\mathbf{L}_2 \bar{u}\| \sim \|\mathbf{D}_1 \bar{u}\| \sim \|\mathbf{D}_2 \bar{u}\| \sim \|\bar{u}\|.$$

И последнее. В силу того, что уравнения неразрывности относительно смещений удовлетворяются тождественно, введенные операторы связаны тождеством

$$(\mathbf{L}_1 \mathbf{D}_2 - \mathbf{L}_2 \mathbf{D}_1) \bar{u} = 0,$$

где \bar{u} – столбец произвольных функций, обладающих достаточной гладкостью. ■

Статико-геометрическая аналогия, выразившаяся в том, что уравнения равновесия и уравнения неразрывности записываются с использованием одних и тех же операторов \mathbf{L}_1 , \mathbf{L}_2 , позволяет ввести функции напряжения следующим образом:

$$t = t^p + \sqrt{Ehd_o} \bar{\varepsilon}, \quad m = m^p - \sqrt{Ehd_o} \bar{\varepsilon}, \quad (3.7)$$

где

$$\bar{\varepsilon} = R_o^{-1} \mathbf{D}_1 \bar{u}, \quad \bar{\varepsilon} = R_o^{-2} \mathbf{D}_2 \bar{u}. \quad (3.7')$$

(p – от лат. *particulāris* – частный)

2.4. Закон Гука

Как известно, закон Гука в тензорном виде можно представить формулой

$$\boldsymbol{\Sigma} = 2\mu \mathbf{E} + \lambda I_E \mathbf{1}, \quad (4.1)$$

где $\boldsymbol{\Sigma}$, \mathbf{E} – тензоры истинных напряжений Кирхгофа и малых деформаций Коши (с учетом отождествления исходной и актуальной конфигураций); I_E – первый главный инвариант тензора \mathbf{E} ; λ, μ – упругие константы Ламе.

Учитывая, что в криволинейных координатах

$$\boldsymbol{\Sigma} = \sigma^{\alpha\beta} \mathbf{R}_\alpha \otimes \mathbf{R}_\beta, \quad \mathbf{E} = e_{\alpha\beta}^\xi \mathbf{R}^\alpha \otimes \mathbf{R}^\beta, \quad (4.2)$$

в результате проектирования уравнения (4.1) на базисную диаду $\mathbf{R}^i \otimes \mathbf{R}^j$ получим

$$\sigma^{ij} = (2\mu g^{\alpha i} g^{\beta j} + \lambda g^{ij} g^{\alpha\beta}) e_{\alpha\beta}^\xi, \quad i, j, \alpha, \beta \in 1 : 3. \quad (4.3)$$

Преобразуем сначала эти уравнения без предположения о выполнении геометрической гипотезы Кирхгофа, понимая под тензором \mathbf{E} линейную часть тензора Грина-Лагранжа. Одно из уравнений (4.3) с учетом соотношений (1.9) имеет вид

$$\sigma_{33} = \lambda g^{\alpha\beta} e_{\alpha\beta}^\xi + (\lambda + 2\mu) e_{33}^\xi, \quad \alpha, \beta, \in 1 : 2. \quad (4.4)$$

Отсюда, применяя статическую гипотезу Кирхгофа в “жесткой” форме $\sigma^{33} \equiv \sigma_{33} = 0$ (обычно достаточно замены формулы $I_\Sigma = \sigma^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta \in 1 : 3$ на формулу $I_\Sigma = \sigma^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta \in 1 : 2$), получим

$$e_{33}^\xi = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} g^{\alpha\beta} e_{\alpha\beta}^\xi, \quad \alpha, \beta \in 1 : 2. \quad (4.5)$$

Систему (4.3) после исключения из нее уравнения (4.4) можно записать так:

$$\sigma^{ij} = (\lambda g^{ij} g^{\alpha\beta} + 2\mu g^{\alpha i} g^{\beta j}) e_{\alpha\beta}^\xi + \lambda g^{ij} e_{33}^\xi, \quad (4.6)_1$$

$$\sigma_3^i = 2\mu g^{\alpha i} e_{\alpha 3}^\xi, \quad i, j, \alpha, \beta \in 1 : 2. \quad (4.6)_2$$

При этом уравнение (4.6)₁ с учетом формулы (4.5) принимает вид

$$\sigma^{ij} = \frac{E}{1 - \nu^2} [\nu g^{ij} g^{\alpha\beta} + (1 - \nu) g^{\alpha i} g^{\beta j}] e_{\alpha\beta}^\xi, \quad i, j, \alpha, \beta \in 1 : 2. \quad (4.7)$$

Используя теперь формулы (1.9), (2.5'), получим

$$S^{ij} = c_o A^{ij, \alpha, \beta} e_{\alpha\beta}, \quad M^{ij} = d_o A^{ij, \alpha, \beta} \varkappa_{\alpha\beta}, \quad (4.8)$$

где

$$A^{ij, kl} = \nu a^{ij} a^{kl} + (1 - \nu) a^{ik} a^{jl}, \quad c_o = \frac{Eh}{1 - \nu^2}, \quad d_o = \frac{h^2}{12} c_o. \quad (4.8')$$

Первой формуле из (4.8') с учетом легко проверяемого равенства

$$c^{ik} c^{jl} = a^{ij} a^{kl} - a^{ik} a^{jl}$$

можно придать вид

$$A^{ij, kl} = a^{ik} a^{jl} + \nu c^{ik} c^{jl}. \quad (4.9)$$

Нетрудно убедиться в справедливости следующих равенств, полученных путем обращения уравнений (4.8):

$$e_{ij} = \frac{1}{Eh} A_{ij, \alpha\beta} S^{\alpha\beta}, \quad \varkappa_{ij} = \frac{12}{Eh^3} A_{ij, \alpha\beta} M^{\alpha\beta}, \quad (4.10)$$

где

$$A_{ij, kl} = a_{ik} a_{jl} + \nu c_{ik} c_{jl}. \quad (4.10')$$

Учитывая, что уравнения равновесия записываются, в частности, в терминах комбинированных статических величин T^{ij} (см. форм. (2.8)), получим уравнения закона Гука, связывающие названные величины с

параметрами деформации. Для этого обратимся к рассмотрению напряжений. Вводя обозначение

$$\sigma^{ij} = \sigma_{\circ}^{ij} + \xi \sigma_1^{ij},$$

на основании формул (2.5') находим

$$S^{ij} = h\sigma_{\circ}^{ij}, \quad M^{ij} = \frac{h^3}{12}\sigma_1^{ij}. \quad (4.11)$$

Отсюда следует, что после определения усилий и моментов, компоненты тензора напряжений определяются по формуле

$$\sigma^{ij} = \frac{S^{ij}}{h} \pm \frac{6M^{ij}}{h^2} \frac{\xi}{h/2}$$

или (в терминах физических компонент у лицевых поверхностей, где реализуются экстремальные по ξ напряжения)

$$\sigma_{\langle ij \rangle} = \frac{S_{\langle ij \rangle}}{h} \pm \frac{6M_{\langle ij \rangle}}{h^2}. \quad (4.12)$$

По аналогии с (4.11) имеет место формула

$$T^{ij} = h\sigma_{\circ}^{ij} - \frac{h^3}{12} \underset{\text{-----}}{b_{\alpha}^j \sigma_1^{\alpha i}}, \quad (4.13)$$

с использованием которой находим

$$\sigma_{\langle ij \rangle} = \frac{T_{\langle ij \rangle}}{h} \pm \frac{6M_{\langle ij \rangle}}{h^2} + \frac{1}{h} \underset{\text{-----}}{b_{\langle j\alpha \rangle} M_{\langle i\alpha \rangle}}. \quad (4.14)$$

Таким образом, вклад в значения максимальных по модулю напряжений подчеркнутого в (4.13) слагаемого мал, и поэтому комбинированную статическую величину T^{ij} в законе Гука можно отождествлять с усилием S^{ij} , т.е. считать допустимыми равенства

$$T^{ij} = c_{\circ} A^{ij, \alpha\beta} e_{\alpha\beta}, \quad e^{ij} = \frac{1}{c_{\circ}} A_{ij, \alpha\beta} T^{\alpha\beta}. \quad (4.15)$$

(Тем самым является приемлемым по отношению к $t = (T_{\alpha}, S, T_{\beta})^{\oplus}$ термин “столбец усилий”).

Переходя теперь в формулах (4.8), (4.10) и (4.15) к физическим компонентам, получим следующую форму записи уравнений закона Гука:

$$t = c_{\circ} C \varepsilon, \quad m = d_{\circ} C \varepsilon, \quad (4.16)_1$$

$$\varepsilon = \frac{1}{c_o} C^{-1} t, \quad \varkappa = \frac{1}{d_o} C^{-1} m, \quad (4.16)_2$$

где

$$C = \begin{bmatrix} \nu & 0 & 1 \\ 0 & -1 + \nu & 0 \\ 1 & 0 & \nu \end{bmatrix}, \quad C^{-1} = \frac{1}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} -\nu & 0 & 1 \\ 0 & -1 - \nu & 0 \\ 1 & 0 & -\nu \end{bmatrix}. \quad (4.16')$$

Полученные выше уравнения позволяют в зависимости от цели исследования и вида граничных условий реализовывать (традиционные) *метод перемещений*

$$c_o(\mathbf{L}_1 C \mathbf{D}_1 + \eta^2 \mathbf{L}_2 C \mathbf{D}_2) u = -ABq, \\ (\eta^2 = h^2/12R_o^2), \quad (4.17)$$

либо *метод сил*

$$\begin{cases} R_o \mathbf{L}_1 t + \mathbf{L}_2 m = -ABq, \\ d_o \mathbf{L}_2 C^{-1} t - c_o R_o \mathbf{L}_1 C^{-1} m = 0. \end{cases} \quad (4.18)$$

Этим можно считать исчерпанным изложение общего варианта теории оболочек с использованием операторной формы записи, предложенной автором [9].

2.5. Распространение статико-геометрической аналогии на граничные величины

2.5.1 Равновесие края обеспечивается заданием четырех кирхгофовских статических величин (см. форм. (2.23))

$$Q_{vv}, \quad Q_{vt}, \quad Q_{vn}, \quad M_{vv},$$

которые будем объединять, используя обозначение

$$\partial q = (Q_{vv}, \quad Q_{vt}, \quad Q_{vn}, \quad M_{vv})^\oplus. \quad (5.1)$$

На основании формул (2.22'), (2.23') с учетом обозначений (2.20') можно записать

$$\partial q = \Gamma_1 t + R_o^{-1} \Gamma_2 m, \quad (5.2)$$

где

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} \cos^2 \gamma & \sin 2\gamma & \sin^2 \gamma \\ -\frac{1}{2} \sin 2\gamma & \cos 2\gamma & \frac{1}{2} \cos 2\gamma \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$R_o^{-1}\Gamma_2 = \begin{bmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} & \eta_{13} \\ \eta_{21} & \eta_{22} & \eta_{23} \\ \eta_{31} & \eta_{32} & \eta_{33} \\ \cos^2 \gamma & \sin 2\gamma & \sin^2 \gamma \end{bmatrix},$$

$$\eta_{11} = \frac{1}{2}(\tau_{\alpha\beta} - \tau_t) \sin 2\gamma, \quad \eta_{21} = \tau_{\alpha\beta} \cos^2 \gamma + \frac{1}{2}\sigma_t \sin 2\gamma,$$

$$\eta_{13} = \frac{1}{2}(\tau_{\alpha\beta} + \tau_t) \sin 2\gamma, \quad \eta_{23} = -\tau_{\alpha\beta} \sin^2 \gamma - \frac{1}{2}\sigma_t \sin 2\gamma,$$

$$\eta_{31} = \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial B(\cdot)}{\partial \alpha} \cos \gamma - \frac{\partial A(\cdot)}{\partial \beta} \sin \gamma \right] - \frac{1}{2} \frac{d}{ds_t} [(\cdot) \sin 2\gamma],$$

$$\eta_{32} = \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial A^2(\cdot)}{\partial \beta} \cos \gamma + \frac{1}{B} \frac{\partial B^2(\cdot)}{\partial \alpha} \sin \gamma \right] + \frac{d}{ds_t} [(\cdot) \cos 2\gamma],$$

$$\eta_{33} = \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial A(\cdot)}{\partial \beta} \sin \gamma - \frac{\partial B(\cdot)}{\partial \alpha} \cos \gamma \right] + \frac{1}{2} \frac{d}{ds_t} [(\cdot) \sin 2\gamma],$$

$$\eta_{12} = -\frac{1}{2}(\sigma_\alpha + \sigma_\beta) \sin 2\gamma + \tau_t \cos 2\gamma,$$

$$\eta_{22} = \sigma_\alpha \sin^2 \gamma - \sigma_\beta \cos^2 \gamma - \sigma_t \cos 2\gamma. \quad (5.2')$$

Найдем геометрические величины, отвечающие по статико-геометрической аналогии статическим величинам ∂q . Имеем

$$Q_{\nu\nu} \xrightarrow{c.z.a.} \varkappa_\beta \cos^2 \gamma - \tau \sin 2\gamma + \varkappa_\alpha \sin^2 \gamma - \tau_t \varepsilon_{t\nu} -$$

$$-\frac{1}{2}[\tau_{\alpha\beta}(\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta) + \frac{\omega}{2}(\sigma_\alpha + \sigma_\beta)] \sin 2\gamma \triangleq \varkappa'_{tt}$$

$$Q_{\nu t} \xrightarrow{c.z.a.} \frac{1}{2}(\varkappa_\alpha - \varkappa_\beta) \sin 2\gamma - \tau \cos 2\gamma + \sigma_t \varepsilon_{t\nu} -$$

$$-(\sigma_\beta \cos^2 \gamma - \sigma_\alpha \sin^2 \gamma) \frac{\omega}{2} - \tau_{\alpha\beta}(\varepsilon_\beta \cos^2 \gamma - \varepsilon_\alpha \sin^2 \gamma) \triangleq -\varkappa'_{t\nu}$$

$$Q_{\nu n} \xrightarrow{c.z.a.} -\frac{\cos \gamma}{AB} \left(\frac{\partial B \varepsilon_\beta}{\partial \alpha} - \frac{1}{2A} \frac{\partial^2 A^2 \omega}{\partial \beta} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} \varepsilon_\alpha \right) - \frac{d\varepsilon_{t\nu}}{ds_t} -$$

$$-\frac{\sin \gamma}{AB} \left(\frac{\partial A \varepsilon_\alpha}{\partial \beta} - \frac{1}{2B} \frac{\partial^2 B^2 \omega}{\partial \alpha} - \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) \triangleq \varkappa'_{tn}$$

$$M_{\nu\nu} \xrightarrow{c.z.a.} -\varepsilon_\beta \cos^2 \gamma + \frac{\omega}{2} \sin 2\gamma - \varepsilon_\alpha \sin^2 \gamma = -\varepsilon_{tt}, \quad (5.3)$$

где

$$\varepsilon_{t\nu} = \frac{\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta}{2} \sin 2\gamma - \frac{\omega}{2} \cos 2\gamma \xrightarrow{c.z.a.} -M_{\nu t}. \quad (5.3')$$

2.5.2 Выясним геометрический смысл величин \mathfrak{a}'_{tt} , $\mathfrak{a}'_{t\nu}$, \mathfrak{a}'_{tn} . Принимая во внимание легко проверяемые соотношения

$$\mathbf{r}_i = \nu_i \boldsymbol{\nu} + t_i \mathbf{t}, \quad \nu^i = c^{i\alpha} t_\alpha, \quad t^i = c^{\beta i} \nu_\beta, \quad \vartheta_\nu = \vartheta_\alpha \nu^\alpha, \quad \vartheta_t = \vartheta_\alpha t^\alpha,$$

формулу (1.20), описывающую средний поворот элементарной частицы вокруг точки на срединной поверхности оболочки, можно записать так:

$$\boldsymbol{\omega} = c^{\alpha\beta} \vartheta_\alpha (\nu_\beta \boldsymbol{\nu} + t_\beta \mathbf{t}) + \omega_n \mathbf{n} = -\vartheta_t \boldsymbol{\nu} + \vartheta_\nu \mathbf{t} + \omega_n \mathbf{n}. \quad (5.4)$$

Тензор-градиент движения на линии Γ по аналогии с (1.11) можно представить формулой

$$\mathbf{V}_t = \boldsymbol{\nu}^* \otimes \boldsymbol{\nu} + \mathbf{t}^* \otimes \mathbf{t} + \mathbf{n}^* \otimes \mathbf{n}. \quad (5.5)$$

Используя полученное путем линеаризации формул (1.2.1), (1.2.4), (1.2.9) соотношение

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\nu}^* \\ \mathbf{t}^* \\ \mathbf{n}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \omega_{tt} & -\vartheta_\nu \\ -\omega_{tt} & 1 & -\vartheta_t \\ \vartheta_\nu & \vartheta_t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\nu} \\ \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \end{bmatrix}, \quad (5.6)$$

формуле (5.5) можно придать вид

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_t = \mathbf{1} + \vartheta_\nu (\boldsymbol{\nu} \otimes \mathbf{n} - \mathbf{n} \otimes \boldsymbol{\nu}) + \vartheta_t (\mathbf{t} \otimes \mathbf{n} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{t}) + \\ + \omega_{tt} (\mathbf{t} \otimes \boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\nu} \otimes \mathbf{t}). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Отсюда получаем следующее выражение для тензора поворота нормального элемента, расположенного вдоль линии Γ :

$$\boldsymbol{\Omega}_t = \frac{1}{2} [\mathbf{V}_t - \mathbf{1} - (\mathbf{V}_t - \mathbf{1})^*] = \mathbf{V}_t - \mathbf{1}. \quad (5.8)$$

Матрица тензора $\boldsymbol{\Omega}_t$ имеет вид

$$\boldsymbol{\Omega}_t = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{tt} & \vartheta_\nu \\ \omega_{tt} & 0 & \vartheta_t \\ -\vartheta_\nu & -\vartheta_t & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.9)$$

откуда заключаем, что сопутствующий тензору Ω_t вектор определяется формулой

$$\omega_t = -\vartheta_t \boldsymbol{\nu} + \vartheta_t \mathbf{t} + \omega_{tt} \mathbf{n}. \quad (5.10)$$

□ Сравнивая формулы (5.4) и (5.10), видим, что они отличаются лишь коэффициентами при \mathbf{n} . Это связано с тем, что из-за отсутствия поперечных сдвигов углы поворота $\vartheta_\nu, \vartheta_t$, характеризующие средний поворот материальной частицы, являются и углами поворота ортов $\mathbf{t}, \boldsymbol{\nu}$. Что же касается параметра ω_{tt} , то он определяет поворот нормального элемента $\Delta s_t \times h$ вокруг нормали \mathbf{n} . Средний поворот при этом можно вычислить так (см. форм. (1.25'), (1.2.4')):

$$(\omega_{tt})_{\text{ср.}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \omega_{tt} d\gamma = \frac{\omega_\alpha - \omega_\beta}{2} = \omega_n. \quad (5.11)$$

На основании формул (1.2.4') и (5.11) имеем

$$\begin{aligned} \omega_n - \omega_{tt} &= \frac{\omega_\alpha - \omega_\beta}{2} + \omega_\beta \cos^2 \gamma - \omega_\alpha \sin^2 \gamma + \\ &+ \frac{1}{2}(\varepsilon_\beta - \varepsilon_\alpha) \sin 2\gamma = e_{\alpha\beta} \nu^\alpha t^\beta \triangleq -\varepsilon_{t\nu}. \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (5.12)$$

Искривление нормального элемента $\Delta s_t \times h$ характеризует вектор

$$\mathfrak{a}_t = \frac{d\omega_t}{ds_t} = -\mathfrak{a}_{tt} \boldsymbol{\nu} + \mathfrak{a}_{t\nu} \mathbf{t} - \mathfrak{a}_{tn} \mathbf{n}, \quad (5.13)$$

где

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_{tt} &= \frac{d\vartheta_t}{ds_t} + \rho_t \vartheta_\nu - \tau_t \omega_{tt}, \quad \mathfrak{a}_{t\nu} = \frac{d\vartheta_\nu}{ds_t} - \rho_t \vartheta_t + \sigma_t \omega_{tt}, \\ -\mathfrak{a}_{tn} &= \frac{d\omega_{tt}}{ds_t} + \tau_t \vartheta_t + \sigma_t \vartheta_\nu; \end{aligned} \quad (5.13')$$

$$\rho_t = \frac{d\gamma}{ds_t} + \rho_\beta \cos \gamma + \rho_\alpha \sin \gamma. \quad (5.13'')$$

При вычислении производной вдоль контура Γ в (5.13) использовались следующие правила дифференцирования ортов:

$$\frac{d}{ds_t} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\nu} \\ \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \rho_t & -\tau_t \\ -\rho_t & 0 & \sigma_t \\ \tau_t & -\sigma_t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\nu} \\ \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \end{bmatrix}. \quad (5.14)$$

Выполнив преобразования формул (5.13'), связанные с переходом от направлений ν, \mathbf{t} к направлениям $\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta$, получим

$$\mathfrak{a}'_{tt} = \mathfrak{a}_{tt}, \quad \mathfrak{a}'_{t\nu} = \mathfrak{a}_{t\nu}, \quad \mathfrak{a}'_{tn} = \mathfrak{a}_{tn},$$

т.е. имеет место соответствие

$$\partial q \xrightarrow{\text{c.z.a.}} \partial \mathfrak{a}, \quad (5.15)$$

где

$$\partial \mathfrak{a} = (\mathfrak{a}_{tt}, -\mathfrak{a}_{t\nu}, \mathfrak{a}_{tn}, -\varepsilon_{tt})^\oplus. \quad (5.15')$$

На основании (3.4), (5.2) и (5.15') можно записать

$$\partial \mathfrak{a} = \mathbf{\Gamma}_1 \mathfrak{a} - R_0^{-1} \mathbf{\Gamma}_2 \varepsilon. \quad (5.16)$$

Исключив отсюда ε и \mathfrak{a} с помощью формул (3.6), получим

$$\partial \mathfrak{a} = R_0^{-2} (\mathbf{\Gamma}_1 \mathbf{D}_2 - \mathbf{\Gamma}_2 \mathbf{D}_1) u \triangleq \mathbf{\Gamma} \partial u, \quad (5.17)$$

где

$$\partial u = (u_\nu, u_t, w, \vartheta_\nu)^\oplus; \quad (5.17')$$

$$\mathbf{\Gamma} = \left[\begin{array}{ccc|c} & & & \rho_t \\ & \mathbf{\Gamma}_0 & & -\frac{d(\)}{ds_t} \\ & & & -\sigma_t \\ \hline -\rho_t & -\frac{d(\)}{ds_t} & \sigma_t & 0 \end{array} \right], \quad \mathbf{\Gamma}_0 = \begin{bmatrix} \gamma_{11}^\circ & \gamma_{12}^\circ & \gamma_{13}^\circ \\ \gamma_{21}^\circ & 0 & \gamma_{23}^\circ \\ \gamma_{13}^\circ & \gamma_{32}^\circ & \gamma_{11}^\circ \end{bmatrix},$$

$$\gamma_{11}^\circ = \frac{d\tau_t(\)}{ds_t} + \tau_t \frac{d(\)}{ds_t}, \quad \gamma_{13}^\circ = -\frac{d^2(\)}{ds_t^2} + \tau_t^2,$$

$$\gamma_{12}^\circ = -\frac{d\sigma_t(\)}{ds_t} - \tau_t \rho_t, \quad \gamma_{23}^\circ = -\rho_t \frac{d(\)}{ds_t} - \tau_t \sigma_t,$$

$$\gamma_{21}^\circ = -\sigma_t \frac{d(\)}{ds_t} + \tau_t \rho_t, \quad \gamma_{32}^\circ = -\frac{d\rho_t(\)}{ds_t} + \tau_t \sigma_t. \quad (5.17'')$$

2.5.3 Используя формулы дифференцирования ортов (5.14) и учитывая обозначения (1.2.4'), (5.10), находим

$$\frac{d\mathbf{u}}{ds_t} = \varepsilon_{tt}\mathbf{t} - \vartheta_t\mathbf{n} - \omega_{tt}\boldsymbol{\nu} = \varepsilon_{tt}\mathbf{t} + \boldsymbol{\omega}_t \times \mathbf{t}. \quad (5.18)$$

Рассматривая формулы (5.13), (5.18) как уравнения и интегрируя их, придем к следующему аналогу формул Чезаро в линейной теории оболочек:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_t &= \boldsymbol{\omega}_t^\circ + \int_{s_0}^{s_t} \boldsymbol{\alpha}_t ds'_t, \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}^\circ + \boldsymbol{\omega}_t^\circ \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + \\ &+ \int_{s_0}^{s_t} (\varepsilon_{tt}\mathbf{t} - \mathbf{t} \times \int_{s_0}^{s_t} \boldsymbol{\alpha}_t'' ds'_t)' ds'_t. \end{aligned} \quad (5.19)$$

(Можно показать, что левые части формул (5.19) не зависят от пути интегрирования [14].)

2.5.4 Геометрические величины (5.15') имеют простой смысл: $\boldsymbol{\alpha}_{tt}$ характеризует изгиб нормального элемента $\Delta s_t \times h$ в своей плоскости, $\boldsymbol{\alpha}_{t\nu}$ – скручивание этого элемента, $\boldsymbol{\alpha}_{tn}$ – изгиб из плоскости, ε_{tt} – растяжение срединной линии элемента. При этом все названные величины выражаются без интегрирования через параметры деформации (см. форм. (5.16)), с чем и связан термин *деформационные граничные величины* (ДГВ). На основании формул (5.16) и (4.16)₂ ДГВ без интегрирования выражаются через усилия и моменты:

$$\partial \boldsymbol{\alpha} = -\frac{1}{d_0} \boldsymbol{\Gamma}_1 C^{-1} m + \frac{1}{R_0 c_0} \boldsymbol{\Gamma}_2 C^{-1} t, \quad (5.20)$$

что позволяет в целом ряде задач формулировать геометрические граничные условия в терминах статических граничных величин.

Столбцу кирхгофовских статических величин ∂q , как обобщенным силам, отвечает столбец перемещений ∂u (см. форм. (5.17')). Это обстоятельство будем записывать так:

$$\partial q \xleftarrow{\text{с.-п.}} \partial u, \quad (5.21)$$

Если рассматривать ДГВ как обобщенные перемещения, то для формулирования смешанных граничных условий нужно иметь столбец обобщенных сил ∂b , такой, что

$$\partial b \xleftarrow{\text{с.-п.}} \partial \boldsymbol{\alpha}. \quad (5.22)$$

При этом граничные условия в терминах величин (5.22) должны обеспечивать единственность решения краевой задачи. Поясним сказанное.

Теорему Клапейрона можно записать в виде формулы

$$U = \frac{1}{2}L_{\Omega} + \frac{1}{2}L_{\partial\Omega}, \quad (5.23)$$

где U – упругая энергия деформации:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_V \sigma^{\alpha\beta} e_{\alpha\beta}^{\xi} dV = \frac{1}{2}c_{\circ} \int_{\Omega} \varepsilon^{\oplus} C_1 \varepsilon d\Omega + \frac{1}{2}d_{\circ} \int_{\Omega} \varkappa^{\oplus} C_1 \varkappa d\Omega = \\ &= \frac{1}{2c_{\circ}} \int_{\Omega} t^{\oplus} C_2 t d\Omega + \frac{1}{2d_{\circ}} \int_{\Omega} m^{\oplus} C_2 m d\Omega, \end{aligned}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \nu \\ 0 & 2(1-\nu) & 0 \\ \nu & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \frac{1}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\nu \\ 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ -\nu & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (5.23')$$

L_{Ω} – работа поверхностных сил:

$$L_{\Omega} = \int_{\Omega} q^{\oplus} u d\Omega; \quad (5.23'')$$

$L_{\partial\Omega}$ – работа краевых сил:

$$L_{\partial\Omega} = \oint_{\partial\Omega} \partial q^{\oplus} \partial u d s_t. \quad (5.23''')$$

(Здесь и ниже для упрощения записи будем полагать, что $\partial q^e = (Q_{\nu\nu}^e, Q_{\nu t}^e, Q_{\nu n}^e, M_{\nu\nu}^e)^{\oplus} = 0$.)

Допустим, что одним и тем же граничным условиям и поверхностной нагрузке отвечают два решения некоторой краевой задачи – u', u'' . Применяя к разности этих решений $\dot{u} = u' - u''$ теорему Клапейрона, получим

$$c_{\circ} \int_{\Omega} \dot{\varepsilon}^{\oplus} C_1 \dot{\varepsilon} d\Omega + d_{\circ} \int_{\Omega} \dot{\varkappa}^{\oplus} C_1 \dot{\varkappa} d\Omega = \dot{L}_{\partial\Omega}. \quad (5.24)$$

Если $\dot{L}_{\partial\Omega} = 0$, то (в силу неотрицательности подынтегральных выражений в левой части равенства (5.24)) $\dot{\varepsilon} = 0$, $\dot{\varkappa} = 0$, что возможно лишь при перемещении оболочки как твердого тела. Таким образом, единственность решения задачи по определению НДС в оболочке обеспечивается при выполнении условия $L_{\partial\Omega} = 0$, которое реализуется, если из каждой пары “обобщенная сила – обобщенное перемещение” на $\partial\Omega$ задана одна величина. ■

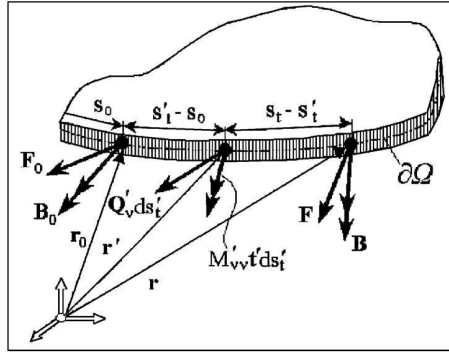


Рис. 2.1.

Введем на контуре $\partial\Omega$ главный вектор \mathbf{F} и главный момент \mathbf{B} (относительно текущей точки контура) усилий и моментов по формулам (рис. 2.1)

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= F_\nu \boldsymbol{\nu} + F_t \mathbf{t} + F_n \mathbf{n} = \\ &= \mathbf{F}_0 + \int_{s_0}^{s_t} \mathbf{Q}'_\nu ds'_t,\end{aligned}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}) \times \mathbf{F}_0 + \int_{s_0}^{s_t} [M'_{\nu\nu} \mathbf{t}' + (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \times \mathbf{Q}'_\nu] ds'_t, \quad (5.25)_1$$

где

$$\mathbf{Q}_\nu = Q_{\nu\nu} \boldsymbol{\nu} + Q_{\nu t} \mathbf{t} + Q_{\nu n} \mathbf{n}. \quad (5.25')$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned}\int_{s_0}^{s_t} (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \times \mathbf{Q}'_\nu ds'_t &= \int_{s_0}^{s_t} (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \times \frac{d}{ds'_t} (\mathbf{F}_0 + \int_{s_0}^{s'_t} \mathbf{Q}''_\nu ds''_t) ds'_t = \\ &= (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \times (\mathbf{F}_0 + \int_{s_0}^{s'_t} \mathbf{Q}''_\nu ds''_t) \Big|_{s_0}^{s_t} - \int_{s_0}^{s_t} \mathbf{t}' \times \mathbf{F}' ds'_t,\end{aligned}$$

второй формуле из (5.25)₁ можно придать вид

$$\mathbf{B} = B_\nu \boldsymbol{\nu} + B_t \mathbf{t} + B_n \mathbf{n} = \mathbf{B}_0 + \int_{s_0}^{s_t} (M_{\nu\nu} \mathbf{t} + \mathbf{F} \times \mathbf{t})' ds'_t. \quad (5.25)_2$$

Выполнив интегрирование по частям с учетом формул (5.13), (5.18) и (5.25), получим

$$\oint_{\partial\Omega} \mathbf{Q}_\nu \cdot \mathbf{u} ds_t = \oint_{\partial\Omega} \frac{d\mathbf{F}}{ds_t} \cdot \mathbf{u} ds_t = \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} \Big|_{s_0+0}^{s_0-0} - \oint_{\partial\Omega} [F_t \varepsilon_{tt} - (\mathbf{F} \times \mathbf{t}) \cdot \boldsymbol{\omega}_t] ds_t,$$

$$\oint_{\partial\Omega} \frac{d\mathbf{B}}{ds_t} \cdot \boldsymbol{\omega}_t ds_t = \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega}_t \Big|_{s_0+0}^{s_0-0} - \oint_{\partial\Omega} \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\varkappa}_t ds_t = \oint_{\partial\Omega} [M_{\nu\nu} \vartheta_\nu + (\mathbf{F} \times \mathbf{t}) \cdot \boldsymbol{\omega}_t] ds_t.$$

На основании этих соотношений имеем

$$L_{\partial\Omega} = \oint_{\partial\Omega} (\mathbf{Q}_\nu \cdot \mathbf{u} + M_{\nu\nu} \vartheta_\nu) ds_t = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega}_t) \Big|_{s_o+0}^{s_o-0} - \oint_{\partial\Omega} (\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\alpha}_t + F_t \varepsilon_{tt}) ds_t. \quad (5.26)$$

Если векторы перемещений и углов поворота являются однозначными функциями на $\partial\Omega$, т.е.

$$\mathbf{u}(s_o + 0) = \mathbf{u}(s_o - 0) = \mathbf{u}(s_o), \quad \boldsymbol{\omega}_t(s_o + 0) = \boldsymbol{\omega}_t(s_o - 0) = \boldsymbol{\omega}(s_o),$$

то формуле (5.26) можно придать вид

$$L_{\partial\Omega} = \mathcal{F} \cdot \mathbf{u}(s_o) + \mathcal{B}(s_o) \cdot \boldsymbol{\omega}_t(s_o) + \oint_{\partial\Omega} \partial b^\oplus \partial \boldsymbol{\alpha} ds_t, \quad (5.27)$$

где

$$\mathcal{F} = \oint_{\partial\Omega} \mathbf{Q}_\nu ds_t, \quad \mathcal{B}(s_o) = \oint_{\partial\Omega} M_{\nu\nu} \mathbf{t} ds_t + \int_{s_o+0}^{s_o-0} \mathbf{F} \times \mathbf{t} ds_t; \\ \partial b = (B_\nu, B_t, B_n, F_t)^\oplus. \quad (5.27')$$

Деформационные граничные величины $\partial \boldsymbol{\alpha}$, впервые введенные в работе [7] по формулам (5.13), (5.13'), а затем – в работе [15] по формуле (5.26) без учета внеинтегральных слагаемых, являются в случае односвязной области Ω альтернативным вариантом обобщенных смещений по отношению к традиционным граничным величинам ∂u . Однако, как следует из полной формулы (5.26) (или (5.27)) и соотношения (5.24), задание четырех деформационных величин, вообще говоря, не обеспечивает единственность решения линейной краевой задачи механики оболочек. Чтобы удостовериться в этом, достаточно рассмотреть консольную оболочку вращения, жестко защемленную на неподвижном крае ($\partial\Omega_1$) и закрытую на подвижном крае ($\partial\Omega_2$) абсолютно жесткой диафрагмой, к которой приложена сила $\mathcal{F}_y = P$ и момент $\mathcal{B}_x = -M$ (рис. 2.2).

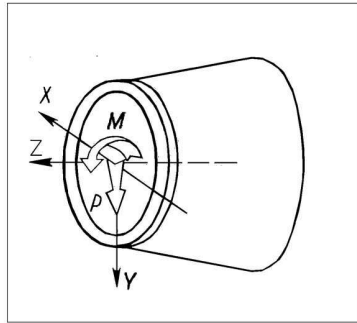


Рис. 2.2.

Если не учитывать в формуле (5.27) внеинтегральные слагаемые, то при отсутствии поверхностной нагрузки из условий $\partial u|_{\partial\Omega_1} = 0$, $\partial \boldsymbol{\alpha}|_{\partial\Omega_2} = 0$ и теоремы Клапейрона следует, что в рассматриваемой оболочке отсутствует напряженное состояние независимо от значений P и M .

Сказанное означает, что при формулировании граничных условий на контуре многосвязной области Ω следует прини-

мать во внимание внеинтегральные слагаемые в формуле (5.27). Например, граничные условия жесткого подвижного края $\partial\Omega_i$ многосвязной области Ω при использовании ДГВ следует записывать так:

$$\mathfrak{a}_{tt}^i = \mathfrak{a}_{tv}^i = \mathfrak{a}_{tn}^i = 0, \quad \varepsilon_{tt}^i = 0, \quad \mathcal{F}^i = \mathbf{P}^i, \quad \mathcal{B}^i = \mathbf{M}^i. \quad (5.28)$$

Переопределенность в этих граничных условиях является кажущейся, так как в системе (5.28) имеются зависимые уравнения, вытекающие из следующих условий однозначности перемещений и углов поворота на контуре $\partial\Omega_i$:

$$\mathbf{u}^i \triangleq \oint_{\partial\Omega_i} (\varepsilon_{tt} \mathbf{t} - \boldsymbol{\omega}_t \times \mathbf{t}) ds_t = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\omega}^i \triangleq \oint_{\partial\Omega_i} \mathfrak{a}_t ds_t = \mathbf{0}, \quad (5.29)$$

где \mathbf{u}^i , $\boldsymbol{\omega}^i$ – параметры дислокации по Ляву [2].

□ Для иллюстрации рассмотрим первый обратносимметричный случай деформации оболочки вращения. Из условий (5.29) следует, что [16]

$$\mathfrak{a}_{r,1} + \mathfrak{a}_{\varphi,1} = 0, \quad \varepsilon_{\varphi,1} - r\mathfrak{a}_{z,1} = 0,$$

т.е. вместо четырех граничных уравнений достаточно обеспечить выполнение двух, например,

$$\mathfrak{a}_{r,1} = 0, \quad \varepsilon_{\varphi,1} = 0.$$

Если оболочка работает как консоль (см. рис. 2.2), то следует задать дополнительно два статических условия [16]

$$\mathcal{F}_y = \pi r(Q_{r,1} - Q_{\varphi,1}) \equiv \pi r(T_{1,1}^* \cos \theta - S_{,1}^*) = P,$$

$$\mathcal{B}_x = \pi r(M_{1,1} + rQ_{z,1}) \equiv \pi r^2 T_{1,1}^* \sin \theta = -M.$$

Таким образом, общее число граничных условий на жестком подвижном крае равно четырем. ■

2.5.5 В этом пункте завершаем иллюстрацию статико-геометрической аналогии в системах граничных величин. Принимая во внимание формулы (3.7) и (5.2), находим

$$\begin{aligned} \partial q &= \Gamma_1 t^p + R_o^{-1} \Gamma_2 m^p + \sqrt{Ehd_o} (\Gamma_1 \bar{\mathfrak{a}} - R_o^{-1} \Gamma_2 \bar{\varepsilon}) = \\ &= \partial q^p - \sqrt{Ehd_o} \partial \bar{\mathfrak{a}} \end{aligned} \quad (5.30)$$

или

$$\mathbf{Q}_\nu = \mathbf{Q}_\nu^p - \sqrt{Ehd_o} \bar{\mathfrak{a}}_t, \quad M_{\nu\nu} = M_{\nu\nu}^p + \sqrt{Ehd_o} \bar{\varepsilon}_{tt}. \quad (5.31)$$

С учетом последних соотношений первой формуле (5.25)₁ можно придать вид

$$\mathbf{F} - \mathbf{F}_o = \int_{s_o}^{st} (\mathbf{Q}_\nu^p - \sqrt{Ehd_o} \overline{\boldsymbol{\alpha}}_t)' ds'_t = \mathbf{F}^p - \mathbf{F}_o^p - \sqrt{Ehd_o} (\overline{\boldsymbol{\omega}}_t - \overline{\boldsymbol{\omega}}_t^o)$$

или (полагая $\mathbf{F}_o = \mathbf{F}_o^p$)

$$\mathbf{F} - \mathbf{F}^p = -\sqrt{Ehd_o} (\overline{\boldsymbol{\omega}}_t - \overline{\boldsymbol{\omega}}_t^o). \quad (5.32)_1$$

Аналогично вторую формулу (5.25)₁ можно преобразовать к следующему виду:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} - \mathbf{B}_o - (\mathbf{r}_o - \mathbf{r}) \times \mathbf{F}_o &= \mathbf{B}^p - \mathbf{B}_o^p - (\mathbf{r}_o - \mathbf{r}) \times \mathbf{F}_o^p + \\ &+ \sqrt{Ehd_o} [\overline{\mathbf{u}} - \overline{\mathbf{u}}_o + (\mathbf{r}_o - \mathbf{r}) \times \overline{\boldsymbol{\omega}}_t^o]. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Последнее равенство получено с учетом того, что

$$- \int_{s_o}^{st} (\mathbf{t} \times \int_{s_o}^{st} \overline{\boldsymbol{\alpha}}_t'' ds_t'')' ds'_t = \int_{s_o}^{st} (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \times \overline{\boldsymbol{\alpha}}_t' ds'_t.$$

Полагая

$$\mathbf{B}_o + (\mathbf{r}_o - \mathbf{r}) \times \mathbf{F}_o = \mathbf{B}_o^p + (\mathbf{r}_o - \mathbf{r}) \times \mathbf{F}_o^p,$$

равенство (5.33) можно записать так:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}^p - \sqrt{Ehd_o} [\overline{\mathbf{u}} - \overline{\mathbf{u}}_o + (\mathbf{r} - \mathbf{r}_o) \times \overline{\boldsymbol{\omega}}_t^o]. \quad (5.32)_2$$

Применяя к обеим частям последнего равенства оператор Γ , получим

$$\Gamma \partial b = \Gamma \partial b^p - \sqrt{Ehd_o} \partial \overline{\boldsymbol{\alpha}} = \Gamma \partial b^p + \partial q - \partial q^p$$

или

$$\partial q = \Gamma \partial b. \quad (5.34)$$

Таким образом имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \partial q \xrightarrow{\text{с.-п.}} \partial u, \quad \partial b \xrightarrow{\text{с.-п.}} \partial \boldsymbol{\alpha}, \\ \partial q \xrightarrow{\text{с.г.а.}} \partial \boldsymbol{\alpha}, \quad \partial b \xrightarrow{\text{с.г.а.}} \partial u. \end{aligned} \quad (5.35)$$

И последнее. В связи с введением в теорию оболочек деформационных граничных величин наряду с методами перемещений (4.17) и сил (4.18) может быть использован *метод деформаций*

$$\begin{cases} c_o R_o \mathbf{L}_1 C \varepsilon + d_o \mathbf{L}_2 C \boldsymbol{\alpha} = -ABq, \\ \mathbf{L}_2 \varepsilon - R_o \mathbf{L}_1 \boldsymbol{\alpha} = 0. \end{cases} \quad (5.36)$$

2.6. Вывод уравнений неразрывности из уравнений равновесия

Умножив первое уравнение (2.10) на \mathbf{r}_j , выполнив в полученном равенстве свертку по индексам i, j и добавив второе уравнение (2.10), умноженное на \mathbf{n} , получим

$$\begin{aligned} & \partial_\beta(\sqrt{a}T^{\beta\alpha})\mathbf{r}_\alpha + \sqrt{a}\Gamma_{\beta\nu}^\alpha T^{\beta\nu}\mathbf{r}_\alpha - \sqrt{a}b_\beta^\alpha \nabla_\gamma M^{\gamma\beta}\mathbf{r}_\alpha + \\ & + \partial_\beta(\sqrt{a}\nabla_\alpha M^{\alpha\beta})\mathbf{n} + \sqrt{a}T^{\beta\nu}b_{\beta\nu} + \sqrt{a}\mathbf{f} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

или

$$\partial_\beta\sqrt{a}(T^{\beta\alpha}\mathbf{r}_\alpha + T_{.n}^\beta\mathbf{n}) + \sqrt{a}\mathbf{f} = \mathbf{0}, \quad (6.1)$$

где

$$T_{.n}^i \triangleq \nabla_\alpha M^{\alpha i}. \quad (6.1')$$

Вводя обозначения

$$\mathcal{F}^i = T^{i\alpha}\mathbf{r}_\alpha + T_{.n}^i\mathbf{n}, \quad (6.2)$$

на основании (6.1) с учетом первой формулы (1.2.6) получим

$$\nabla_\alpha \mathcal{F}^\alpha + \mathbf{f} = \mathbf{0}. \quad (6.3)$$

Принимая во внимание, что в силу (2.8) имеет место соотношение (полная свертка компонент симметричного и кососимметричного тензоров)

$$(T^{\alpha\beta} + b_\gamma^\beta M^{\alpha\gamma})c_{\alpha\beta} = 0,$$

можно записать

$$\nabla_\alpha \mathcal{M}^\alpha + \mathbf{r}_\alpha \times \mathcal{F}^\alpha = \mathbf{0}, \quad (6.4)$$

где

$$\mathcal{M}^i = M^{i\gamma}c_{\gamma\beta}\mathbf{r}^\beta. \quad (6.4')$$

□ Действительно, подставив \mathcal{F}^i из (6.2) и \mathcal{M}^i из (6.4') в уравнение (6.4), получим

$$\nabla_\alpha (M^{\alpha\gamma}c_{\gamma\beta}\mathbf{r}^\beta) + \mathbf{r}_\alpha \times (T^{\alpha\beta}\mathbf{r}_\beta + T_{.n}^\alpha\mathbf{n}) = \mathbf{0}$$

или

$$c_{\gamma\beta}(\nabla_\alpha M^{\alpha\gamma})\mathbf{r}^\beta + c_{\gamma\beta}M^{\alpha\gamma}b_\alpha^\beta\mathbf{n} + c_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta}\mathbf{n} + c_{\beta\alpha}T_{.n}^\alpha\mathbf{r}^\beta = \mathbf{0}.$$

Умножив это уравнение последовательно на \mathbf{r}_i и на \mathbf{n} , придем к равенствам

$$c_{\gamma i}\nabla_\alpha M^{\alpha\gamma} + c_{i\alpha}T_{.n}^\alpha = 0, \quad (T^{\alpha\beta} + b_\gamma^\beta M^{\alpha\gamma})c_{\alpha\beta} = 0.$$

И, наконец, после умножения первого из этих равенств на c^{kj} и свертки по индексам i, k получим формулу (6.1') ■

Убедимся, что решение уравнений (6.3), (6.4) при $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ можно представить формулами

$$\mathcal{F}^i = c^{i\alpha} \nabla_\alpha \psi, \quad \mathfrak{M}^i = c^{i\alpha} (\nabla_\alpha \varphi + \mathbf{r}_\alpha \times \psi), \quad (6.5)$$

где

$$\varphi = \varphi^\alpha \mathbf{r}_\alpha + \varphi \mathbf{n}, \quad \psi = \psi^\beta \mathbf{r}_\beta + \psi \mathbf{n}. \quad (6.5')$$

Действительно, учитывая, что $\nabla_\beta \psi \equiv \partial_\beta \psi$ – ковариантная компонента тензора 1-го ранга, имеем

$$\nabla_\alpha \mathcal{F}^\alpha = c^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta \psi = c^{\alpha\beta} \nabla_\alpha (\partial_\beta \psi) = c^{\alpha\beta} (\partial_\alpha \partial_\beta \psi - \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \partial_\gamma \psi) = \mathbf{0},$$

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha \mathfrak{M}^\alpha + \mathbf{r}_\alpha \times \mathcal{F}^\alpha &= c^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta \varphi + c^{\alpha\beta} (\nabla_\alpha \mathbf{r}_\beta) \times \psi + \\ &+ c^{\alpha\beta} \mathbf{r}_\beta \times \nabla_\alpha \psi + c^{\alpha\beta} \mathbf{r}_\alpha \times \nabla_\beta \psi = c^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} \mathbf{n} \times \psi = \mathbf{0}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Первое равенство (6.5) с учетом (6.5') можно записать так:

$$\mathcal{F}^i = c^{i\alpha} [(\nabla_\alpha \psi^\beta) \mathbf{r}_\beta + \psi^\beta b_{\alpha\beta} \mathbf{n} + (\partial_\alpha \psi) \mathbf{n} - \psi b_\alpha^\beta \mathbf{r}_\beta]. \quad (6.6)$$

Сравнивая формулы (6.6) и (6.2), находим

$$T^{ij} = c^{i\alpha} (\nabla_\alpha \psi^j - b_\alpha^j \psi), \quad T_{\cdot n}^i = c^{i\alpha} (\partial_\alpha \psi + b_{\alpha\beta} \psi^\beta). \quad (6.7)$$

Далее на основании (6.4') имеем

$$\mathfrak{M}^i \cdot \mathbf{r}_j = M^{i\gamma} c_{\gamma j}.$$

Отсюда после умножения на c^{kl} и свертки $j = l = \beta$, получим

$$M^{ik} = (\mathfrak{M}^i \cdot \mathbf{r}_\beta) c^{k\beta}. \quad (6.8)$$

Второе равенство (6.5) можно преобразовать так:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}^i &= c^{i\alpha} [(\nabla_\alpha \varphi^\gamma) \mathbf{r}_\gamma + \varphi^\gamma b_{\alpha\gamma} \mathbf{n} - (\partial_\alpha \varphi) \mathbf{n} - \\ &- \varphi b_\alpha^\gamma \mathbf{r}_\gamma + c_{\alpha\gamma} \psi^\gamma \mathbf{n} + c_{\gamma\alpha} \psi \mathbf{r}^\gamma]. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}^i \cdot \mathbf{r}_\beta &= c^{i\alpha} (\nabla_\alpha \varphi_\beta - b_{\alpha\beta} \varphi + c_{\beta\alpha} \psi) = \\ &= c^{i\alpha} (\nabla_\alpha \varphi_\beta - b_{\alpha\beta} \varphi) + \delta_\beta^i \psi \end{aligned}$$

и, следовательно, справедлива формула

$$M^{ij} = c^{i\alpha} c^{j\beta} (\nabla_\alpha \varphi_\beta - b_{\alpha\beta} \varphi) - c^{ij} \psi. \quad (6.10)$$

Учитывая, что на основании равенства (6.4')

$$\mathfrak{M}^i \cdot \mathbf{n} = 0,$$

из (6.9) имеем

$$c^{i\alpha} (\partial_\alpha \varphi + b_{\alpha\beta} \varphi^\beta + c_{\alpha\beta} \psi^\beta) = 0$$

или

$$\psi^i = c^{i\alpha} (\partial_\alpha \varphi + b_{\alpha\beta} \varphi^\beta). \quad (6.11)_1$$

Кроме этого из условия $M^{ij} = M^{ji}$ и формулы (6.10) следует зависимость

$$\psi = \frac{1}{2\sqrt{a}} (\nabla_1 \varphi_2 - \nabla_2 \varphi_1). \quad (6.11)_2$$

Равенства (6.11) означают, что из шести функций напряжения $(\varphi^1, \varphi^2, \varphi, \psi^1, \psi^2, \psi)$ независимыми являются лишь три, например, $\varphi^1, \varphi^2, \varphi$. Выразим через эти (последние) функции статические величины, в терминах которых записаны уравнения равновесия (2.20).

Сначала получим формулы для моментов. Имеем

$$\begin{aligned} M^{11} &= \frac{1}{a} (\nabla_2 \varphi_2 - b_{22} \varphi) = \frac{1}{a} (\partial_2 \varphi_2 - \Gamma_{22}^\alpha \varphi_\alpha - b_{22} \varphi) = \\ &= \frac{1}{A^2 B^2} \left(\frac{\partial B \varphi_{<2>}}{\partial \beta} + \frac{B}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \varphi_{<1>} - \frac{\partial B}{\partial \beta} \varphi_{<2>} - B^2 b_{<22>} \varphi \right) \end{aligned}$$

или

$$M_\alpha = \frac{1}{B} \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \varphi_\alpha - \sigma_\beta \varphi, \quad (6.12)_1$$

где (см. также (1.1.6)₂)

$$\varphi_\alpha = \frac{\varphi_1}{A}, \quad \varphi_\beta = \frac{\varphi_2}{B}.$$

Аналогично получаем

$$M_\beta = (A, \alpha \rightleftharpoons B, \beta) M_\alpha. \quad (6.12)_2$$

Далее находим

$$M_{<12>} = -\frac{1}{B} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \varphi_\beta - \tau_{\alpha\beta} \varphi - \psi,$$

$$M_{\langle 21 \rangle} = -\frac{1}{A} \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \varphi_\alpha - \tau_{\alpha\beta} \varphi + \psi,$$

откуда имеем

$$H = \frac{1}{2}(M_{\langle 12 \rangle} + M_{\langle 21 \rangle}) = -\frac{A}{2B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\varphi_\alpha}{A} \right) - \frac{B}{2A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\varphi_\beta}{B} \right) - \tau_{\alpha\beta} \varphi. \quad (6.12)_3$$

Принимая во внимание обозначения (3.6''), соотношения (6.12) можно записать в виде равенства

$$m = R_o^{-1} \mathbf{D}_1(\varphi_\alpha, \varphi, \varphi_\beta)^\oplus. \quad (6.13)$$

Перейдем теперь к выражению усилий через функции напряжения $\varphi_\alpha, \varphi_\beta, \varphi$. Прежде всего, на основании формул (6.11) получаем

$$\psi_\alpha \triangleq \psi_{\langle 1 \rangle} = \frac{1}{B} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} + \sigma_\beta \varphi_\beta - \tau_{\alpha\beta} \varphi_\alpha,$$

$$\psi_\beta \triangleq \psi_{\langle 2 \rangle} = -\frac{1}{A} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} - \sigma_\alpha \varphi_\alpha + \tau_{\alpha\beta} \varphi_\beta,$$

$$\psi = \frac{1}{2AB} \left(\frac{\partial B \varphi_\beta}{\partial \alpha} - \frac{\partial A \varphi_\alpha}{\partial \beta} \right). \quad (6.14)$$

Используя первую формулу (6.7), находим

$$T_\alpha = \frac{1}{B} \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial \beta} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \psi_\beta + \tau_{\alpha\beta} \psi.$$

Исключив отсюда функции $\psi_\alpha, \psi_\beta, \psi$ с помощью формул (6.14), получим (см. обозначения (3.6''))

$$-T_\alpha = d_{\alpha\beta}^{(1)} \varphi_\alpha + d_{\alpha\beta}^{(2)} \varphi + d_{\alpha\beta}^{(3)} \varphi_\beta. \quad (6.15)_1$$

Выполнив аналогичные выкладки, будем иметь

$$-T_\beta = d_{\beta\alpha}^{(3)} \varphi_\alpha + d_{\beta\alpha}^{(2)} \varphi + d_{\beta\alpha}^{(1)} \varphi_\beta. \quad (6.15)_2$$

И, наконец, на основании первого равенства (6.7) справедлива формула

$$T_{\langle 12 \rangle} = \frac{1}{B} \frac{\partial \psi_\beta}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \psi_\alpha - \sigma_\beta \psi.$$

Исключив отсюда $\psi_\alpha, \psi_\beta, \psi$ с помощью соотношений (6.14), по первой формуле (3.2') с использованием первого уравнения (2.19) находим

$$-S = d_{\alpha\beta}^{(0)}\varphi_\alpha + d\varphi + d_{\beta\alpha}^{(0)}\varphi_\beta. \quad (6.15)_3$$

Три равенства (6.15) можно заменить одной формулой

$$t = -R_o^{-2}\mathbf{D}_2(\varphi_\alpha, \varphi, \varphi_\beta)^\oplus. \quad (6.16)$$

Так как соотношения (6.13), (6.16) справедливы для любого набора функций $\varphi_\alpha, \varphi, \varphi_\beta$, имеющих нужное число производных, то они выполняются при замене столбца $(\varphi_\alpha, \varphi, \varphi_\beta)^\oplus$ на $-\sqrt{Ehd_o}u$. В этом случае будем иметь

$$t = -\sqrt{Ehd_o}R_o^{-2}\mathbf{D}_2u = -\sqrt{Ehd_o}\varepsilon,$$

$$m = \sqrt{Ehd_o}R_o^{-1}\mathbf{D}_1u = \sqrt{Ehd_o}\varepsilon.$$

Учитывая, что t и m удовлетворяют однородному уравнению (2.20), приходим к равенству

$$R_o\mathbf{L}_1\varepsilon - \mathbf{L}_2\varepsilon = 0,$$

связывающему параметры деформации и представляющему собой операторную форму уравнений неразрывности (см. (3.5)).

Литература

1. **Kirchhoff G.R.** Vorlesungen über mathematische Physik. Leipzig. 1876. 466 p. См. также Кирхгоф Г. Механика (Лекции по математической физике). М.: Изд-во АН СССР, 1962. 402 с.
2. **Love A.E.** A treatise on the mathematical theory of elasticity. V.2. Cambridge Univ. press. 1893. 327 p. См. также Ляв А. Математическая теория упругости. М.;Л.: ОНТИ, Гостехиздат, 1935. 674 с.
3. **Новожилов В.В.** Новый метод расчета тонких оболочек // *Изв. АН СССР. ОТН.* 1946. №1. С. 35-48.
4. **Гольденвейзер А.Л.** Дополнения и поправки к теории тонких оболочек Love // *Пластинки и оболочки.* М.: Госстройиздат, 1939. С. 85-105.
5. **Балабух Л.И.** Изгиб и кручение конических оболочек // *Тр. ЦАГИ.* 1946. №577. 64 с.

6. **Kirchhoff G.** Uber das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe // *J. reine und angew. Math.* 1850. Bd 40. P. 51-88. См. также Кирхгоф Густав. *Избранные труды.* М.: Наука, 1988. 430 с.
7. **Черных К.Ф.** О сопряженных задачах теории оболочек // *Докл. АН СССР.* 1957. Т.117. №6. С. 949-951.
8. **Михайловский Е.И., Черных К.Ф.** О некоторых особенностях деформационного варианта граничных величин // *Изв. АН СССР. МТТ.* 1985. №2. С. 155-162.
9. **Михайловский Е.И.** Прямые, обратные и оптимальные задачи для оболочек с подкрепленным краем. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1986. 220 с.
10. **Михайловский Е.И., Черных К.Ф.** Развитие механики оболочек в трудах школы академика В.В. Новожилова // *Успехи механики.* 2003. Т.2. №3. С. 87-126.
11. **Михайловский Е.И.** Математические модели механики упругих тел. – Уч. пособие для вузов. Сыктывкар: Изд-во Сыктывкарск. ун-та, 2004. 324 с.
12. **Новожилов В.В., Финкельштейн Р.М.** О погрешности гипотез Кирхгофа в теории оболочек // *ПММ.* 1943. Т.7. №5. С. 331-340.
13. **Черных К.Ф.** Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Л.: Машиностроение, 1986. 336 с.
14. **Черных К.Ф.** Линейная теория оболочек, ч. I. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1962. 274 с.
15. **Черных К.Ф.** Линейная теория оболочек, ч. II. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1964. 395 с.
16. **Новожилов В.В., Черных К.Ф., Михайловский Е.И.** Линейная теория тонких оболочек. Л.: Политехника, 1991. 656 с.

Summary**Mikhailovskii E.I.** The classical linear theory of shells

The equations and the boundary values of the modern classical linear theory are consecutively obtained. On equations' deduction the Novozhilov-Finkel'shtein criterion was used to estimate the Kirchhoff-Love hypotheses. The final variant of shells' theory includes the deformation boundary values, which were obtained by K.F. Chernykh for one-related middle surface and were generalized by the author of article for multirelated middle surface. It is shown that the compatibility conditions can be obtained directly from the equilibrium equations of shells' theory; initially condition was obtained by A.L. Gol'denweiser from the Gauss-Petersson-Kodacci equations for deformed middle surface. The author's operation form is used for recording the general equations of the linear shells' theory.

*Сыктывкарский университет**Поступила 20.01.2006*