МАТЕМАТИКА

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика.
Выпуск 3 (40). 2021

УДК 530.145,
512.81 **DOI: 10.34130/1992-2752_2021_3_21**

КОГЕРЕНТНАЯ ЭВОЛЮЦИЯ КУТРИТА

Н. А. Громов, И. В. Костяков, В. В. Куратов

Рассматривается изменение во времени матрицы плотности трехуровневой квантовой системы с симметрией алгебры Ли $su(3)$, взаимодействующей с внешним полем таким образом, что сохраняется свойство когерентности. Коммутационные соотношения в алгебре наблюдаемых при этом также меняются и в пределе могут переходить в другую алгебру.
Ключевые слова: открытые квантовые системы, алгебра наблюдаемых, кутрит, когерентность, контракции алгебр Ли.

1. Введение

Динамика открытых квантовых систем, взаимодействующих с окружающей средой, при малом времени взаимодействия, когда можно пренебречь эффектами памяти (марковское приближение), описывается уравнением Линдблада [1–3]:

$$\dot{\rho} = -\frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}, \rho\right] + \sum_k \gamma_k \left(V_k \rho V_k^+ - \frac{1}{2}\left\{V_k^+ V_k, \rho\right\}\right) = \mathcal{L}(\rho). \quad (1)$$

Первое слагаемое в правой части уравнения отвечает унитарной части динамики системы, генерируемой гамильтонианом $\hat{H}$, который в общем случае включает гамильтониан системы, а также содержит дополнительные слагаемые, относящиеся к взаимодействию с окружением.

Второе слагаемое описывает диссипативную часть динамики. Операторы V_k обычно называют операторами Линдблада, а неотрицательные γ_k играют роль скоростей релаксации для различных видов затухания открытой квантовой системы, $\mathcal{L}$ — супероператор Линдблада.

В картине Гейзенберга для наблюдаемых A уравнение Линдблада имеет вид

$$\dot{A} = \frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}, A\right] + \\ + \sum_k \gamma_k \left(V_k^+ A V_k - \frac{1}{2}\left\{V_k^+ V_k, A\right\}\right) = \mathcal{L}^\sharp(A). \tag{2}$$

Динамика переменных $A(t)$ тогда имеет вид

$$A(t) = \Lambda_t^\sharp(A) = \mathrm{e}^{\mathcal{L}^\sharp t} A(0), \tag{3}$$

а изменение коммутационных соотношений во времени

$$[A_i, A_j]_t \equiv \left(\Lambda_t^\sharp\right)^{-1}\left[\Lambda_t^\sharp(A_i), \Lambda_t^\sharp(A_i)\right] \equiv C_{ij}^k(t) A_k, \tag{4}$$

представляет собой типичное преобразование коммутационных соотношений при контракции алгебр Ли [4–6].

Диссипативные процессы в открытых квантовых системах могут приводить к обнулению некоторых коммутаторов алгебры наблюдаемых, что интерпретируется как частичная потеря системой квантовых свойств, т.е. частичному переходу от квантового поведения к классическому. Появляющиеся при этом коммутирующие наборы наблюдаемых интерпретируются как классические переменные, возникающие в результате диссипации.

С другой стороны, обнуление всех или некоторых коммутационных соотношений между генераторами исходной группы (алгебры) Ли происходит при контракциях групп (алгебр) Ли [4–6]. Таким образом, имеется естественная связь между диссипативными процессами в открытых квантовых системах и контракциями групп (алгебр) Ли, которая анализируется в работах [7–9].

В работах [10; 11] подробно изучена связь квантовых каналов кубита с контракциями алгебры $su(2)$. В нашей работе [12] рассмотрены предельные переходы алгебры Ли наблюдаемых $su(3)$ при полной декогеренции в процессе продольной и поперечной релаксации кутрита — трехуровневой системы с алгеброй симметрии $su(3)$.

Трехуровневые системы появляются во многих областях. Например, частица спина 1 в магнитном поле, нейтринные осцилляции, три выделенных уровня в атоме, в лазерной спектроскопии, квантовой электронике, КХД, в квантовых моделях фотосинтеза [13–16].

Одной из проблем при создании квантовых компьютеров является быстрая декогеренция квантовых состояний открытых систем [1–3], поэтому изучение процессов, сохраняющих когерентность представляет большой научный интерес.

В настоящей статье изучается сохранение когерентности, т. е. наличие ненулевых недиагональных элементов матрицы плотности кутрита в процессе эволюции, при взаимодействии с внешним полем и зависимость структурных констант алгебры Ли $su(3)$ наблюдаемых от времени и параметров взаимодействия кутрита с окружением.

2. Сохранение когерентности при взаимодействии с внешним полем

Рассмотрим уравнение Линдблада для матрицы плотности (1), которое описывает продольную и поперечную релаксацию кутрита и взаимодействие с внешним полем, задаваемое гамильтонианом $\hat{H}_I = \hbar s \left(|3\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 3|\right)$, $s \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\dot{\rho} = \mathcal{L}\rho = -\frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}_0 + \hat{H}_I, \rho\right] + \\ + \sum_{k=1}^{3} \gamma_k \left(V_k \rho V_k^+ - \frac{1}{2}\left\{V_k^+ V_k, \rho\right\}\right) + \\ + \gamma_{13}\left(V_{13}\rho V_{13}^+ - \frac{1}{2}\left\{V_{13}^+ V_{13}, \rho\right\}\right) + \\ + \gamma_{31}\left(V_{31}\rho V_{31}^+ - \frac{1}{2}\left\{V_{31}^+ V_{31}, \rho\right\}\right).\end{aligned} \tag{5}$$

Базисные состояния кутрита задаются векторами $|1\rangle = (1,0,0)^t$, $|2\rangle = (0,1,0)^t$, $|3\rangle = (0,0,1)^t$, операторы Линдблада равны

$$\begin{aligned}V_1 &= diag(-1,1,1),\\ V_2 &= diag(1,-1,1),\\ V_3 &= diag(1,1,-1),\\ V_{ik} &= |i\rangle\langle k|,\end{aligned}$$

$i,k = 1,2,3$, γ_i — скорости поперечной релаксации, γ_{ij} — вероятности перехода с j-го уровня на i-й, гамильтониан системы $\hat{H}_0 = \sum_{k=1}^{3} E_k |k\rangle\langle k|$.

Мы рассматриваем частный случай, при котором возможны только переходы между первым и третьим уровнями. Диагональный элемент ρ_{22} матрицы плотности в этом случае стационарен $\dot{\rho}_{22} = 0$, $\rho_{22}(t) = \rho_{22}(0)$, а уравнения для остальных элементов матрицы плотности разбиваются на отдельные блоки. Для ρ_{11},ρ_{33},ρ_{13},ρ_{31} система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} \dot{\rho}_{11} = \gamma_{13}\rho_{33} - \gamma_{31}\rho_{11} + is(\rho_{13} - \rho_{31}), \\ \dot{\rho}_{33} = \gamma_{31}\rho_{11} - \gamma_{13}\rho_{33} - is\left(\rho_{13} - \rho_{31}\right), \\ \dot{\rho}_{13} = is\left(\rho_{11} - \rho_{33}\right) - \alpha_{13}\rho_{13}, \\ \dot{\rho}_{31} = is\left(\rho_{33} - \rho_{11}\right) - \alpha_{13}\rho_{31}, \end{cases} \tag{6}$$

где введены обозначения:

$$\alpha_{12} = \frac{1}{2}\gamma_{31} + 2(\gamma_1 + \gamma_2) + i\omega_{12},$$

$$\alpha_{13} = \frac{1}{2}\left(\gamma_{13} + \gamma_{31}\right) + 2\left(\gamma_1 + \gamma_3\right) + i\omega_{13},$$

$$\alpha_{23} = \frac{1}{2}\gamma_{13} + 2(\gamma_2 + \gamma_3) + i\omega_{23}, \qquad \hbar\omega_{ij} = E_j - E_i. \tag{7}$$

В дальнейшем будем пренебрегать мнимыми частями выражений α_{ij} или подразумевать, что работаем в картине взаимодействия. Вводя новые переменные $w = \rho_{11}+\rho_{33}$, $z = \rho_{11}-\rho_{33}$, $x + iy = \rho_{13}$ и учитывая, что $\rho_{31} = \rho_{13}^{*}$, получаем, что система (6) распадается на два независимых уравнения $\dot{w} = 0$ и $\dot{x} = -\alpha_{13}x$ с решениями $w(t) = w(0)$ и $x(t) = \mathrm{e}^{-\alpha_{13}t}x(0)$, а также систему уравнений для y и z:

$$\begin{cases} \dot{z} = -\left(\gamma_{13} + \gamma_{31}\right)z - 4sy + \left(\gamma_{13} - \gamma_{31}\right)w(0), \\ \dot{y} = -\alpha_{13}y + sz. \end{cases} \tag{8}$$

Здесь мы учли, что $w(t) = w(0)$. Стационарное состояние для системы (8) находится приравниванием нулю правых частей

$$\begin{cases} -\left(\gamma_{13} + \gamma_{31}\right)z_s - 4sy_s + \left(\gamma_{13} - \gamma_{31}\right)w(0) = 0, \\ -\alpha_{13}y_s + sz_s = 0 \end{cases} \tag{9}$$

и оказывается равным

$$z_s = \frac{\alpha_{13}(\gamma_{13} - \gamma_{31})}{\alpha_{13}(\gamma_{13} + \gamma_{31}) + 4s^2}\, w(0), \quad y_s = \frac{s}{\alpha_{13}} z_s. \tag{10}$$

В этом выражении разность $\gamma_{13} - \gamma_{31}$ описывает скорость спонтанного излучения. Общее решение системы (8) имеет вид

$$\begin{aligned} z(t) &= 2C_3 \mathrm{e}^{l_3 t} - \frac{l_3 + \alpha_{13}}{s} C_5 \mathrm{e}^{l_5 t} + z_s, \\ y(t) &= -\frac{l_3 + \gamma_{13} + \gamma_{31}}{2s} C_3 \mathrm{e}^{l_3 t} - C_5 \mathrm{e}^{l_5 t} + y_s, \end{aligned} \tag{11}$$

где

$$l_3 = -\frac{1}{2}\left(\alpha_{13} + \gamma_{13} + \gamma_{31}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\alpha_{13} - \gamma_{13} - \gamma_{31}\right)^2 - 16s^2},$$

$$l_5 = -\frac{1}{2}\left(\alpha_{13} + \gamma_{13} + \gamma_{31}\right) - \frac{1}{2}\sqrt{\left(\alpha_{13} - \gamma_{13} - \gamma_{31}\right)^2 - 16s^2} \tag{12}$$

есть корни характеристического уравнения (8)

$$l^2 + \left(\alpha_{13} + \gamma_{13} + \gamma_{31}\right) l + \alpha_{13}\left(\gamma_{13} + \gamma_{31}\right) + 4s^2 = 0, \tag{13}$$

а C_i — константы, зависящие от начальных условий. Возвращаясь к элементам ρ_{11}, ρ_{33}, ρ_{13} матрицы плотности, находим их динамику:

$$\begin{gathered} \rho_{11}(t) = C_3 \mathrm{e}^{l_3 t} - \frac{l_2 + \alpha_{13}}{2s}\, C_5\, \mathrm{e}^{l_5 t} + \frac{1}{2}\left(z_s + w(0)\right), \\ \rho_{33}(t) = -C_3 \mathrm{e}^{l_3 t} + \frac{l_2 + \alpha_{13}}{2s}\, C_5\, \mathrm{e}^{l_5 t} + \frac{1}{2}\left(w(0) - z_s\right), \\ \rho_{13}(t) = \mathrm{e}^{-\alpha_{13} t}\, C_4 + \\ +i\left(-\frac{l_1 + \gamma_{13} + \gamma_{31}}{2s} C_3 \mathrm{e}^{l_3 t} - C_5 \mathrm{e}^{l_5 t} + \frac{s}{\alpha_{13}} z_s\right). \end{gathered} \tag{14}$$

Отметим, что в пределе $t \to \infty$ мнимая часть ρ_{13} не равна нулю, что означает сохранение свойства когерентности кутрита в процессе эволюции.

Система уравнений для матричных элементов ρ_{12} и ρ_{32}

$$\begin{cases} \dot{\rho}_{12} = -\alpha_{12}\rho_{12} - is\,\rho_{32}, \\ \dot{\rho}_{32} = -is\,\rho_{12} - \alpha_{23}\rho_{32} \end{cases} \tag{15}$$

имеет характеристическое уравнение

$$l^2 + (\alpha_{12} + \alpha_{23})\,l + \alpha_{12}\alpha_{23} + 4s^2 = 0 \tag{16}$$

с корнями

$$l_1 = -\frac{1}{2}\left(\alpha_{12} + \alpha_{23} + \sqrt{(\alpha_{12} - \alpha_{23})^2 - 16s^2}\right),$$

$$l_6 = -\frac{1}{2}\left(\alpha_{12} + \alpha_{23} - \sqrt{(\alpha_{12} - \alpha_{23})^2 - 16s^2}\right). \tag{17}$$

Вещественные значения корней l_1 и l_6 отрицательны, а это означает, что между уровнями 1 и 2, а также 2 и 3 происходит декогеренция. Общее решение системы (15) записывается в виде

$$\rho_{12}(t) = (C_1 - iC_2)\mathrm{e}^{l_1 t} + \frac{i}{s}(l_4 + \alpha_{23})(C_6 + iC_7)\mathrm{e}^{l_6 t}, \tag{18}$$

$$\rho_{32}(t) = \frac{i}{s}\,(l_3 + \alpha_{12})\,(C_1 - iC_2)\mathrm{e}^{l_1 t} + (C_6 + iC_7)\mathrm{e}^{l_6 t}. \tag{19}$$

Поскольку недиагональные элементы матрицы плотности комплексны $\rho_{ij} \in \mathbb{C}$, $i \neq j$, то и постоянные интегрирования тоже комплексны и мы разбиваем их на вещественную и мнимую части. Динамику для $\rho_{21}(t)$ и $\rho_{23}(t)$ получим, воспользовавшись равенствами $\rho_{21}(t) = \rho_{12}^*(t)$, $\rho_{23}(t) = \rho_{32}^*(t)$.

Таким образом, в картине Шредингера динамика матрицы плотности может быть представлена в виде

$$\rho(t) = \sum_{ij} \rho_{ij}(t)|i\rangle\langle j|. \tag{20}$$

Перенеся зависимость от времени с координат $\rho_{ij}(t)$ на наблюдаемые, получим динамику в картине Гейзенберга (3). Прямой путь состоит в том, чтобы выписать уравнения Линдблада для наблюдаемых (2) и решить их. Однако можно поступить по-другому, перегруппировав слагаемые в (20) в виде

$$\rho(t) = C_1 \mathrm{e}^{l_1 t}\Big(|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1| - i\frac{l_1+\alpha_{12}}{s}\left(|2\rangle\langle 3| - |3\rangle\langle 2|\right)\Big) +$$

$$+ C_2 \mathrm{e}^{l_2 t}\Big(i\left(|2\rangle\langle 1| - |1\rangle\langle 2|\right) + \frac{l_1+\alpha_{12}}{s}\left(|2\rangle\langle 3| + |3\rangle\langle 2|\right)\Big) + \ldots.$$

Обозначая множители при C_i через e_i, имеем

$$\rho(t) = \sum_{i=0}^{8} C_k \mathrm{e}_k(t) + \frac{1}{2} z_s \tilde{\lambda}_3 - y_s \lambda_5 + |2\rangle\langle 2|, \tag{21}$$

где

$$\mathrm{e}_0 = \mathrm{I} = |1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2| + |3\rangle\langle 3|, \quad \dot{\mathrm{e}}_0(t) = 0,$$

$$\mathrm{e}_1(t) = \mathrm{e}^{l_1 t}\mathrm{e}_1, \quad \mathrm{e}_1 = \lambda_1 + b_{17}\lambda_7, \quad b_{17} = \frac{l_1+\alpha_{12}}{s},$$

$$\mathrm{e}_2(t) = \mathrm{e}^{l_2 t}\mathrm{e}_2, \quad \mathrm{e}_2 = \lambda_2 + b_{16}\lambda_6, \quad b_{16} = b_{17},\ l_2 = l_1,$$

$$\mathrm{e}_3(t) = \mathrm{e}^{l_3 t}\mathrm{e}_3, \quad \mathrm{e}_3 = \tilde{\lambda}_3 + b_{35}\lambda_5, \quad b_{35} = \frac{l_3+\gamma_{13}+\gamma_{31}}{2s},$$

$$\mathrm{e}_4(t) = \mathrm{e}^{l_4 t}\mathrm{e}_4, \quad \mathrm{e}_4 = \lambda_4, \quad l_4 = -\alpha_{13},$$

$$\mathrm{e}_5(t) = \mathrm{e}^{l_5 t}\mathrm{e}_5, \quad \mathrm{e}_5 = \lambda_5 + b_{53}\tilde{\lambda}_3, \quad b_{53} = \frac{l_5+\alpha_{13}}{2s},$$

$$
\begin{gathered}
\mathrm{e}_6(t)=\mathrm{e}^{l_6 t}\mathrm{e}_6, \quad \mathrm{e}_6=\lambda_6+b_{62}\lambda_2, \quad b_{62}=-\frac{l_6+\alpha_{23}}{s},\\
\mathrm{e}_7(t)=\mathrm{e}^{l_7 t}\mathrm{e}_7, \quad \mathrm{e}_7=\lambda_7+b_{71}\lambda_1, \quad b_{71}=-b_{62},\ l_7=l_6,\\
\mathrm{e}_8(t)=\mathrm{e}_8,\ \mathrm{e}_8=|1\rangle\langle 1|-2|2\rangle\langle 2|+|3\rangle\langle 3|,\\
l_8=0, \quad \dot{\mathrm{e}}_8(t)=0. \qquad (22)
\end{gathered}
$$

Здесь λ_i – матрицы Гелл-Манна:

$$
\begin{gathered}
\lambda_1=|1\rangle\langle 2|+|2\rangle\langle 1|, \quad \lambda_2=i\left(|2\rangle\langle 1|-|1\rangle\langle 2|\right),\\
\lambda_3=|1\rangle\langle 1|-|2\rangle\langle 2|, \quad \lambda_4=|1\rangle\langle 3|+|3\rangle\langle 1|,\\
\lambda_5=i\left(|3\rangle\langle 1|-|1\rangle\langle 3|\right), \quad \lambda_6=|2\rangle\langle 3|+|3\rangle\langle 2|,\\
\lambda_7=i\left(|2\rangle\langle 3|-|3\rangle\langle 2|\right),\\
\lambda_8=1/\sqrt{3}\left(|1\rangle\langle 1|+|2\rangle\langle 2|-2|3\rangle\langle 3|\right). \qquad (23)
\end{gathered}
$$

Так как мы рассматриваем только переходы между верхним и нижним уровнями, удобнее вместо λ_3 использовать другую образующую $\tilde{\lambda}_3=|1\rangle\langle 1|-|3\rangle\langle 3|$. Формулы (22) выведены для случая, когда все корни l_i вещественны и отрицательны.

В базисе e_i супероператоры Линдблада $\mathcal{L}^\sharp$ в уравнении для наблюдаемых (2) имеют диагональный вид и уравнения (2), определяющие динамику e_i, сводятся к простому виду $\dot{\mathrm{e}}_i=\mathcal{L}^\sharp\mathrm{e}_i=l_i\mathrm{e}_i$, где вещественные значения l_i отрицательны, а динамическое отображение (3) описывается простыми формулами $\mathrm{e}_i(t)=\mathrm{e}^{\mathcal{L}^\sharp t}\mathrm{e}_i=\Lambda^\sharp(t)\mathrm{e}_i=\mathrm{e}^{l_i t}\mathrm{e}_i$. Отметим, что все собственные значения отображения $\Lambda^\sharp(t)$, равные $\mathrm{e}^{l_i t}$, лежат внутри единичного круга. Это квантовый аналог теоремы Фробениуса – Перрона [17].

Обратные преобразования даются формулами

$$
\lambda_1=a_{11}\mathrm{e}_1+a_{17}\mathrm{e}_7, \quad a_{11}=\frac{1}{1+b_{17}b_{71}},\ a_{17}=\frac{b_{17}}{1+b_{17}b_{71}},
$$

$$\lambda_2 = a_{22}\mathrm{e}_2 + a_{27}\mathrm{e}_7, \quad a_{22} = a_{11},\ a_{27} = -a_{17},$$
$$\tilde{\lambda}_3 = a_{33}\mathrm{e}_3 + a_{35}\mathrm{e}_5, \quad a_{33} = \frac{1}{1+b_{35}b_{53}},\ a_{35} = -\frac{b_{35}}{1+b_{35}b_{53}},$$
$$\lambda_4 = \mathrm{e}_4,$$
$$\lambda_5 = a_{53}\mathrm{e}_3 + a_{55}\mathrm{e}_5, \quad a_{55} = a_{33},\ a_{53} = \frac{b_{53}}{1+b_{35}b_{53}},$$
$$\lambda_6 = a_{66}\mathrm{e}_6 + a_{62}\mathrm{e}_2, \quad a_{66} = \frac{1}{1+b_{71}b_{17}},\ a_{62} = \frac{b_{71}}{1+b_{71}b_{17}}.$$
$$\lambda_7 = a_{71}\mathrm{e}_1 + a_{77}\mathrm{e}_7, \quad a_{77} = a_{66},\ a_{71} = a_{62}, \tag{24}$$

Заметим, что при выключении взаимодействия, т. е. при $s = 0$, коэффициенты $b_{ij} = 0$ и наблюдаемые $\mathrm{e}_i = \lambda_i$ (кроме e_8).

Найдем коммутационные соотношения для наблюдаемых e_i:

$$[\mathrm{e}_1,\mathrm{e}_2]_t = C^3_{12}(t)\mathrm{e}_3 + C^5_{12}(t)\mathrm{e}_5 + C^8_{12}(t)\mathrm{e}_8,$$
$$[\mathrm{e}_1,\mathrm{e}_3]_t = C^2_{13}(t)\mathrm{e}_2 + C^6_{13}(t)\mathrm{e}_6, \quad [\mathrm{e}_1,\mathrm{e}_4]_t = C^1_{14}(t)\mathrm{e}_1 + C^7_{14}(t)\mathrm{e}_7,$$
$$[\mathrm{e}_1,\mathrm{e}_5]_t = C^2_{15}(t)\mathrm{e}_2 + C^6_{15}(t)\mathrm{e}_6,$$
$$[\mathrm{e}_1,\mathrm{e}_6]_t = C^3_{16}(t)\mathrm{e}_3 + C^5_{16}(t)\mathrm{e}_5 + C^8_{16}(t)\mathrm{e}_8,$$
$$[\mathrm{e}_1,\mathrm{e}_7]_t = C^4_{17}(t)\mathrm{e}_4, \quad [\mathrm{e}_1,\mathrm{e}_8]_t = C^6_{18}(t)\mathrm{e}_6 + C^2_{18}(t)\mathrm{e}_2,$$
$$[\mathrm{e}_2,\mathrm{e}_3]_t = C^1_{23}(t)\mathrm{e}_1 + C^7_{23}(t)\mathrm{e}_7, \quad [\mathrm{e}_2,\mathrm{e}_4]_t = C^2_{24}(t)\mathrm{e}_2 + C^6_{24}(t)\mathrm{e}_6,$$
$$[\mathrm{e}_2,\mathrm{e}_5]_t = C^1_{25}(t)\mathrm{e}_1 + C^7_{25}(t)\mathrm{e}_7, [\mathrm{e}_2,\mathrm{e}_6]_t = C^4_{26}(t)\mathrm{e}_4,$$
$$[\mathrm{e}_2,\mathrm{e}_7]_t = C^3_{27}(t)\mathrm{e}_3 + C^5_{27}(t)\mathrm{e}_5 + C^8_{27}(t)\mathrm{e}_8, \quad [\mathrm{e}_3,\mathrm{e}_5]_t = C^4_{35}(t)\mathrm{e}_4,$$
$$[\mathrm{e}_2,\mathrm{e}_8]_t = C^1_{28}(t)\mathrm{e}_1 + C^7_{28}(t)\mathrm{e}_7, \quad [\mathrm{e}_3,\mathrm{e}_4]_t = C^3_{34}(t)\mathrm{e}_3 + C^5_{34}(t)\mathrm{e}_5,$$
$$[\mathrm{e}_3,\mathrm{e}_6]_t = C^1_{36}(t)\mathrm{e}_1 + C^7_{36}(t)\mathrm{e}_7, \quad [\mathrm{e}_3,\mathrm{e}_7]_t = C^2_{36}(t)\mathrm{e}_2 + C^6_{37}(t)\mathrm{e}_6,$$
$$[\mathrm{e}_3,\mathrm{e}_8]_t = [\mathrm{e}_4,\mathrm{e}_8]_t = [\mathrm{e}_5,\mathrm{e}_8]_t = 0, \quad [\mathrm{e}_4,\mathrm{e}_5]_t = C^3_{45}(t)\mathrm{e}_3 + C^5_{45}(t)\mathrm{e}_5,$$
$$[\mathrm{e}_4,\mathrm{e}_6]_t = C^2_{46}(t)\mathrm{e}_2 + C^6_{46}(t)\mathrm{e}_6, \quad [\mathrm{e}_4,\mathrm{e}_7]_t = C^1_{47}(t)\mathrm{e}_1 + C^7_{47}(t)\mathrm{e}_7,$$
$$[\mathrm{e}_5,\mathrm{e}_6]_t = C^1_{56}(t)\mathrm{e}_2 + C^7_{56}(t)\mathrm{e}_7, \quad [\mathrm{e}_5,\mathrm{e}_7]_t = C^2_{57}(t)\mathrm{e}_2 + C^6_{57}(t)\mathrm{e}_6,$$
$$[\mathrm{e}_6,\mathrm{e}_7]_t = C^3_{67}(t)\mathrm{e}_3 + C^5_{67}(t)\mathrm{e}_5 + C^8_{67}(t)\mathrm{e}_5,$$

$$
\begin{aligned}
[\mathrm{e}_6, \mathrm{e}_8]_t &= C_{68}^1(t)\mathrm{e}_1 + C_{68}^7(t)\mathrm{e}_7, \\
[\mathrm{e}_7, \mathrm{e}_8]_t &= C_{78}^2(t)\mathrm{e}_2 + C_{78}^6(t)\mathrm{e}_6.
\end{aligned} \tag{25}
$$

Структурные константы в коммутационных соотношениях даются выражениями:

$$
\begin{gathered}
C_{12}^3(t) = i\Big(a_{33}\left(1 - b_{17}^2\right) + 2b_{17}a_{53}\Big)\mathrm{e}^{(l_1+l_2-l_3)t}, \\
C_{12}^5(t) = i\Big(a_{35}\left(1 - b_{17}^2\right) + 2b_{17}a_{55}\Big)\mathrm{e}^{(l_1+l_2-l_5)t}, \\
C_{12}^8(t) = i\left(1 + b_{17}^2\right)\mathrm{e}^{(l_1+l_2-l_8)t}, \\
C_{13}^2(t) = i\Big(\left(b_{17} - b_{35}\right)a_{62} - \left(1 + b_{17}b_{35}\right)a_{22}\Big)\mathrm{e}^{l_3 t}, \\
C_{13}^6(t) = i\Big(\left(b_{17} - b_{35}\right)a_{66} - \left(1 + b_{17}b_{35}\right)a_{26}\Big)\mathrm{e}^{(l_1+l_3-l_6)t}, \\
C_{14}^1(t) = i\left(a_{71} - a_{11}\right)\mathrm{e}^{l_4 t}, \quad C_{14}^7(t) = i\left(a_{77} - a_{17}\right)\mathrm{e}^{(l_1+l_4-l_7)t}, \\
C_{15}^2(t) = -i\Big(\left(b_{17} + b_{53}\right)a_{22} + \left(1 - b_{17}b_{53}\right)a_{62}\Big)\mathrm{e}^{l_5 t}, \\
C_{15}^6(t) = -i\Big(\left(b_{17} + b_{53}\right)a_{26} + \left(1 - b_{17}b_{53}\right)a_{66}\Big)\mathrm{e}^{(l_1+l_5-l_6)t}, \\
C_{16}^3(t) = i\Big(\left(b_{17} + b_{62}\right)a_{33} + \left(1 + b_{17}b_{62}\right)a_{53}\Big)\mathrm{e}^{(l_1+l_6-l_3)t}, \\
C_{16}^8(t) = i\left(b_{62} - b_{17}\right)\mathrm{e}^{(l_1+l_6)t}, \\
C_{16}^5(t) = i\Big(\left(b_{17} + b_{62}\right)a_{35} + \left(1 + b_{17}b_{62}\right)a_{55}\Big)\mathrm{e}^{(l_1+l_6-l_5)t}, \\
C_{17}^4(t) = -i\left(1 - b_{17}b_{71}\right)\mathrm{e}^{(l_1+l_7-l_4)t}, \\
C_{18}^2(t) = -3i\left(a_{22} + b_{17}a_{62}\right), \\
C_{18}^6(t) = -3i\left(a_{26} + b_{17}a_{66}\right)\mathrm{e}^{(l_1-l_6)t}, \\
C_{23}^1(t) = i\Big(\left(b_{35} - b_{16}\right)a_{71} + \left(1 + b_{16}b_{35}\right)a_{11}\Big)\mathrm{e}^{l_3 t}, \\
C_{23}^7(t) = i\Big(\left(b_{35} - b_{16}\right)a_{77} + \left(1 + b_{16}b_{35}\right)a_{17}\Big)\mathrm{e}^{(l_2+l_3-l_7)t}, \\
C_{24}^2(t) = i\left(a_{62} + b_{16}a_{22}\right)\mathrm{e}^{l_3 t}, \\
C_{24}^6(t) = i\left(a_{66} + b_{16}a_{26}\right)\mathrm{e}^{(l_2+l_4-l_6)t},
\end{gathered}
$$

$$C_{25}^{1}(t) = i\Big((b_{16}+b_{53})\,a_{11} + (1-b_{16}b_{53})\,a_{71}\Big)\mathrm{e}^{l_5 t},$$
$$C_{25}^{7}(t) = i\Big((b_{16}+b_{53})\,a_{17} + (1-b_{16}b_{53})\,a_{77}\Big)\mathrm{e}^{(l_2+l_5-l_7)t},$$
$$C_{26}^{4}(t) = -i\,(1-b_{16}b_{62})\,\mathrm{e}^{(l_2+l_6-l_4)t},$$
$$C_{27}^{3}(t) = -i\Big((b_{71}+b_{16})\,a_{33} + (1+b_{71}b_{16})\,a_{53}\Big)\mathrm{e}^{(l_2+l_7-l_3)t},$$
$$C_{27}^{5}(t) = -i\Big((b_{71}+b_{16})\,a_{35} + (1+b_{71}b_{16})\,a_{55}\Big)\mathrm{e}^{(l_2+l_7-l_5)t},$$
$$C_{27}^{8}(t) = i((b_{16}-b_{71})\,\mathrm{e}^{(l_2+l_7)t},$$
$$C_{28}^{1}(t) = 3i\,(a_{11}+b_{16}a_{71})\,,$$
$$C_{28}^{7}(t) = 3i\,(a_{17}+b_{16}a_{77})\,\mathrm{e}^{(l_2-l_7)t},$$
$$C_{34}^{3}(t) = 2i\,(a_{53}-b_{35}a_{33})\,\mathrm{e}^{l_4 t},$$
$$C_{34}^{5}(t) = 2i\,(a_{55}-b_{35}a_{35})\,\mathrm{e}^{(l_3+l_4-l_5)t},$$
$$C_{35}^{4}(t) = -2i\,(1-b_{35}b_{53})\,\mathrm{e}^{(l_3+l_5-l_4)t},$$
$$C_{36}^{1}(t) = i\Big((1-b_{35}b_{62})\,a_{71} - (b_{62}+b_{35})\,a_{11}\Big)\mathrm{e}^{(l_3+l_6-l_1)t},$$
$$C_{36}^{7}(t) = i\Big((1-b_{35}b_{62})\,a_{77} - (b_{62}+b_{35})\,a_{17}\Big)\mathrm{e}^{l_3 t},$$
$$C_{37}^{2}(t) = i\Big((b_{71}+b_{35})\,a_{22} - (1-b_{35}b_{71})\,a_{62}\Big)\mathrm{e}^{(l_3+l_7-l_2)t},$$
$$C_{37}^{6}(t) = i\Big((b_{71}+b_{35})\,a_{26} - (1-b_{35}b_{71})\,a_{66}\Big)\mathrm{e}^{l_3 t},$$
$$C_{45}^{3}(t) = 2i\,(a_{33}-b_{53}a_{53})\,\mathrm{e}^{(l_4+l_5-l_3)t},$$
$$C_{45}^{5}(t) = 2i\,(a_{35}-b_{53}a_{55})\,\mathrm{e}^{l_4 t},$$
$$C_{46}^{2}(t) = -i\,(a_{22}-b_{62}a_{62})\,\mathrm{e}^{(l_4+l_6-l_2)t},$$
$$C_{46}^{6}(t) = -i\,(a_{26}-b_{62}a_{66})\,\mathrm{e}^{l_4 t},$$
$$C_{47}^{1}(t) = i\,(a_{11}-b_{71}a_{71})\,\mathrm{e}^{(l_4+l_7-l_1)t},$$
$$C_{47}^{7}(t) = i\,(a_{17}-b_{71}a_{77})\,\mathrm{e}^{l_4 t},$$
$$C_{56}^{1}(t) = i\Big((b_{53}-b_{62})\,a_{71} - (1+b_{53}b_{62})\,a_{11}\Big)\mathrm{e}^{(l_5+l_6-l_1)t},$$
$$C_{56}^{7}(t) = i\Big((b_{53}-b_{62})\,a_{77} - (1+b_{53}b_{62})\,a_{17}\Big)\mathrm{e}^{l_5 t},$$

$$C^2_{57}(t) = i\Big((b_{53}+b_{71})\,a_{62} + (1-b_{53}b_{71})\,a_{22}\Big)\mathrm{e}^{(l_5+l_7-l_2)t},$$
$$C^6_{57}(t) = i\Big((b_{53}+b_{71})\,a_{66} + (1-b_{53}b_{71})\,a_{26}\Big)\mathrm{e}^{l_5 t},$$
$$C^3_{67}(t) = -i\Big(a_{53}\,(b_{62}+b_{71}) + a_{33}\,(1+b_{62}b_{71})\Big)\mathrm{e}^{(l_6+l_7-l_3)t},$$
$$C^5_{67}(t) = -i\Big(a_{55}\,(b_{62}+b_{71}) + a_{35}\,(1+b_{62}b_{71})\Big)\mathrm{e}^{(l_6+l_7-l_5)t},$$
$$C^8_{67}(t) = i\,(1-b_{62}b_{71})\,,$$
$$C^1_{68}(t) = 3i\,(a_{71}+b_{62}a_{11})\,\mathrm{e}^{(l_6-l_1)t}, C^7_{68}(t) = 3i\,(a_{77}+b_{62}a_{17})\,,$$
$$C^2_{78}(t) = -3i\,(a_{62}+b_{71}a_{22})\,\mathrm{e}^{(l_7-l_2)t},$$
$$C^6_{78}(t) = -3i\,(a_{66}+b_{71}a_{26})\,. \qquad (26)$$

Поведение коммутационных соотношений (25) при больших временах зависит от значений показателей $l_i + l_j - l_k$ в экспонентах. Для удобства анализа, выпишем, используя формулы (12),(17), выражения для корней l_i в одном месте

$$l_1 = l_2 = -\frac{1}{2}\left(\alpha_{12}+\alpha_{23}+\sqrt{(\alpha_{12}-\alpha_{23})^2-16s^2}\right),$$

$$l_3 = -\frac{1}{2}\,(\alpha_{13}+\gamma_{13}+\gamma_{31}) + \frac{1}{2}\sqrt{(\alpha_{13}-\gamma_{13}-\gamma_{31})^2-16s^2},$$
$$l_4 = -\alpha_{13}, \quad l_8 = 0,$$
$$l_5 = -\frac{1}{2}\,(\alpha_{13}+\gamma_{13}+\gamma_{31}) - \frac{1}{2}\sqrt{(\alpha_{13}-\gamma_{13}-\gamma_{31})^2-16s^2},$$
$$l_6 = l_7 = -\frac{1}{2}\left(\alpha_{12}+\alpha_{23}-\sqrt{(\alpha_{12}-\alpha_{23})^2-16s^2}\right). \qquad (27)$$

Поведение вещественных частей скоростей релаксации l_3, l_4 и l_5 в зависимости от величины s внешнего поля показано на рис. 1. Поведение $l_1 = l_2$ и $l_6 = l_7$ качественно такое же (рис. 2). Отметим, что при больших полях $\mathrm{Re}\,l_3 = \mathrm{Re}\,l_5$ и $\mathrm{Re}\,l_1 = \mathrm{Re}\,l_2 = \mathrm{Re}\,l_6 = \mathrm{Re}\,l_7$.

В работах [9; 11] было исследовано асимптотическое поведение алгебры наблюдаемых двухуровневой системы при наличии окружения и внешнего поля. Поскольку в этой работе мы учитываем только переходы между первым и третьим уровнями, для начала рассмотрим подалгебру наблюдаемых $\{\mathrm{e}_3, \mathrm{e}_4, \mathrm{e}_5\}$ с коммутаторами

$$[\mathrm{e}_3, \mathrm{e}_4]_t = C_{34}^3(t)\mathrm{e}_3 + C_{34}^5(t)\mathrm{e}_5, \quad [\mathrm{e}_3, \mathrm{e}_5]_t = C_{35}^4(t)\mathrm{e}_4,$$

$$[\mathrm{e}_4, \mathrm{e}_5]_t = C_{45}^3(t)\mathrm{e}_3 + C_{45}^5(t)\mathrm{e}_5. \tag{28}$$

Пусть $\gamma_i = 0$. Тогда при выключенном поле ($s = 0$, $b_{ik} = 0$), $l_3 = -(\gamma_{13}+\gamma_{31})$, $l_4 = l_5 = -\alpha_{13} = -\frac{1}{2}(\gamma_{13}+\gamma_{31})$ эта подалгебра наблюдаемых характеризуется коммутационными соотношениями

$$[\mathrm{e}_3, \mathrm{e}_4]_t = 2i\mathrm{e}^{(l_3+l_4-l_5)t}\mathrm{e}_5, \quad [\mathrm{e}_3, \mathrm{e}_5]_t = -2i\mathrm{e}^{(l_3+l_5-l_4)t}\mathrm{e}_4,$$

$$[\mathrm{e}_4, \mathrm{e}_5]_t = 2i\mathrm{e}^{(l_5+l_4-l_3)t}\mathrm{e}_3 \tag{29}$$

и в начальный момент времени является алгеброй $su(2)$, а в пределе $t \to \infty$ дает алгебру Гейзенберга:

$$[\mathrm{e}_3, \mathrm{e}_4]_\infty = 0, \quad [\mathrm{e}_3, \mathrm{e}_5]_\infty = 0, \quad [\mathrm{e}_4, \mathrm{e}_5]_\infty = 2i\mathrm{e}_3. \tag{30}$$

При включении поля, как легко видно из поведения показателей $l_{3,4,5}$ (см. рис.1 или соответствующие формулы для них), подалгебра (28) при больших временах становится абелевой.

Легко проверить, что если мы учтем еще дополнительные скорости поперечной релаксации ($\gamma_i \neq 0$), то результат не изменится — и в этом случае подалгебра наблюдаемых (e_3,e_4,e_5) асимптотически будет стремиться к абелевой.

Структурные константы алгебры наблюдаемых $su(3)$ в рассматриваемом нами случае зависят от времени, параметров системы и величины внешнего поля. В пределе больших времен некоторые коммутаторы могут зануляться. Возможны также случаи устремления их в бесконечность.

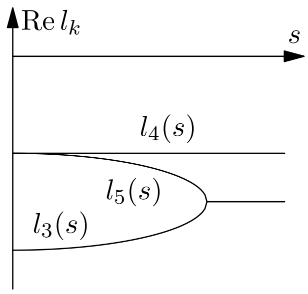

Рис. 1. Зависимость вещественных частей $l_3(s)$, $l_4(s)$, $l_5(s)$ от величины внешнего поля s

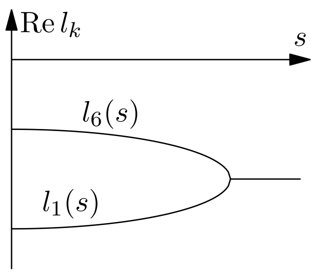

Рис. 2. Зависимость вещественных частей $l_1(s)$, $l_6(s)$ от величины внешнего поля s

Таким образом, в пространстве параметров системы γ_i и γ_{ij} и величины внешнего поля s есть области, где алгебра наблюдаемых $su(3)$ на больших временах в пределе может переходить в другую алгебру, а значит, некоторые пары наблюдаемых будут терять свои квантовые особенности и проявлять классическое поведение. При этом, однако, сохраняется возможность суперпозиции между верхним и нижним уровнями (когерентность), несмотря на взаимодействие с окружением.

Список литературы

1. **Нильсен М. А., Чанг И. Л.** Квантовые вычисления и квантовая информация. М.: Мир, 2006. 824 с.

2. **Прескилл Дж.** Квантовая информация и квантовые вычисления. Ижевск: РХД, 2008; 2011. Т. 1-2. 464+312 с.

3. **Бройер Х.-П., Петруччионе Ф.** Теория открытых квантовых систем. М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», институт компьютерных исследований, 2010. 824 с.

4. **Inönü E., Wigner E. P.** On the contraction of groups and their representations // *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.* 1953. Vol. 39. Pp. 510–524.

5. **Saletan E. J.** Contraction of Lie groups // *J. Math. Phys.* 1961. Vol. 2. Pp. 1–21.

6. **Громов Н. А.** Контракции классических и квантовых групп. М.: Физматлит, 2012. 318 с.

7. **Ibort A., Man'ko V. I., Marmo G., Simoni A., Stornaiolo C., Ventriglia F.** The quantum-to-classical transition: contraction of associative products // *Physica Scripta.* V. 91, N 4, 2016, 045201. ArXiv:1603.01108 [quant-ph].

8. **Alipour S., Chruściński D., Facchi P., Marmo G., Pascazio S, Rezakhani A.T.** Dynamically algebra of observables in dissipative quantum systems // *J. Phys. A: Math. Theor.* 2017. Vol. 50. 065301.

9. **Cruściński D., Facchi P., Marmo G., Pascazio S.** The Observables of a Dissipative Quantum System // *Open Systems & Information Dynamics.* 2021. V. 19. No. 1. 1250001.

10. **Громов Н. А., Костяков И. В., Куратов В. В.** Диссипация кубита и контракции алгебр Ли // *Известия Коми НЦ УрО РАН.* 2019. Вып. 4 (40). С. 5−12.

11. **Громов Н. А., Костяков И. В., Куратов В. В.** Когерентность в открытой квантовой системе // *Известия Коми НЦ УрО РАН.* 2020. Вып. 4 (44). С. 30−33.

12. **Костяков И. В., Куратов В. В., Громов Н. А.** Эволюция кутрита и контракция алгебры Ли $su(3)$ // *Известия Коми НЦ УрО РАН.* 2021. Вып. 4 (50).

13. **Арефьева И. Я., Волович И. В., Козырев С. В.** Метод стохастического предела и интерференция в квантовых многочастичных системах // *ТМФ*. 2015. Т. 183. №3. С. 388–408.

14. **Aref'eva I. Y., Volovich I. V.** Holographic Photosynthesis. *ArXiv*: 1603.09107 [hep-th].

15. **Ohya M., Volovich I.** Mathematical Foundations of Quantum Information and Computation and Its Applications to Nano- and Bio-systems. Springer. 2011. 759 p.

16. **Kozyrev S. V., Mironov A. A., Teretenkov A. E., Volovich I. V.** Flows in nonequilibrium quantum systems and quantum photosynthesis, Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top., 20:4. 2017. 1750021 // *ArXiv*: 1612.00213.

17. **Chruściński D., Kimura G., Kossakowski A., Shishido Y.** On the universal constraints for relaxation rates for quantum dynamical semigroup // ArXiv:2011.10159 [quant-ph]. 9 p.

Summary

Gromov N. A., Kostyakov I. V., Kuratov V. V. Coherent evolution of qutrit.

We consider the time variation of the density matrix of a three-level quantum system with the symmetry of the Lie algebra $su(3)$, interacting with an external field in such a way

that the coherence property is preserved. The commutatation relations in the algebra of observables in this case also change and in the limit can pass to another algebra.
Keywords: open quantum system, algebra of observables, qutrit, coherence, contraction of Lie algebras.

References

1. **Nielsen M. A., Chuang I. L.** *Kvantovye vychisleniya i kvantovaya informaciya* [Quantum Computation and Quantum Information]. Moscow: Mir, 2006. 824 p.

2. **Preskill J.** *Kvantovaya informaciya i kvantovye vychisleniya* [Quantum Information and Computation]. Izhevsk: RHD, 2008; 2001. Vol 1-2. 464+312 p.

3. **Breuer H.-P., Petruccione F.** *Teoriya otkrytykh kvantovykh sistem* [The theory of open quantum systems]. Izhevsk: RHD, 2010. 824 p.

4. **Inönü E., Wigner E. P.** On the contraction of groups and their representations. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.* 1953. Vol. 39. Pp. 510–524.

5. **Saletan E. J.** Contraction of Lie groups. *J. Math. Phys.* 1961. Vol. 2. Pp. 1–21.

6. **Gromov N.A.** *Kontraktsii klassicheskikh i kvantovykh grupp* [Contractions of classical and quantum groups]. Moscow: FIZMATLIT, 2012. 318 p.

7. **Ibort A., Man'ko V. I., Marmo G.** et al. The quantum-to-classical transition: contraction of associative products. *Physica Scripta.* 2016. Vol. 91. 045201. ArXiv:1603.01108 [quant-ph].

8. **Alipour S., Chruściński D., Facchi P.** et al. Dynamically algebra of observables in dissipative quantum systems. *J. Phys. A: Math. Theor.* 2017. Vol. 50. 065301.

9. **Chruściński D., Facchi P., Marmo G., Pascazio S.** The Observables of a Dissipative Quantum System. *Open Systems & Information Dynamics.* 2012. V. 19, No. 01, 1250001.

10. **Gromov N. A., Kostyakov I. V., Kuratov V. V.** Dissipaciya qubita i kontraktsii algebr Lie [Qubit dissipation and contractions of Lie algebras]. *Proc. of the Komi Sci. Centre, Ural Branch, RAS.* 2019. No 4 (40). Pp. 7–14.

11. **Gromov N. A., Kostyakov I. V., Kuratov V. V.** Kogerentnost v otkrytoy kvantovoy sisteme [Coherence in an open quantum system]. *Proc. of the Komi Sci. Centre, Ural Branch, RAS.* 2019. No 4(44). Pp. 30–33.

12. **Gromov N. A., Kostyakov I. V., Kuratov V. V.** Evoluciya kutrita i kontrakciya algebr Li su(3) [Qutrit evolution and contraction of Lie algebra su(3)]. *Proc. of the Komi Sci. Centre, Ural Branch, RAS.* 2021. No 4(50).

13. **Aref'eva I. Y., Volovich I. V., Kozyrev S. V.** Metod stokhasticheskogo predela i interferentsiya v kvantovykh mnogochastichnykh sistemakh [Stochastic limit method and interference in quantum multiparticle systems]. *TMF.* 2015. Vol. 183. No. 3. Pp. 388–408.

14. **Aref'eva I. Y., Volovich I. V.** *Holographic Photosynthesis.* ArXiv: 1603.09107 [hep-th].

15. **Ohya M., Volovich I.** *Mathematical Foundations of Quantum Information and Computation and Its Applications to Nano- and Bio-systems.* Springer. 2011, 759 p.

16. **Kozyrev S. V., Mironov A. A., Teretenkov A. E., Volovich I.V.** Flows in nonequilibrium quantum systems and quantum photosynthesis, Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top., 20:4. 2017. 1750021. *ArXiv*: 1612.00213.

17. **Chruściński D., Kimura G., Kossakowski A., Shishido Y.** On the universal constraints for relaxation rates for quantum dynamical semigroup. *ArXiv*:2011.10159 [quant-ph], 9 p.

Для цитирования: Громов Н. А., Костяков И. В., Куратов В. В. Когерентная эволюция кутрита // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2021. Вып. 3 (40). С. 21–40. DOI: 10.34130/1992-2752_2021_3_21

For citation: Gromov N. A., Kostyakov I. V., Kuratov V. V. Coherent evolution of qutrit.. *Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, No. 3 (40), pp. 21–40. DOI: 10.34130/1992-2752_2021_3_21

ФМИ Коми НЦ УрО РАН *Поступила 1.10.2021*