*Вестник Сыктывкарского университета.*
*Сер.1. Вып.6. 2006*

**УДК 681.511.4**

# ДИНАМИКА ОДНОМЕРНЫХ ЧАСТОТНО-ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

***Н.А. Антонова***

Получены достаточные, а в ряде случаев и необходимые, условия на параметры системы управления, при которых существуют периодические колебания с заданным числом импульсов на периоде в системах с частотно-импульсным модулятором первого рода или с интегральным частотно-импульсным модулятором.

## 1. Введение

В данной работе исследуется задача существования периодических колебаний в частотно-импульсных системах управления первого и второго рода с постоянным внешним возмущением. Эта задача решалась в [1,2], где были получены достаточные условия существования и устойчивости вынужденных периодических колебаний с произвольным числом импульсов на периоде с помощью введения статических характеристик модулятора. В [3] строились функции Ляпунова для проверки устойчивости стационарных процессов. Но все эти условия мало зависят от свойств частотно-импульсных модуляторов, практически неэффективны для систем первого порядка, и, следовательно, далеки от необходимых. Для одномерных систем управления в работе приводится аналитическое описание областей в пространстве параметров системы, где существуют периодические колебания с наперед заданным числом импульсов на периоде.

## 2. Описание системы

Одномерная частотно-импульсная система управления описывается уравнением

$$\sigma(t) = \mathrm{e}^{-\alpha(t-t_n)}(\sigma_n - \psi - \lambda_n\gamma) + \psi, \text{ если } t_n \le t < t_{n+1}, \tag{1}$$

где $\psi$ – постоянно действующее возмущение, $\gamma, \alpha$ – параметры импульсной переходной функции непрерывной линейной части системы, $\sigma_n$ – ошибка управления объектом в момент времени $t_n$, т.е. $\sigma_n = \sigma_n(t_n)$, а последовательность временных моментов $t_n$ формируется по правилу

$$t_{n+1} = t_n + T_n, \quad n = 0, 1, 2, ...; \quad t_0 = 0.$$

В зависимости от способа вычисления знаков импульсов $\lambda_n$ и расстояний между соседними временными моментами возникновения импульсов $T_n$ рассматриваются следующие виды частотно-импульсного управления:

а) Частотно-импульсная модуляция первого рода (ЧИМ-I), где $T_n$ определяется как

$$T_n = F(|\sigma_n|). \tag{2}$$

Здесь $F(\mu)$ четная, непрерывно дифференцируемая, монотонно убывающая для положительных значений аргумента функция, причем $F(\mu) \ge F_\infty > 0$ при всех $\mu$. Последовательность величин $\lambda_n$ зависит от зоны нечувствительности системы управления $\Delta > 0$ и вычисляется по закону

$$\lambda_n = \begin{cases} \mathrm{sign}\sigma_n, & \text{если} |\sigma_n| > \Delta; \\ 0, & \text{если} |\sigma_n| \le \Delta. \end{cases} \tag{3}$$

б) Интегральная частотно-импульсная модуляция (ИЧИМ), для которой $T_n$ определяется как первый положительный корень уравнения

$$\left| \int_{t_n}^{t_n+T_n} \sigma(t)dt \right| = \Delta, \tag{4}$$

а

$$\lambda_{n+1} = \mathrm{sign} \int_{t_n}^{t_n+T_n} \sigma(t)dt. \tag{5}$$

## 3. Формулировка результатов

Пусть $m$ – заданное натуральное число. Будем исследовать $T$ – периодические решения уравнения (1), для которых

$$\sigma(t+T) = \sigma(t) \text{ для всех t} \ge 0, \tag{6}$$

$$\sigma_{n+m} = \sigma_n \text{ для всех } n = 0, 1, 2, ..., \tag{7}$$

и среди значений $\sigma_0, \sigma_1, ..., \sigma_{m-1}$ нет пары одинаковых. Последовательность знаков импульсов на исследуемом $T$-периодическом колебании считается наперед заданной. Нас интересуют условия на параметры $\alpha, \gamma, \psi, \Delta$ системы (1)-(5), при которых искомое колебание реализуется. Будем считать, что все эти параметры положительные, т.е.

$$\alpha > 0, \quad \gamma > 0, \quad \psi > 0, \quad \Delta > 0.$$

**Теорема 1** ( ЧИМ-I, $m = 1$). *В системе управления* $(1)-(3)$ *с ЧИМ-I периодическое колебание с одним импульсом на периоде существует в том и только том случае, если выполняется одно из неравенств*

$$\psi \leq \Delta \text{ либо } \psi > \Delta + \frac{\gamma}{\mathrm{e}^{\alpha F(\Delta)} - 1}. \tag{8}$$

**Теорема 2** ( ЧИМ-I, $m = 2$, тип $(0, 1)$). *В системе управления* $(1)-(3)$ *с ЧИМ-I существует периодическое колебание с двумя импульсами на периоде знаков* $\lambda_0 = 0$ *и* $\lambda_1 = 1$, *если выполняются неравенства*

$$\alpha F(\Delta) + \alpha F(\psi - (\gamma + \psi - \Delta)\mathrm{e}^{-\alpha F(\Delta)}) > \ln(1 + \frac{\gamma}{\psi - \Delta}), \tag{9}$$

$$\alpha F(\Delta) + \alpha F(\psi - (\psi + \Delta)\mathrm{e}^{-\alpha F(\Delta)}) \geq \ln(1 + \frac{\gamma}{\psi + \Delta}\mathrm{e}^{\alpha F(\Delta)}), \tag{10}$$

$$\alpha F(\Delta) + \alpha F(\psi - (\psi - \Delta)\mathrm{e}^{-\alpha F(\Delta)}) \leq \ln(1 + \frac{\gamma}{\psi - \Delta}\mathrm{e}^{\alpha F(\Delta)}). \tag{11}$$

**Теорема 3** ( ЧИМ-I, $m = 2$, тип $(-1, 1)$). *В системе управления* $(1)-(3)$ *с ЧИМ-I существует периодическое колебание с двумя импульсами на периоде знаков* $\lambda_0 = -1$ *и* $\lambda_1 = 1$, *если* $\psi > \Delta$ *и выполняется неравенство*

$$\alpha F(\Delta) + \alpha F(\psi + (\gamma - \psi - \Delta)\mathrm{e}^{-\alpha F(\Delta)}) < \ln(1 + \frac{\gamma}{\psi + \Delta}(\mathrm{e}^{\alpha F(\Delta)} - 1)). \tag{12}$$

**Теорема 4** ( ЧИМ-I, $m = 2$, тип $(1, 1)$). *В системе управления* $(1)-(3)$ *с ЧИМ-I существует периодическое колебание с двумя импульсами на периоде знаков* $\lambda_0 = 1$ *и* $\lambda_1 = 1$, *если выполняются неравенства*

$$\alpha F(\psi - (\gamma + \psi - \Delta)\mathrm{e}^{-\alpha F(\Delta)}) > \ln(\frac{\gamma + (\gamma + \psi - \Delta)\mathrm{e}^{-\alpha F(\Delta)}}{(\psi - \Delta)}), \tag{13}$$

$$\alpha F(\psi - A) < \ln(\frac{(\gamma + A)}{(\psi - \sigma_* + \dfrac{\sigma_* - \Delta}{n})}), \tag{14}$$

$$\alpha F(\psi - B) > \ln(\frac{(\gamma + B)}{(\psi - \sigma_* - \dfrac{\psi - \sigma_*}{m})}), \tag{15}$$

где

$$A = (\gamma + \psi - \sigma_* + \frac{\sigma_* - \Delta}{n})\mathrm{e}^{-\alpha F(\sigma_* - \frac{\sigma_* - \Delta}{n})},$$

$$B = (\gamma + \psi - \sigma_* - \frac{\psi - \sigma_*}{m})\mathrm{e}^{-\alpha F(\sigma_* + \frac{\psi - \sigma_*}{m})},$$

$n$ и $m$ некоторые достаточно большие числа, а $\sigma_*$ – решение уравнения

$$\alpha F(\sigma_*) = \ln(1 + \frac{\gamma}{\psi - \sigma_*}). \tag{16}$$

**Теорема 5** ( ЧИМ-I, $m = 3$, тип $(0, 0, 1)$). *В системе управления* $(1) - (3)$ *с ЧИМ-I существует периодическое колебание с тремя импульсами на периоде знаков* $\lambda_0 = 0$*,* $\lambda_1 = 0$ *и* $\lambda_2 = 1$*, если выполняются неравенства*

$$\alpha[F(\Delta) + F(|\psi - \kappa(\Delta)|) + F(|\psi - \kappa(\Delta)\mathrm{e}^{-\alpha F(|\psi - \kappa(\Delta)|)}|)] > \ln(1 + \frac{\gamma}{(\psi - \Delta)}), \tag{17}$$

$$\psi < \Delta(1 + \frac{2}{\mathrm{e}^{\alpha F(\Delta)} - 1}), \tag{18}$$

$$\alpha[F(|x_*|) + F(\Delta)] < \ln\frac{\psi - x_*}{\psi - \sigma_*}, \tag{19}$$

$$\frac{\gamma + \psi - \Delta}{\psi + \Delta} < \frac{\gamma + \psi - \sigma_*}{\psi - x_*}, \tag{20}$$

где $x_*$ – наибольший из корней уравнения $\psi - (\psi - x)\mathrm{e}^{-\alpha F(|x|)} = \Delta$ на интервале $(-\Delta; \Delta)$, а $\sigma_*$ – корень уравнения

$$\psi - (\gamma + \psi - \sigma)\mathrm{e}^{-\alpha F(|\sigma|)} = x_*, \quad \sigma > \Delta.$$

**Теорема 6** ( ИЧИМ, $m = 1$). *В системе управления (1)-(2)-(4)-(5) с ИЧИМ устойчивое периодическое колебание с одним импульсом на периоде существует в том и только том случае, если выполняются следующие условия*

$$\frac{\alpha\Delta}{\psi} + \frac{\gamma}{\psi} + \ln(1 - \frac{\gamma}{\psi t}) > 0, \tag{21}$$

где $t$ – решение уравнения $t - 1 - \ln t = \dfrac{\alpha\Delta}{\psi}$, $t > 1$.

**Теорема 7** ( ИЧИМ, $m = 2$). *В системе управления (1)-(2)-(4)-(5) с ИЧИМ периодическое колебание с двумя импульсами на периоде не существует.*

## 4. Доказательства

**4.1. Доказательство теоремы 1.** Если $\psi \leq \Delta$, положив $\sigma_0 = \psi$, по формулам (1)-(3) получим, что $\sigma(t) = \psi$ для всех $t > 0$. Такое решение в рассматриваемой импульсной системе будем считать периодическим колебанием с периодом $T = F(\psi)$.
В случае $\psi > \Delta$ начальное условие $\sigma_н > \Delta$ периодического колебания с одним импульсом на периоде получается из (1) как решение уравнения

$$\sigma = \mathrm{e}^{-\alpha T}(\sigma - \psi - \gamma) + \psi,$$

которое преобразуется к виду

$$\psi = \sigma + \frac{\gamma}{\mathrm{e}^{\alpha F(|\sigma|)} - 1}.$$

Поскольку в правой части стоит монотонно возрастающая функция, то решение $\sigma_н > \Delta$ этого уравнения существует в том и только том случае, когда выполняется второе неравенство из формулы (8). Теорема 1 доказана.

**4.2. Доказательство теоремы 2.** Периодическое колебание с двумя импульсами на периоде знаков $\lambda_0 = 0$ и $\lambda_1 = 1$ определяется из (1)-(3) начальными условиями $\sigma_0$ и $\sigma_1$, удовлетворяющими соотношениям

$$\begin{cases} \sigma_1 = \mathrm{e}^{-\alpha F(|\sigma_0|)}(\sigma_0 - \psi) + \psi, & \sigma_1 > \Delta, \\ \sigma_0 = \mathrm{e}^{-\alpha F(|\sigma_1|)}(\sigma_1 - \psi - \gamma) + \psi, & |\sigma_0| \leq \Delta. \end{cases}$$

Покажем, что условия теоремы обеспечивают разрешимость этих уравнений и неравенств. Введем в рассмотрение функцию

$$\kappa(\sigma) = (\gamma + \psi - \sigma)\mathrm{e}^{-\alpha F(|\sigma|)}. \tag{22}$$

С ее помощью последние уравнения и неравенства преобразуем к виду

$$\mathrm{e}^{\alpha F(|\psi - \kappa(\sigma_1)|)} = \frac{\kappa(\sigma_1)}{\psi - \sigma_1}, \quad \sigma_0 = \psi - \kappa(\sigma_1), \tag{23}$$

$$\sigma_1 > \Delta, \qquad |\psi - \kappa(\sigma_1)| \leq \Delta. \tag{24}$$

В правой части первого уравнения (24) стоит монотонно возрастающая функция аргумента $\sigma_1$ на интервале $(\Delta;\psi)$, а в левой части непрерывная функция. Поэтому неравенство

$$\mathrm{e}^{\alpha F(|\psi-\kappa(\Delta|)} > \frac{\kappa(\Delta)}{\psi-\Delta},$$

обеспечивает существование решения первого уравнения из (24)и истинность первого неравенства из (25). Последнее соотношение, с учетом обозначения (23) и некоторого преобразования, совпадает с условием (9) теоремы. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\kappa(\sigma_*)}{\psi-\sigma_*} = \mathrm{e}^{\alpha F(\Delta)}. \tag{25}$$

Поскольку его левая часть положительная неограниченная монотонная функция, то решение $\sigma_*$ этого уравнения всегда существует. В случае, когда $\sigma_* \le \Delta$, для всех $\sigma_1 > \Delta$

$$\frac{\kappa(\sigma_1)}{\psi-\sigma_1} > \mathrm{e}^{\alpha F(\Delta)},$$

и на решении $\sigma_1$ первого уравнения из (24) получаем, что

$$\mathrm{e}^{\alpha F(|\psi-\kappa(\sigma_1)|)} > \mathrm{e}^{\alpha F(\Delta)}.$$

Поэтому, в силу монотонного убывания функции $F(.)$, второе неравенство из (25) удовлетворяется автоматически. Если же решение $\sigma_* > \Delta$, то выполнение неравенства

$$\mathrm{e}^{\alpha F(|\psi-\kappa(\sigma_*)|)} > \frac{\kappa(\sigma_*)}{\psi-\sigma_*}$$

позволяет гарантировать, что на решении $\sigma_1$ первого уравнения из (24) будет удовлетворяться неравенство $\sigma_1 > \sigma_*$ и второе из неравенств (25) сохранится. Покажем, что условия (10) и (11)) теоремы обеспечивают это. Поскольку из (26) следует, что

$$\kappa(\sigma_*) = (\psi-\sigma_*)\mathrm{e}^{\alpha F(\Delta)},$$

то неравенство $|\psi-\kappa(\sigma_*)| \le \Delta$ эквивалентно оценкам $\sigma_* \ge u$ и $\sigma_* \le v$, где

$$u = \psi-(\psi+\Delta)\mathrm{e}^{-\alpha F(\Delta)} \quad \text{и} \quad v = \psi-(\psi-\Delta)\mathrm{e}^{-\alpha F(\Delta)}.$$

Воспользовавшись уравнением (26)и монотонностью правой части уравнения (24), последние оценки для $\sigma_*$ перепишем в виде

$$\mathrm{e}^{\alpha F(\Delta)} \geq \frac{\kappa(u)}{\psi - u}, \qquad \mathrm{e}^{\alpha F(\Delta)} \leq \frac{\kappa(v)}{\psi - v}.$$

После преобразований эти неравенства принимают вид (10) и (11) соответственно. Теорема 2 доказана.

**4.3. Доказательство теоремы 3.** Периодическое колебание с двумя импульсами на периоде знаков $\lambda_0 = -1$ и $\lambda_1 = 1$ определяется из (1)-(3) начальными условиями $\sigma_0$ и $\sigma_1$, удовлетворяющими соотношениям

$$\begin{cases} \sigma_1 = \mathrm{e}^{-\alpha F(|\sigma_0|)}(\sigma_0 - \psi + \gamma) + \psi, \quad & \sigma_1 > \Delta, \\ \sigma_0 = \mathrm{e}^{-\alpha F(|\sigma_1|)}(\sigma_1 - \psi - \gamma) + \psi, \quad & \sigma_0 < -\Delta. \end{cases}$$

Покажем, что условия теоремы обеспечивают разрешимость этих уравнений и неравенств. С помощью функции $\kappa(\sigma)$ из (23) преобразуем их к виду

$$\mathrm{e}^{\alpha F(|\psi - \kappa(\sigma_1)|)} = \frac{\gamma - \kappa(\sigma_1)}{\sigma_1 - \psi}, \qquad \sigma_0 = \psi - \kappa(\sigma_1), \tag{26}$$

$$\sigma_1 > \Delta, \qquad \psi - \kappa(\sigma_1) < -\Delta. \tag{27}$$

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\gamma - \kappa(\sigma_*)}{\sigma_* - \psi} = \mathrm{e}^{\alpha F(\Delta)}. \tag{28}$$

Поскольку его левая часть неограниченная монотонно убывающая функция для $\sigma_* > \psi$, то решение $\sigma_*$ этого уравнения всегда существует. В условии теоремы есть оценка $\psi > \Delta$, поэтому $\sigma_* > \Delta$.
В точке $\sigma_*$ неравенство $\psi - \kappa(\sigma_*) < -\Delta$ преобразуем к эквивалентному виду

$$\sigma_* < v, \quad \text{где} \quad v = \psi + (\gamma - \psi - \Delta)\mathrm{e}^{-\alpha F(\Delta)}.$$

Воспользовавшись уравнением (29) и монотонностью правой части уравнения (27), последнюю оценку $\sigma_* < v$ перепишем в виде

$$\mathrm{e}^{\alpha F(\Delta)} > \frac{\gamma - \kappa(v)}{v - \psi}.$$

Это неравенство после преобразований совпадает с условием (12) теоремы.

С другой стороны, неравенство $\psi - \kappa(\sigma_*) < -\Delta$ в силу монотонности функции $F(.)$ приводит к соотношению

$$\mathrm{e}^{\alpha F(|\psi-\kappa(\sigma_*)|)} < \frac{\gamma - \kappa(\sigma_*)}{\sigma_* - \psi}.$$

Отсюда следует, что в силу ограниченности положительными числами левой части и убывания до нуля правой части уравнения (27) его решение существует и обладает свойством $\sigma_1 > \sigma_*$, т.е. первое неравенство из (28) тем более имеет место. Кроме того, на решении уравнения (27)

$$\mathrm{e}^{\alpha F(|\psi-\kappa(\sigma_1)|)} < \mathrm{e}^{\alpha F(\Delta)},$$

Следовательно, $\psi - \kappa(\sigma_1) < -\Delta$, т.е. второе неравенство из (28) верно. Теорема 3 доказана.

**4.4. Доказательство теоремы 4.** Периодическое колебание с двумя импульсами на периоде знаков $\lambda_0 = 1$ и $\lambda_1 = 1$ определяется из (1)-(3) начальными условиями $\sigma_0 \neq \sigma_1$, удовлетворяющими соотношениям

$$\begin{cases} \sigma_1 = \mathrm{e}^{-\alpha F(|\sigma_0|)}(\sigma_0 - \psi - \gamma) + \psi, \quad & \sigma_1 > \Delta, \\ \sigma_0 = \mathrm{e}^{-\alpha F(|\sigma_1|)}(\sigma_1 - \psi - \gamma) + \psi, \quad & \sigma_0 > \Delta. \end{cases}$$

С помощью обозначения (23) составим уравнения

$$\mathrm{e}^{\alpha F(|\psi-\kappa(\sigma_1)|)} = \frac{\gamma + \kappa(\sigma_1)}{\psi - \sigma_1}, \qquad \sigma_0 = \psi - \kappa(\sigma_1), \tag{29}$$

Уравнение (30) имеет решение в точке $\sigma_*$, которая является начальной точкой периодического колебания с одним импульсом на периоде. Это решение уравнения

$$\mathrm{e}^{\alpha F(|\psi-\kappa(\sigma_*)|)} = \frac{\gamma + \kappa(\sigma_*)}{\psi - \sigma_*}, \qquad \sigma_* = \psi - \kappa(\sigma_*).$$

Замена по формуле (23) и операция логарифмирования приводят уравнение к виду (16). Покажем, что условия теоремы обеспечивают существование других решений уравнения (30), отличных от $\sigma_*$.

Поскольку в описании системы управления есть предположение о непрерывной дифференцируемости функции $F(.)$, а производную этой функции использовать не хотим, то можно контролировать значения левой и правой частей уравнения (30) в окрестности точки $\sigma_*$ неравенствами

$$\mathrm{e}^{\alpha F(|\psi-\kappa(\sigma_*-h_1)|)} < \frac{\gamma + \kappa(\sigma_* - h_1)}{\psi - \sigma_* + h_1}, \mathrm{e}^{\alpha F(|\psi-\kappa(\sigma_*+h_2)|)} > \frac{\gamma + \kappa(\sigma_* + h_2)}{\psi - \sigma_* + h_2}, \tag{30}$$

где
$$h_1 = \frac{\sigma_* - \Delta}{n}, \qquad h_2 = \frac{\psi - \sigma_*}{m},$$
а $n$ и $m$ некоторые достаточно большие натуральные числа. В несколько преобразованном виде эти неравенства совпадают с условиями (14) и (15) теоремы.

Относительно аргумента $\sigma_1 \in (\Delta; \psi)$ в правой части уравнения (30) стоит монотонно возрастающая неограниченная функция, а в левой части непрерывная ограниченная функция. Следовательно, второе неравенство из (32) обуславливает существует решения уранения (30) на интервале $(\sigma_*; \psi)$, а первое неравенство из (32) вместе с неравенством
$$\mathrm{e}^{\alpha F(|\psi - \kappa(\Delta|)} > \frac{\gamma + \kappa(\Delta)}{\psi - \Delta},$$
которое совпадает с условием (13), обеспечивает существование решения уравнения (30) в интервале $(\Delta; \sigma_*)$. Оба эти решения являются начальными условиями искомого периодического колебания. Теорема 4 доказана.

**4.5. Доказательство теоремы 5.** Периодическое колебание с тремя импульсами на периоде знаков $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = 1$ определяется из (1)-(3) начальными условиями $\sigma_0$, $\sigma_1$, и $\sigma_2$, удовлетворяющими соотношениям
$$\begin{cases} \sigma_1 = \mathrm{e}^{-\alpha F(|\sigma_0|)}(\sigma_0 - \psi) + \psi, \quad |\sigma_1| \le \Delta, \\ \sigma_2 = \mathrm{e}^{-\alpha F(|\sigma_1|)}(\sigma_1 - \psi) + \psi, \quad \sigma_2 > \Delta, \\ \sigma_0 = \mathrm{e}^{-\alpha F(|\sigma_2|)}(\sigma_2 - \psi - \gamma) + \psi, \quad |\sigma_0| \le \Delta. \end{cases}$$

Покажем, что условия теоремы обеспечивают разрешимость этих уравнений и неравенств. С помощью обозначения (23) преобразуем их к виду
$$\mathrm{e}^{\alpha F(|\psi - \kappa(\sigma_2)|) + \alpha F(|\sigma_1)} = \frac{\kappa(\sigma_2)}{\psi - \sigma_2}, \tag{31}$$
$$\sigma_0 = \psi - \kappa(\sigma_2), \qquad \sigma_1 = \psi - \kappa(\sigma_2)\mathrm{e}^{-\alpha F(\sigma_0)}, \tag{32}$$
$$\sigma_2 > \Delta, \quad |\psi - \kappa(\sigma_2)| \le \Delta, \quad |\psi - \kappa(\sigma_2)\mathrm{e}^{-\alpha F(\sigma_0)}| \le \Delta. \tag{33}$$
Поскольку правая часть уравнения (32) неограниченная монотонная функция, а левая часть положительная и ограниченная, то уравнение (32) имеет решение $\sigma_2 \in (\Delta; \psi)$, если в точке $\Delta$ выполняется неравенство
$$\mathrm{e}^{\alpha F(|\psi - \kappa(\Delta)|) + \alpha F(|\psi - \kappa(\Delta)\mathrm{e}^{-\alpha F(|\psi - \kappa(\Delta)|)}|)} > \frac{\kappa(\Delta)}{\psi - \Delta},$$

которое после преобразований совпадает с условием (17) теоремы. Осталось проверить выполнение неравенств (34) на решении уравнения (32). Причем достаточно проверить неравенства

$$\psi - \kappa(\sigma_2) \geq -\Delta, \qquad \psi - \kappa(\sigma_2)\mathrm{e}^{-\alpha F(|\psi-\kappa(\sigma_2)|} \leq \Delta. \tag{34}$$

Рассмотрим уравнение

$$\psi - (\psi - x)\mathrm{e}^{-\alpha F(|x|)} = \Delta.$$

Условие (18) теоремы обеспечивает существование решения этого уравнения на интервале $(-\Delta;\Delta)$. Пусть $x_* \in (-\Delta;\Delta)$ – наибольший из его корней. Составим еще одно уравнение $\kappa(\sigma) = \psi - x_*$. Так как $\kappa(\Delta) > \psi - x_*$ и $\kappa(\gamma+\psi) = 0$, то для $\sigma > \Delta$ оно будет иметь корень $\sigma_*$. На интервале $(\Delta;\sigma_*)$ получаем, что $\kappa(\sigma) > \psi - x_*$, и второе неравенство из (34) выполняется.

Решение уравнения (31) будет лежать в интервале $(\Delta;\sigma_*)$, если в точке $\sigma_*$ выполняется неравенство

$$\mathrm{e}^{\alpha F(|\psi-\kappa(\sigma_*)|)+\alpha F(|\psi-\kappa(\sigma_*)\mathrm{e}^{-\alpha F(|\psi-\kappa(\sigma_*)|)}|)} < \frac{\kappa(\sigma_*)}{\psi-\sigma_*},$$

совпадающеес условием (19) теоремы.

Поскольку функция $F(.)$ убывающая, то на интервале $(\Delta;\sigma_*)$ первое неравенство из (34) автоматически удовлетворяется, если потребовать выполнения более грубого неравенства $\psi - (\gamma+\psi-\sigma_2)\mathrm{e}^{-\alpha F(\sigma_*)} \geq -\Delta$, или в эквивалентной записи $\sigma_2 \geq \gamma+\psi-(\psi+\Delta)\mathrm{e}^{\alpha F(\sigma_*)}$. Последнее неравенство верно при условии оценки $\gamma+\psi-(\psi+\Delta)\mathrm{e}^{\alpha F(\sigma_*)} \leq \Delta$, которая легко преобразуется к условию (20) теоремы. Теорема 5 доказана.

**4.6. Доказательство теоремы 6.** Из (1) находим, что

$$\sigma_{n+1} = \mathrm{e}^{-\alpha T_n}(\sigma_n - \psi - \lambda_n\gamma) + \psi, \quad n = 0,1,2,\ldots.$$

Подставляем (1) в (4) и вычисляем

$$\int_{t_n}^{t_n+\tau} \sigma(t)dt = \frac{1}{\alpha}(\sigma_n - \psi - \lambda_n\gamma)(1-\mathrm{e}^{-\alpha\tau}) + \psi\tau.$$

Тогда $T_n$ в соответствии с (4) определяется как первый положительный корень уравнения

$$|\frac{\sigma_n - \psi - \lambda_n\gamma}{\alpha}(1-\mathrm{e}^{-\alpha\tau}) + \psi\tau| = \Delta.$$

Кроме того, формулы (4) и (5) позволяют заметить, что $\lambda_{n+1} = \mathrm{sign}\sigma_{n+1}$.

Искомое периодическое колебание с одним импульсом на периоде знака $\lambda_0 = 1$ определяется начальным условием $\sigma_0$, удовлетворяющим уравнению

$$\sigma_0 = \mathrm{e}^{-\alpha T}(\sigma_0 - \psi - \gamma) + \psi, \qquad \sigma_0 > 0, \tag{35}$$

где $T$ – первый положительный корень уравнения

$$\frac{\sigma_0 - \psi - \gamma}{\alpha}(1 - \mathrm{e}^{-\alpha T}) + \psi T = \Delta, \tag{36}$$

причем для всех $\tau \in (0; T)$ выполняется неравенство

$$-\Delta < \frac{\sigma_0 - \psi - \gamma}{\alpha}(1 - \mathrm{e}^{-\alpha \tau}) + \psi \tau < \Delta. \tag{37}$$

Из (35) и (36) находим, что

$$\sigma_0 = \psi - \frac{\gamma}{\mathrm{e}^{\alpha T} - 1}, \qquad T = \frac{\Delta}{\psi} + \frac{\gamma}{\alpha\psi}.$$

Осталось проверить, что условие (21) теоремы обуславливает неравенство (37). Подставим в (37) найденное $\sigma_0$. Обозначим через

$$\kappa = \frac{\gamma}{\alpha(1 - \mathrm{e}^{-\alpha T})}, \qquad V(\tau) = \psi\tau - \kappa(1 - \mathrm{e}^{-\alpha\tau}).$$

Тогда (37) примет вид

$$-\Delta < V(\tau) < \Delta, \quad \tau \in (0; T).$$

Функция $V(\tau)$ имеет положительную вторую производную, поэтому она выпуклая, $V(0) = 0$ и $V(T) = \Delta$. Ее наименьшее значение нетрудно вычислить

$$min\, V(\tau) = \frac{\psi}{\alpha}\ln\frac{\alpha\kappa}{\psi} - \kappa + \frac{\psi}{\alpha}.$$

Оценка $min\, V(\tau) > -\Delta$ эквивалентна неравенству

$$\frac{\alpha\kappa}{\psi} - 1 - \ln\frac{\alpha\kappa}{\psi} < \frac{\alpha\Delta}{\psi},$$

которое выполняется тогда и только тогда, когда $\dfrac{\alpha\kappa}{\psi} < t$, где $t$ – корень уравнения

$$t - 1 - \ln \mathrm{t} = \frac{\alpha\Delta}{\psi},\ t > 1.$$

В последнее неравенство подставим введенное ранее $\kappa$ и вычисленное значение $T$, после преобразований получим

$$\mathrm{e}^{-(\frac{\alpha\Delta}{\psi}+\frac{\gamma}{\psi})} < 1 - \frac{\gamma}{\psi t}.$$

Прологарифмировав это неравенство, приходим к условию (21) теоремы.

Для доказательства устойчивости искомого периодического колебания достаточно показать, что

$$|\frac{df}{d\sigma}| < 1, \text{ где } f(\sigma) = \mathrm{e}^{-\alpha T(\sigma)}(\sigma - \psi - \gamma) + \psi,$$

где $T(\sigma)$ – первый корень уравнения

$$\frac{\sigma - \psi - \gamma}{\alpha}(1 - \mathrm{e}^{-\alpha T}) + \psi T = \Delta,$$

в точке

$$\sigma = \psi - \frac{\gamma}{\mathrm{e}^{\alpha T} - 1}, \qquad T = \frac{\Delta}{\psi} + \frac{\gamma}{\alpha\psi}.$$

Функция $T(\sigma)$ определяется неявным образом, поэтому ее производная определяется как результат дифференцирования уравнения и имеет вид

$$\frac{dT}{d\sigma} = -\frac{1 - \mathrm{e}^{-\alpha T}}{\alpha(\psi + (\sigma - \gamma - \psi)\mathrm{e}^{-\alpha T})}.$$

Тогда

$$\frac{df}{d\sigma} = \mathrm{e}^{-\alpha T}[1 + \frac{(1 - \mathrm{e}^{-\alpha T})(\sigma - \gamma - \psi)}{\psi + (\sigma - \gamma - \psi)\mathrm{e}^{-\alpha T}}] = \frac{\sigma - \gamma}{\sigma - \psi - \gamma + \psi \mathrm{e}^{\alpha T}}.$$

Здесь вместо $\sigma$ подставим исследуемую точку, получим

$$\frac{df}{d\sigma} = \frac{\psi(1 - \mathrm{e}^{-\alpha T}) - \gamma}{\psi(\mathrm{e}^{\alpha T} - 1) - \gamma}.$$

Достаточное условие устойчивости $|\frac{df}{d\sigma}| < 1$ сводим к неравенству

$$|\psi(1 - \mathrm{e}^{-\alpha T}) - \gamma| < |\psi(\mathrm{e}^{\alpha T} - 1) - \gamma|,$$

или в эквивалентной записи

$$|\mathrm{e}^{\alpha T} - \frac{\gamma}{\psi}| > \sqrt{1 + (\frac{\gamma}{\psi})^2}.$$

Для $T = \dfrac{\Delta}{\psi} + \dfrac{\gamma}{\alpha\psi}$ последнее неравенство выполняется всегда. Теорема 6 доказана.

**4.7. Доказательство теоремы 7.** Периодическое колебание с двумя импульсами на периоде знаков $\lambda_0$ и $\lambda_1$ определяется начальными условиями $\sigma_0$ и $\sigma_1$, удовлетворяющими соотношениям

$$\begin{cases} \sigma_1 = \mathrm{e}^{-\alpha T_0}(\sigma_0 - \psi - \lambda_0\gamma) + \psi, \\ \dfrac{\sigma_0 - \psi - \lambda_0\gamma}{\alpha}(1 - \mathrm{e}^{-\alpha T_0}) + \psi T_0 = \lambda_1\Delta, \\ \sigma_0 = \mathrm{e}^{-\alpha T_1}(\sigma_1 - \psi - \lambda_1\gamma) + \psi, \\ \dfrac{\sigma_1 - \psi - \lambda_1\gamma}{\alpha}(1 - \mathrm{e}^{-\alpha T_1}) + \psi T_1 = \lambda_0\Delta. \end{cases}$$

Из этой системы уравнений исключаем $\sigma_0$ и $\sigma_1$, получаем

$$\psi T_0 - \frac{\gamma}{\alpha}\frac{(1 - \mathrm{e}^{-\alpha T_0})}{(\mathrm{e}^{\alpha T_0 + \alpha T_1} - 1)}(\lambda_0 \mathrm{e}^{\alpha T_0 + \alpha T_1} + \lambda_1 \mathrm{e}^{\alpha T_0}) = \lambda_1\Delta,$$

$$\psi T_1 - \frac{\gamma}{\alpha}\frac{(1 - \mathrm{e}^{-\alpha T_1})}{(\mathrm{e}^{\alpha T_1 + \alpha T_1} - 1)}(\lambda_1 \mathrm{e}^{\alpha T_0 + \alpha T_1} + \lambda_0 \mathrm{e}^{\alpha T_1}) = \lambda_0\Delta.$$

Эти уравнения складываем, получаем

$$\psi T_0 + \psi T_1 = (\lambda_0 + \lambda_1)(\frac{\gamma}{\alpha} + \Delta).$$

Следовательно, знаки импульсов должны быть одинаковыми, т.е. $\lambda_0 = \lambda_1 = 1$. Учитывая это, построим разность уравнений

$$\psi T_0 - \psi T_1 = 2\frac{\gamma}{\alpha}\frac{(\mathrm{e}^{\alpha T_0} - \mathrm{e}^{\alpha T_1})}{(\mathrm{e}^{\alpha T_0 + \alpha T_1} - 1)}.$$

Два последних уравнения имеют единственное решение $T_0 = T_1$, что невозможно на исследуемом колебании. Это означает отсутствие периодических колебаний с двумя импульсами на периоде. Теорема 7 доказана.

## 5. Обсуждение результатов.

Доказанные теоремы дают разбиения области параметров $\alpha, \gamma, \Delta, \psi$ одномерной частотно-импульсной системы управления на множества, в которых существуют периодические колебания с числом импульсов $m = 1, 2, 3$ на периоде.

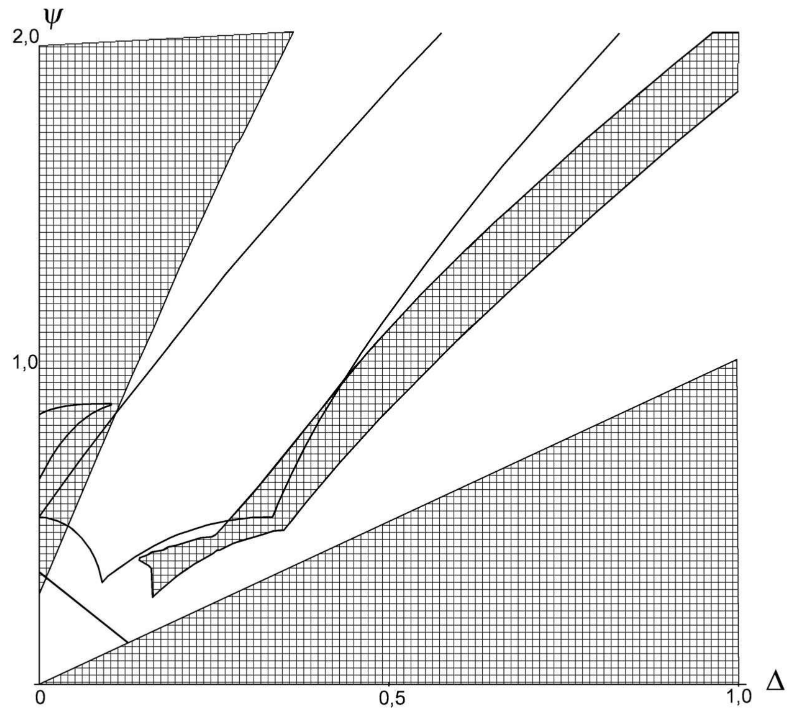


Рис.1. Области существования (заштрихованы на плоскости $\Delta, \psi$) периодических колебаний с одним и тремя импульсами на периоде для системы с ЧИМ-I с параметрами $\alpha = 0,1$ и $\gamma = 0,5$. Верхняя и нижняя области для колебаний типа (1); средняя область для колебаний типа (0,0,1).

Выбрав значения $\alpha = 0,1$ и $\gamma = 0,5$, а в случае системы с ЧИМ-I введя функцию $F(x) = 0,5 + 1/(|x| + 0,1)$, мы провели соответствующие вычисления и получили геометрическую интерпретацию результатов. Оказалось, что периодические колебания с одним импульсом ( $m = 1$) на периоде наблюдаются чаще остальных. Их область существования в системах управления с ЧИМ-I состоит из двух непересекающихся множеств (см. рис.1), прилегающих к координатным осям $\delta$ и $\psi$ соответственно, а в системах с ИЧИМ занимает основную часть исследуемой плоскости (см. рис.2). Эти множества описаны в теоремах 1 и 6. В теоремах 2, 3 и 4 сформулированы условия существования периодических колебаний с двумя импульсами на периоде в системе управления с ЧИМ-I. На рис.3 изображены области существования таких колебаний. Вычислительный эксперимент показал, что условия теорем 2 и 3 являются и необходимыми, но теоретического доказательства нет. Теорема 7 утверждает отсутствие периодических колебаний с двумя импульсами на периоде в системе управления с ИЧИМ.

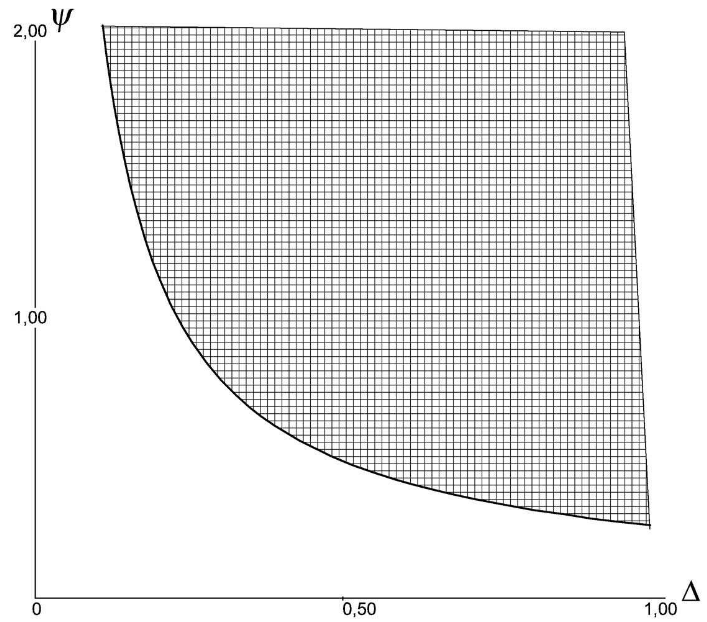


Рис.2. Область существования (заштрихована на плоскости $\Delta, \psi$) периодических колебаний с одним импульсом на периоде для системы с ИЧИМ с параметрами $\alpha = 0,1$ и $\gamma = 0,5$.

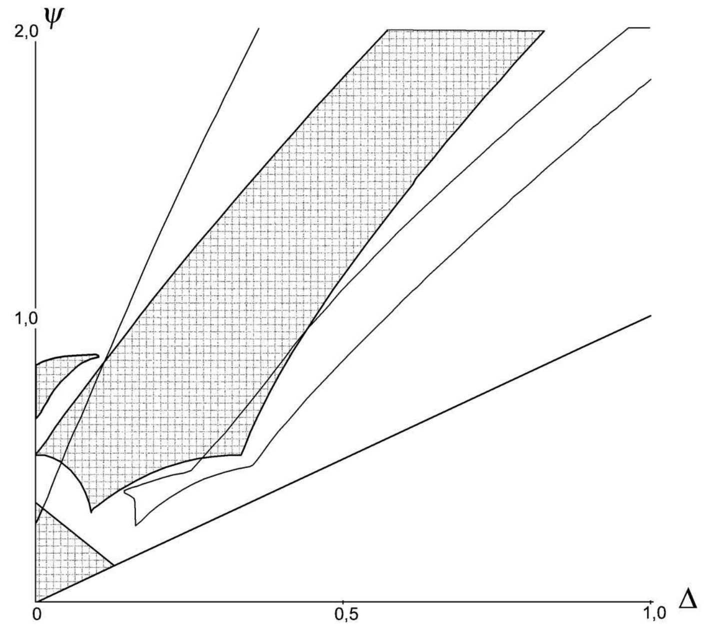


Рис.3. Области существования (заштрихованы на плоскости $\Delta, \psi$) периодических колебаний с двумя импульсами на периоде для системы с ЧИМ-I с параметрами $\alpha = 0,1$ и $\gamma = 0,5$. Верхняя область для колебаний типа (1,1); нижняя область для колебаний типа (-1,1); средняя область для колебаний типа (0,1).

В теореме 5 приводится аналитическое описание области существования периодических колебаний с тремя импульсами заданного типа в системе управления с ЧИМ-I. На рис.1 эта область размещается в центральной части. Получить результаты по существованию периодических колебаний с тремя импульсами других типов не удалось ввиду сложности исследования соответствующих уравнений периодов.

На основании полученных результатов можно сделать вывод, что при одинаковых значениях параметров системы управления, но различных типах модуляторов, наиболее предсказуемо поведение решений в системе с управления с ИЧИМ: возможные периодические колебания с числом импульсов $m \geq 3$ на периоде локализуются критерием теоремы 6. Кроме того, при малых значениях параметра $\alpha$ многообразие фрактальных множеств [4], связанных с системой управления с ШИС-I, в частотно-импульсных системах управления не наблюдается.

# Литература


1. **Гелиг А.Х., Чурилов А.Н.** Колебания и устойчивость нелинейных импульсных систем. Спб: СПбГУ, 1993. 268 с.

2. **Gelig A.Ch.** Frequency criterion for nonlinear pulse systems stability *// Systems and Control Letters. 1982. V.1. №6. P. 409-412.*

3. **Кунцевич В.М., Чеховой Ю.Н.** Нелинейные системы управления с частотно- и широтно- импульсной модуляцией. Киев: Наукова думка, 1970. 340 с.

4. **Антонова Н.А.** Динамика одномерных широтно-импульсных систем управления *// Вестник Сыктывкарск. ун-та. Сер.1: Мат. Мех. Инф. 1999. Вып.3. С. 127-144.*



**Summary**

**Antonova N.A.** Dynamics in pulse-frequency-modulated control systems

Conditions are obtained for existence of $mT$-periodic modes (m=1,2,3) in one dimensional control systems employing pulse-frequency modulation of the first and second kinds.


*Сыктывкарский университет* *Поступила 15.02.2006*