

УДК 539.3

**УЧЕТ ПОПЕРЕЧНЫХ СДВИГОВ В ЗАДАЧЕ ОБ ИЗГИБЕ  
ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПАНЕЛИ <sup>1</sup>**

*В.В. Миронов*

При решении с учетом поперечных сдвигов по модели С.П.Тимошенко контактной задачи со свободной границей для круговой цилиндрической оболочки, лежащей на опорах и подкреплённой в надпорных сечениях свободно надетыми кольцами жесткости под действием нормальной нагрузки, равномерно распределённой по части дуги кольца [1], выявлен механизм зависимости изгибающих моментов от поперечных сдвигов — в области максимальных абсолютных значений графики изгибающих моментов от изменения кривизны срединной поверхности  $M_{ii}^w$  и от тангенциального изменения поперечных сдвигов  $M_{ii}^\psi$  находятся в противофазах, причем отношение  $|M_{ii}^\psi/M_{ii}^w|$  может многократно превосходить оценку погрешности гипотез Кирхгофа по критерию Новожилова-Финкельштейна [3]. С целью подтверждения названного механизма зависимости ниже рассматривается задача об изгибе с учетом поперечных сдвигов прямоугольной в плане цилиндрической панели под действием нормальной нагрузки, равномерно распределённой по области  $A$ , подобной по форме области  $\Omega$  срединной поверхности панели при постоянной равнодействующей  $Q_0$ . Граничные условия рассматриваются двух типов: шарнирное опирание по всем краям и шарнирное опирание по двум противоположным краям ( $\varphi = \pm\varphi_0/2$ ) и жесткая заделка по двум другим краям ( $\xi = \pm\xi_0/2$ ).

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке программы «Государственная поддержка ведущих научных школ РФ» (грант НШ – 2180.2003.1)

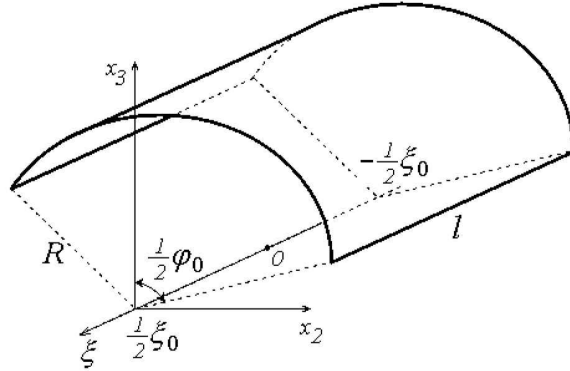


Рис. 1. К расчету цилиндрической панели

## 1. Случай шарнирно опертых краев

Изгиб цилиндрической панели в безразмерных координатах описывается следующей системой уравнений равновесия [1, 2]:

$$\begin{aligned} \Delta^4 w + 4b^4 \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} - \frac{h_\psi^2 E h}{D} \frac{\partial^4 \Delta w}{\partial \xi^4} &= \frac{R^4}{D} (\Delta^2 q - \frac{h_\psi^2}{R^2} \Delta^3 q); \\ \Delta \psi_1 - \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial \varphi} - \frac{\partial \psi_2}{\partial \xi} \right) - \frac{R^2}{h_\psi^2} \psi_1 &= \frac{1}{R} \frac{\partial \Delta w}{\partial \xi}, \\ \Delta \psi_2 - \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial \psi_2}{\partial \xi} - \frac{\partial \psi_1}{\partial \varphi} \right) - \frac{R^2}{h_\psi^2} \psi_2 &= \frac{1}{R} \frac{\partial \Delta w}{\partial \varphi} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Граничные условия шарнирного опирания имеют вид

$$\begin{aligned} w = 0, \quad \theta_2 = 0, \quad M_{11} = 0 \quad \text{при } \xi = \pm \xi_0/2; \\ w = 0, \quad \theta_1 = 0, \quad M_{22} = 0 \quad \text{при } \varphi = \pm \varphi_0/2. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \theta_1 = -\frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \xi} + \psi_1, \quad \theta_2 = -\frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \psi_2 \quad \text{— углы поворота нормали,} \\ M_{ii} = M_{ii}^w + M_{ii}^\psi, \quad i = 1, 2 \quad \text{— изгибающие моменты,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{11}^w = -\frac{D}{R^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right), \quad M_{22}^w = -\frac{D}{R^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right), \\ M_{11}^\psi = \frac{D}{R} \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} + \nu \frac{\partial \psi_2}{\partial \varphi} \right), \quad M_{22}^\psi = \frac{D}{R} \left( \frac{\partial \psi_2}{\partial \varphi} + \nu \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} \right); \end{aligned} \quad (1.3)$$

$w$ ,  $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$ ,  $E$ ,  $\nu$ ,  $R$ ,  $h$  — прогиб, цилиндрическая жесткость, модуль Юнга, коэффициент Пуассона, радиус и толщина панели соответственно;  $4b^4 = 12(1 - \nu^2)R^2/h^2$ ,  $h_\psi^2 = h^2/6(1 - \nu)$ ,  $\xi_0 = l/R$  — безразмерная длина панели.

Приведем граничные условия (1.2) к более удобному для решения задачи виду. Из условия  $w|_{\xi=\pm\xi_0/2} = 0$  следует, что и все производные по координате  $\varphi$  функции  $w$  равны нулю на краях  $\pm\xi_0/2$ . Отсюда имеем  $\psi_2|_{\xi=\pm\xi_0/2} = 0$  (см. второе уравнение в (1.2)<sub>1</sub>), и, следовательно,  $\partial\psi_2/\partial\varphi|_{\xi=\pm\xi_0/2} = 0$ . Рассмотрим далее уравнение

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial\xi} + \frac{\partial\psi_2}{\partial\varphi} = -\frac{1}{\mu h}\left(q - \frac{1}{R^3}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2}\right) \quad (1.4)$$

( $\mu = E/2(1 + \nu)$ ,  $\Phi$  — функция напряжения).

На краях  $\xi = \pm\xi_0/2$  первое слагаемое в правой части этого уравнения в случае опертой панели следует положить равным нулю, так как нагрузка целиком передается на опору ( $w|_{\xi=\pm\xi_0/2} = 0$ ). Вторым слагаемым в правой части уравнения в случае пологой оболочки можно пренебречь. Таким образом, приходим к условию

$$\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial\xi} + \frac{\partial\psi_2}{\partial\varphi}\right)|_{\xi=\pm\xi_0/2} \approx 0,$$

откуда следует, что  $\partial\psi_1/\partial\xi = 0$  при  $\xi = \pm\xi_0/2$ . Суммируя сказанное группу граничных условий (1.2)<sub>1</sub> можно записать так:

$$w|_{\xi=\pm\xi_0/2} = 0, \quad \psi_2|_{\xi=\pm\xi_0/2} = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2}|_{\xi=\pm\xi_0/2} = 0. \quad (1.5)_1$$

Проводя аналогичные рассуждения для краев  $\varphi = \pm\varphi_0/2$ , приходим к следующим условиям (без допущения о пологости оболочки, если на этих краях не стеснены перемещения  $u_2$ , т.е.  $T_{22} = \partial^2\Phi/\partial\xi^2 = 0$ ):

$$w|_{\varphi=\pm\varphi_0/2} = 0, \quad \psi_1|_{\varphi=\pm\varphi_0/2} = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}|_{\varphi=\pm\varphi_0/2} = 0. \quad (1.5)_2$$

Уравнения (1.1), (1.5) допускают решение методом Луи Навье в двойных тригонометрических рядах с использованием следующего представления основных искомым функций и нагрузки  $q$ :

$$\begin{bmatrix} w \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ q \end{bmatrix} = \sum_{m,k=1,3,\dots}^{\infty} \begin{bmatrix} w_{mk} \cos m_*\xi \cos k_*\varphi \\ \psi_{mk}^{(1)} \sin m_*\xi \cos k_*\varphi \\ \psi_{mk}^{(2)} \cos m_*\xi \sin k_*\varphi \\ q_{mk} \cos m_*\xi \cos k_*\varphi \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

$$(m_* = \frac{\pi m}{\xi_0}, \quad k_* = \frac{\pi k}{\varphi_0}).$$

С учетом сказанного выше нагрузка определяется так:

$$q(\xi, \varphi) = \begin{cases} \frac{Q_0}{\varepsilon_0 R^2 \xi_0 \varphi_0}, & (\xi, \varphi) \in A \\ 0, & (\xi, \varphi) \notin A \end{cases},$$

где

$$A = \{(\xi, \varphi) : |\xi| \leq \frac{\varepsilon \xi_0}{2}, |\varphi| \leq \frac{\varepsilon \varphi_0}{2}\}. \quad \varepsilon - \text{коэффициент подобия области } A \text{ срединной поверхности } \Omega: \varepsilon \in [0, 1];$$

Можно показать, что коэффициенты Фурье ряда (1.6)<sub>4</sub> имеют вид

$$q_{mk} = \frac{16Q_0}{\pi^2 R^2 \varepsilon^2 m k \xi_0 \varphi_0} \sin \frac{\pi m \varepsilon}{2} \sin \frac{\pi k \varepsilon}{2}. \quad (1.7)$$

Из уравнения (1.1)<sub>1</sub> определяем коэффициенты Фурье  $w_{mk}$

$$w_{mk} = \frac{R^4 (m_*^2 + k_*^2)^2}{D L_{mk}} [1 + \frac{h_\psi^2}{R^2} (m_*^2 + k_*^2)] q_{mk}, \quad (1.8)$$

где

$$L_{mk} = (m_*^2 + k_*^2)^4 + 4b^4 m_*^4 + 2(1 + \nu) m_*^4 (m_*^2 + k_*^2).$$

Для коэффициентов Фурье  $\psi_{mk}^{(1)}$ ,  $\psi_{mk}^{(2)}$  получаем систему уравнений

$$[m_*^2 + \frac{1-\nu}{2} k_*^2 + \frac{R^2}{h_\psi^2}] \psi_{mk}^{(1)} + [\frac{1+\nu}{2} m_* k_*] \psi_{mk}^{(2)} = -\frac{m_*}{R} (m_*^2 + k_*^2) w_{mk},$$

$$[\frac{1+\nu}{2} m_* k_*] \psi_{mk}^{(1)} + [\frac{1-\nu}{2} m_*^2 + k_*^2 + \frac{R^2}{h_\psi^2}] \psi_{mk}^{(2)} = -\frac{k_*}{R} (m_*^2 + k_*^2) w_{mk},$$

из которой находим

$$\psi_{mk}^{(1)} = \frac{m_*}{k_*} \psi_{mk}^{(2)} = -\frac{m_* (m_*^2 + k_*^2)}{R \Delta_{mk}} [\frac{1-\nu}{2} (m_*^2 + k_*^2) + \frac{R^2}{h_\psi^2}] w_{mk},$$

$$\Delta_{mk} = [m_*^2 + \frac{1-\nu}{2} k_*^2 + \frac{R^2}{h_\psi^2}] [\frac{1-\nu}{2} m_*^2 + k_*^2 + \frac{R^2}{h_\psi^2}] - [\frac{1+\nu}{2}]^2 m_*^2 k_*^2. \quad (1.9)$$

После определения прогиба и поперечных сдвигов изгибающие моменты вычисляются по формулам

$$M_{11} = \frac{D}{R^2} \sum_{m,k=1,3,\dots} (m_*^2 + \nu k_*^2) (w_{mk} + \frac{R}{m_*} \psi_{mk}^{(1)}) \cos m_* \xi \cos k_* \varphi,$$

$$M_{22} = \frac{D}{R^2} \sum_{m,k=1,3,\dots} (k_*^2 + \nu m_*^2) (w_{mk} + \frac{R}{m_*} \psi_{mk}^{(1)}) \cos m_* \xi \cos k_* \varphi. \quad (1.10)$$

Изложенный модифицированный метод Луи Навье определения прогиба, поперечных сдвигов и изгибающих моментов можно применять при  $\varepsilon \in (0, 1]$ . При  $\varepsilon = 0$  (случай сосредоточенной в центре панели нагрузки) формула (1.7) переходит в следующую:

$$q_{mk} = \frac{4Q_0}{R^2 \xi_0 \varphi_0}, \quad (1.11)$$

что приводит к тому, что ряды (1.10) становятся расходящимися. Поэтому в случае сосредоточенной нагрузки применялась следующая комбинированная схема — прогибы и поперечные сдвиги вычислялись в двойных рядах, а изгибающие моменты по формулам (1.3) с использованием конечных разностей для производных. При этом, во внутренних точках сетки на области  $\Omega$  применялись симметричные разностные формулы для первой (функции  $\psi_1, \psi_2$ ) и второй (функция  $w$ ) производных; на границе  $\partial\Omega$  использовались соответственно левосторонние и правосторонние разностные формулы для первой и второй производных. Шаг сетки измельчался до тех пор, пока не была обеспечена сходимость. Количество членов в рядах Фурье функций  $w, \psi_1, \psi_2$  (и  $M_{ii}$  при  $\varepsilon \in (0, 1]$ ) выбиралось таким, чтобы обеспечить сходимость соответствующих рядов с точностью большей погрешности гипотез Кирхгофа.

## 2. Случай шарнирно опертых при $\varphi = \pm\varphi_0/2$ и жестко заделанных при $\xi = \pm\xi_0/2$ краев

Система уравнений равновесия рассматриваемой панели по прежнему имеет вид (1.1). С целью избежания дифференцирования нагрузки в правой части уравнения (1.1)<sub>1</sub> введем в рассмотрение функцию  $W$  по следующему правилу:

$$w = \Delta^2 W - \frac{h_\psi^2}{R^2} \Delta^3 W. \quad (2.1)$$

Основное уравнение равновесия переписется так:

$$\Delta^4 W + 4b^4 \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} - \frac{h_\psi^2 E h}{D} \frac{\partial^4 \Delta W}{\partial \xi^4} = \frac{R^4}{D} q. \quad (2.2)$$

Граничные условия имеют вид

$$w|_{\xi=\pm\xi_0/2} = 0, \quad \theta_1|_{\xi=\pm\xi_0/2}, \quad \theta_2|_{\xi=\pm\xi_0/2};$$

$$w|_{\varphi=\pm\varphi_0/2}, \quad M_{22}|_{\varphi=\pm\varphi_0/2}, \quad \theta_1|_{\varphi=\pm\varphi_0/2}. \quad (2.3)$$

Последние равенства будут выполнены, если функции  $W$ ,  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  подчинить следующим условиям:

$$\begin{aligned} W|_{\xi=\pm\xi_0/2} = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2}|_{\xi=\pm\xi_0/2} = 0, \quad \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4}|_{\xi=\pm\xi_0/2} = 0, \\ -\frac{1}{R}\left(\frac{\partial^5 W}{\partial \xi^5} + 2\frac{\partial^5 W}{\partial \xi^3 \partial \varphi^2} + \frac{\partial^5 W}{\partial \xi \partial \varphi^4}\right) + \psi_1|_{\xi=\pm\xi_0/2} = 0, \quad \psi_2|_{\xi=\pm\xi_0/2} = 0; \\ W|_{\varphi=\pm\varphi_0/2}, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2}|_{\varphi=\pm\varphi_0/2} = 0, \quad \frac{\partial^4 W}{\partial \varphi^4}|_{\varphi=\pm\varphi_0/2} = 0, \\ \frac{\partial^6 W}{\partial \varphi^6}|_{\varphi=\pm\varphi_0/2} = 0, \quad \psi_1|_{\varphi=\pm\varphi_0/2} = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

(при формулировке граничных условий при  $\xi = \pm\xi_0/2$  в формуле (2.1) пренебрегли подчеркнутым слагаемым).

Для решения системы уравнений (2.2), (1.1)<sub>2</sub>, (1.1)<sub>3</sub> с граничными условиями (2.4) применим модифицированный метод одинарных тригонометрических рядов Мориса Леви с использованием следующего представления для искомых функций  $W$ ,  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  и нагрузки  $q$ :

$$\begin{bmatrix} W \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ q \end{bmatrix} = \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \begin{bmatrix} W_k(\xi) \cos k_* \varphi \\ \psi_k^{(1)}(\xi) \cos k_* \varphi \\ \psi_k^{(2)}(\xi) \sin k_* \varphi \\ q_k(\xi) \cos k_* \varphi \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

С учетом представления (2.5) система обыкновенных дифференциальных уравнений (2.2), (1.1)<sub>2</sub>, (1.1)<sub>3</sub> и граничных условий (2.4) запишется так:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{d\xi^2} - k_*^2 I\right)^4 W_k + 4b^4 \frac{d^4 W_k}{d\xi^4} - 2(1 + \nu) \left(\frac{d^6}{d\xi^6} - k_*^2 \frac{d^4}{d\xi^4}\right) W_k = \frac{R^4}{D} q_k, \\ \left[\frac{d^2}{d\xi^2} + \left(\frac{\nu - 1}{2} k_*^2 - \frac{R^2}{h_\psi^2}\right)\right] \psi_k^{(1)} + \left[\frac{1 + \nu}{2} k_* \frac{d}{d\xi}\right] \psi_k^{(2)} = \frac{1}{R} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{d^2}{d\xi^2} - k_*^2 I\right)^3 W_k, \\ \left[-\frac{1 + \nu}{2} k_* \frac{d}{d\xi}\right] \psi_k^{(1)} + \left[\frac{1 - \nu}{2} \frac{d^2}{d\xi^2} + \left(-\frac{R^2}{h_\psi^2} - k_*^2\right) I\right] \psi_k^{(2)} = -\frac{1}{R} k_* \left(\frac{d^2}{d\xi^2} - k_*^2 I\right)^3 W_k; \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$W_k|_{\xi=\pm\xi_0/2} = 0, \quad \frac{d^2 W_k}{d\xi^2}|_{\xi=\pm\xi_0/2} = 0, \quad \frac{d^4 W_k}{d\xi^4}|_{\xi=\pm\xi_0/2} = 0,$$

$$-\frac{1}{R}\left(\frac{d^5 W_k}{d\xi^5} - 2k_*^2 \frac{d^3 W_k}{d\xi^3} + k_*^4 \frac{dW_k}{d\xi}\right) + \psi_k^{(1)}|_{\xi=\pm\xi_0/2} = 0, \quad \psi_k^{(2)}|_{\xi=\pm\xi_0/2} = 0. \quad (2.7)$$

Еще одно граничное условие

$$\frac{d\psi_k^{(1)}}{d\xi}|_{\xi=\pm\xi_0/2} = 0 \quad (2.7')$$

следует из уравнения (1.4).

*Замечание.* Сделаем оценку подчеркнутого в уравнении (2.6)<sub>1</sub> слагаемого. Следуя В.З.Власову [4] выпишем соответствующее однородное дифференциальное уравнение

$$\left[\left(\frac{d^2}{d\xi^2} - k_*^2 I\right)^4 + 4b^4 \frac{d^4}{d\xi^4} - 2(1 + \nu)\left(\frac{d^6}{d\xi^6} - k_*^2 \frac{d^4}{d\xi^4}\right)\right]W_k = 0, \quad (2.8)$$

и его характеристическое уравнение

$$(\lambda_k^2 - k_*^2)^4 + 4b^4 \lambda_k^4 - 2(1 + \nu)(\lambda_k^6 - k_*^2 \lambda_k^4) = 0. \quad (2.9)$$

Последнее уравнение имеет восемь попарно сопряженных корней, которые можно записать в виде

$$\lambda_k^{(1)} = \pm p_k^{(1)} \pm q_k^{(1)}, \quad \lambda_k^{(2)} = \pm p_k^{(2)} \pm q_k^{(2)}. \quad (2.10)$$

При неучете подчеркнутых в уравнении (2.9) слагаемых получим характеристические корни классического уравнения В.З.Власова. Близость названных корней и корней уравнения (2.9) будет означать, что роль подчеркнутого слагаемого в уравнении (2.8) мала, и его можно не учитывать при численных расчетах. В приведенных таблицах помещены значения корней характеристического уравнения (2.10) с учетом подчеркнутого слагаемого (табл.1) и без него (табл.2) при следующих значениях параметров:

$$R = 1 \text{ м}, \quad \nu = 0.3, \quad \varphi_0 = \pi/8.$$

Табл. 1

|           | $h = 1$  | $h = 5$  | $h = 10$   |
|-----------|--|--|--|
| $k = 1$   | $\pm 2.7507 \pm 1.9267i$<br>$\pm 15.630 \pm 10.902i$ | $\pm 5.1777 \pm 1.8624i$<br>$\pm 10.983 \pm 3.8290i$ | $\pm 5.9590 \pm 1.5557i$<br>$\pm 10.104 \pm 2.4262i$ |
| $k = 5$   | $\pm 33.577 \pm 5.4214i$<br>$\pm 46.456 \pm 7.4072i$ | $\pm 37.098 \pm 2.8326i$<br>$\pm 42.909 \pm 2.8522i$ | $\pm 37.913 \pm 2.2625i$<br>$\pm 42.093 \pm 1.6805i$ |
| $k = 10$  | $\pm 73.563 \pm 5.9765i$<br>$\pm 86.443 \pm 6.8518i$ | $\pm 77.086 \pm 3.1222i$<br>$\pm 82.917 \pm 2.5415i$ | $\pm 77.864 \pm 2.6471i$<br>$\pm 82.139 \pm 1.1505i$ |
| $k = 100$ | $\pm 793.54 \pm 7.1252i$<br>$\pm 806.46 \pm 5.6546i$ | $\pm 796.46 \pm 5.5176i$<br>$\pm 801.06 \pm 0i$      | $\pm 796.70 \pm 5.4925i$<br>$\pm 800.26 \pm 0i$      |

Табл. 2

|           | $h = 1$  | $h = 5$  | $h = 10$   |
|-----------|--|--|--|
| $k = 1$   | $\pm 2.7518 \pm 1.9268i$<br>$\pm 15.606 \pm 10.927i$ | $\pm 5.1911 \pm 1.8499i$<br>$\pm 10.940 \pm 3.8986i$ | $\pm 5.9842 \pm 1.5171i$<br>$\pm 10.049 \pm 2.5477i$ |
| $k = 5$   | $\pm 33.586 \pm 5.3947i$<br>$\pm 46.440 \pm 7.4594i$ | $\pm 37.126 \pm 2.6677i$<br>$\pm 42.875 \pm 3.0808i$ | $\pm 37.968 \pm 1.9291i$<br>$\pm 42.033 \pm 2.1357i$ |
| $k = 10$  | $\pm 73.575 \pm 5.9107i$<br>$\pm 86.429 \pm 6.9434i$ | $\pm 77.126 \pm 2.7710i$<br>$\pm 82.874 \pm 2.9775i$ | $\pm 77.968 \pm 1.9808i$<br>$\pm 82.032 \pm 2.0840i$ |
| $k = 100$ | $\pm 793.57 \pm 6.3754i$<br>$\pm 806.43 \pm 6.4787i$ | $\pm 797.18 \pm 2.8639i$<br>$\pm 802.87 \pm 2.8846i$ | $\pm 796.97 \pm 2.0272i$<br>$\pm 802.03 \pm 2.0376i$ |

Как усматривается из приведенных таблиц для не очень толстостенных цилиндрических оболочек ( $h/R \leq 0.05$ ) и с не сильно изменяющимся напряженно-деформированным состоянием (при котором все функции можно описать с использованием не очень большого числа гармоник) подчеркнутым слагаемым в уравнении (2.6)<sub>1</sub> можно пренебречь. ■

Заданную нагрузку  $q$  можно представить так:

$$q = \frac{Q_0}{\varepsilon^2 R^2 \xi_0 \varphi_0} \Delta(\xi_0/2, \varepsilon; \xi) \Delta(\varphi_0/2, \varepsilon; \varphi), \quad (2.11)$$

где

$$\Delta(\varphi_0/2, \varepsilon; \varphi) = H(\varphi + \varepsilon \varphi_0/2) - H(\varphi - \varepsilon \varphi_0/2) \quad (2.12)$$

( $H$  — функция Хевисайда).

Функцию  $\Delta(\varphi_0/2, \varepsilon; \varphi)$  можно представить следующим рядом Фурье:

$$\Delta(\varphi_0/2, \varepsilon; \varphi) = \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{4}{\pi k} \sin \frac{\pi k \varepsilon}{2} \cos k_* \varphi. \quad (2.13)$$

Подставив ряд (2.13) в формулу (2.11) получаем следующее выражение для функций  $q_k(\xi)$ :

$$q_k = \frac{4Q_0}{\varepsilon^2 R^2 \xi_0 \varphi_0 \pi k} \sin \frac{\pi k \varepsilon}{2} \Delta(\xi_0/2, \varepsilon; \xi). \quad (2.14)$$

Нетрудно видеть, что в случае сосредоточенной в центре панели нагрузки ( $\varepsilon = 0$ ) функции  $q_k$  выражаются по формуле:

$$q_k = \frac{2Q_0}{R^2} \delta(\xi). \quad (2.15)$$



Краевая задача (2.6), (2.7) обладает той особенностью, что граничные условия не распадаются отдельно для функции  $W_k$  и функций  $\psi_k^{(i)}$ , что делает затруднительным ее аналитическое решение, поэтому для решения названной системы используются численные методы, включенные в состав стандартных математических пакетов.

### 3. Численный эксперимент

Ниже приведены графики изгибающих моментов при следующих значениях параметров:

$$R=1 \text{ м}, h=0.05 \text{ м}, l=4 \text{ м}, \varphi_0 = \pi/8, \\ E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2, \nu = 0.3, Q_0/R^2 = 1 \text{ кг/см}^2.$$

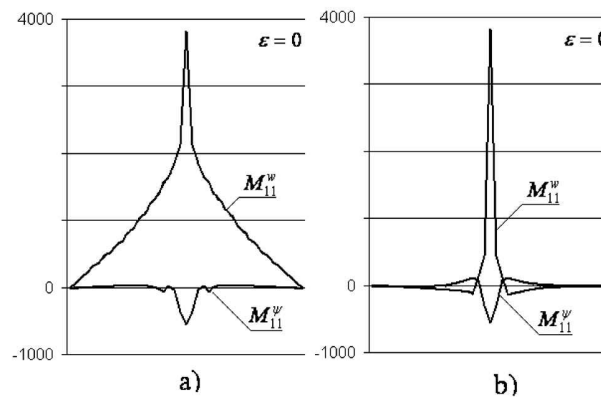


Рис. 3.1. График изгибающих моментов  $M_{11}$  по линии  $\xi = 0$  (случай а)) и  $\varphi = 0$  (случай б)) при  $\varepsilon = 0$  (шарнирное опирания краев при  $\xi = \pm\xi_0/2$ )

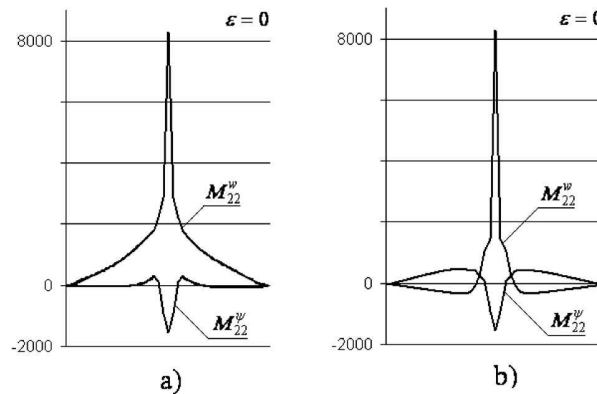
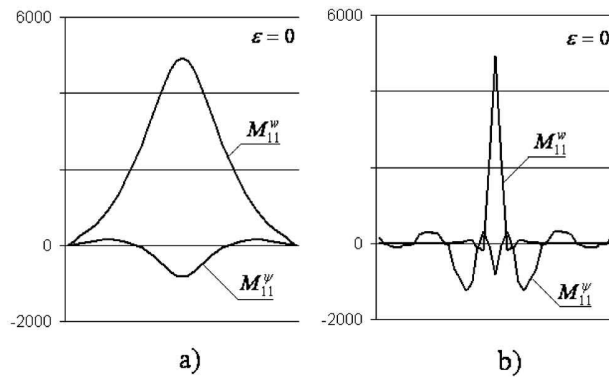
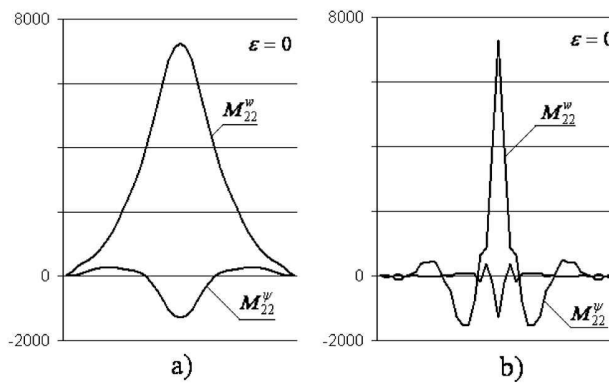


Рис. 3.2. График изгибающих моментов  $M_{22}$  по линии  $\xi = 0$  (случай а)) и  $\varphi = 0$  (случай б)) при  $\varepsilon = 0$  (шарнирное опирания краев при  $\xi = \pm\xi_0/2$ )



**Рис. 3.3.** График изгибающих моментов  $M_{11}$  по линии  $\xi = 0$  (случай а)) и  $\varphi = 0$  (случай б)) при  $\varepsilon = 0$  (жесткая заделка краев при  $\xi = \pm\xi_0/2$ )



**Рис. 3.4.** График изгибающих моментов  $M_{22}$  по линии  $\xi = 0$  (случай а)) и  $\varphi = 0$  (случай б)) при  $\varepsilon = 0$  (жесткая заделка краев при  $\xi = \pm\xi_0/2$ )

Как усматривается из приведенных графиков во всех случаях происходит релаксация максимальных значений изгибающих моментов за счет того, что графики моментов от изменения кривизны срединной поверхности и от тангенциального изменения поперечных сдвигов находятся в противофазе в области максимальных абсолютных значений (см. рис. 3.1 – 3.4). Названный эффект тем заметнее чем больше параметр  $h/R$  (рис. 3.5.). Таким образом, учет поперечных сдвигов главным образом оказывает влияние на НДС в цилиндрической панели через дополнительные слагаемые в формулах для изгибающих моментов.

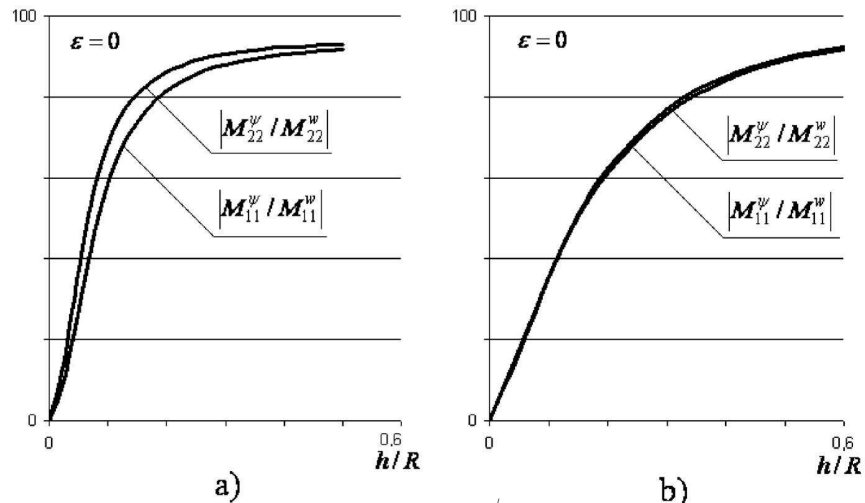


Рис. 3.5. График отношения  $|M_{ii}^{\psi}/M_{ii}^w|$  при  $\varepsilon=0$ .  
 Случай а) — шарнирное опирания краев при  $\xi = \pm\xi_0/2$ ,  
 случай б) — жесткая заделка краев при  $\xi = \pm\xi_0/2$

## Литература

1. Михайловский Е.И., Миронов В.В. Две контактные задачи со свободной границей для цилиндрической оболочки // *Матер. V Российской конфер. с междунар. участием / Под ред. акад. Н.Ф. Морозова.* — Саратов: Изд-во Саратовск. ун-та, 2005. С. 213-218.
2. Михайловский Е.И. Математические модели механики упругих тел: Учеб. пособие. Сыктывкар: Изд-во Сыктывкарского ун-та, 2004. 324 с.
3. Новожилов В.В., Финкельштейн Р.М. О погрешности гипотез Кирхгофа в теории оболочек // *ПММ. 1943. Т.7. Вып.5.* С. 331-340.
4. Власов В.З. Избранные труды. Т.1. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 528 с.

**Summary**

**Mironov V.V.** The account of transversal shears in a problem about a bend of the cylindrical panel

In this paper the task about a bend of cylindrical panel under effect of normal load is considered. The normal load are distributed on field, similar to middle surface of a panel. The bend of panel on register of transversal shears by S.P. Timoshenko's model is described. The mechanism of dependence of a moments for transversal shears is confirmed — the graphics of moments for change of curvature of middle surface and for change of transversal shears are be in anti-phases in fields of a maximal absolute values.

*Сыктывкарский университет*

*Поступила 31.01.2006*