Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика.
Выпуск 3 (40). 2021

УДК 512.55 DOI: 10.34130/1992-2752_2021_3_4

ПИРСОВСКИЕ СЛОИ ПОЛУКОЛЕЦ С НЕКОТОРЫМИ УСЛОВИЯМИ КОНЕЧНОСТИ

М. В. Бабенко

Если φ — автоморфизм полукольца S, множество центральных дополняемых идемпотентов BS конечно и $\varphi(e) = e$ для любого $e \in BS$, то полукольцо S нётерово слева (справа) в точности тогда, когда каждый пирсовский слой полукольца $R = S[x, \varphi]$ удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей левых (правых) монических идеалов и множество центральных дополняемых идемпотентов каждого пирсовского слоя полукольца R конечно. Также получены описания регулярных симметрических полуколец и булевых полуколец в терминах пирсовских слоев полуколец косых многочленов.

Ключевые слова: полукольцо косых многочленов, монический идеал, пирсовский слой.

Введение

В статье исследуются полукольца косых многочленов и их пирсовские слои. Под *полукольцом* мы понимаем алгебраическую структуру $\langle S, +, \cdot, 0, 1\rangle$, которая является коммутативной полугруппой с нулем относительно сложения, полугруппой с единицей относительно умножения, умножение дистрибутивно справа и слева относительно сложения, нуль мультипликативен (т. е. справедливо условие $a0 = 0 = 0a$ для любого $a \in S$). Будем рассматривать полукольца с единицей, отличной от нуля.

Пусть S — полукольцо, φ — эндоморфизм полукольца S, сохраняющий единицу, $S = S[x, \varphi]$ — множество всех многочленов вида $a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ с переменной x и с коэффициентами из S. Сложение $+$ многочленов определяется обычным образом, а умножение — исходя из правила $xs = \varphi(s)x$. Стандартно проверяется, что $S[x, \varphi]$ является полукольцом, которое называется *левым полукольцом косых многочленов*.

Полукольца косых многочленов являются обобщением как колец косых многочленов, так и полуколец обычных (некосых) многочленов. Кольца косых многочленов $F[x, \varphi]$ над телом F и его автоморфизмом φ впервые рассмотрел О. Оре в [1]. Многие результаты исследования колец косых многочленов изложены в [2; 3]. Полукольца многочленов рассматривал Л. Дэйл в [4; 5]; в частности, им введены в обиход полезные монические идеалы. Некоторые свойства колец многочленов $A[x]$ с коэффициентами из кольца A имеют место для колец косых многочленов $A[x, \varphi]$, а также могут быть перенесены и на полукольцевой случай. Также некоторые утверждения, доказанные для полукольца многочленов $S[x]$, будут справедливы и для «косого», случая. Но полной аналогии между кольцами и полукольцами многочленов не наблюдается. Например, кольцо многочленов, а также левое кольцо косых многочленов над полем является кольцом главных идеалов [6, 15.1]. Но полукольцо многочленов над полуполем не будет полукольцом главных идеалов. Известно также, что для полуколец не справедлива теорема Гильберта о базисе [4].

В настоящей работе основной задачей является изучение зависимостей между алгебраическими свойствами полукольца косых многочленов и свойствами полукольца его коэффициентов. Одним из инструментов, позволяющих выявить целый ряд таких свойств, являются пирсовские пучки.

Пирсовский пучок ввел в рассмотрение Р. С. Пирс в 1967 году [7]. Он доказал, что любое кольцо изоморфно кольцу глобальных сечений своего пирсовского пучка. Это позволило использовать пирсовский пучок в изучении алгебраических свойств колец [8–10]. А. А. Туганбаев использовал пирсовские пучки для выявления связей свойств колец косых многочленов и их пирсовских слоев [6, гл. 15]. В. В. Чермных в [11] доказал изоморфность пирсовского представления для полукольцевого аналога пирсовского пучка, что в дальнейшем позволило получить характеризацию полуколец через свойства их пирсовских слоев [12; 13].

В нашей статье показано, что использование пирсовских пучков позволяет в некоторых случаях получить характеризацию полукольца S через свойства пирсовских слоев этого полукольца, а также через свойства пирсовских слоев полукольца косых многочленов с коэффициентами из S.

Основными результатами статьи являются теоремы 1 и 2.

Теорема 1. *Пусть φ — инъективный эндоморфизм полукольца S, $\varphi(e) = e$ для любого $e \in BS$ и $R = S[x, \varphi]$. Тогда справедливы утверждения:*

1) *если S — регулярное слабо симметрическое полукольцо, любой идемпотент которого является центральным дополняемым идемпотентом, то каждый пирсовский слой полукольца R является полукольцом без делителей нуля, в котором каждый левый m-идеал является главным;*

2) *если S — булево полукольцо, то каждый пирсовский слой полукольца R является антикольцом без делите-*

лей нуля, в котором каждый левый m-идеал является главным.

При доказательстве этого результата активно используются монические идеалы (m-идеалы), предложенные Л. Дэйлом [4; 14]

Левый идеал A полукольца R называется *левым m-идеалом*, если $f_0 + f_1x + \ldots + f_kx^k \in A$ влечет $f_ix^i \in A$ для всех $i = 0, \ldots, k$. Аналогично определяется правый m-идеал.

Рассмотрим схему описания левых m-идеалов. Пусть φ — эндоморфизм полукольца S. Назовем последовательность левых идеалов $L_0, L_1, \ldots$ из S *левой φ-цепью*, если для любого целого неотрицательного i выполняется $\varphi(L_i) \subseteq L_{i+1}$. Заметим, что для произвольного левого идеала B полукольца $S[x,\varphi]$ множество его левых коэффициентных идеалов $B_i = \{s_i \in S : \text{ найдется многочлен } \ldots + s_ix^i + \ldots \in B\}$ образует φ-цепь. Произвольная левая φ-цепь $L_0, L_1, \ldots$ полукольца S задает левый m-идеал $L^* = \{\sum a_ix^i \in S[x,\varphi] : a_i \in L_i\}$. Кроме того, каждый левый m-идеал задается некоторой левой φ-цепью, в качестве которой можно взять множество его коэффициентных левых идеалов. Похожим образом описываются правые m-идеалы полукольца $S[x,\varphi]$.

С помощью монических идеалов Дэйл доказал полукольцевой аналог теоремы Гильберта о базисе: *коммутативное полукольцо A нётерово в точности тогда, когда $A[x]$ удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепочек монических идеалов* [5, theorem 4.2.].

Использование аппарата m-идеалов позволяет доказать второй основной результат нашей статьи.

Теорема 2. *Пусть φ — автоморфизм полукольца S, $\varphi(e) = e$ для любого $e \in BS$, множество BS конечно. Тогда полукольцо S нётерово слева (справа) в точности тогда, когда каждый пирсовский слой полукольца $R = S[x,\varphi]$*

удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей левых (правых) m-идеалов и множество центральных дополняемых идемпотентов каждого пирсовского слоя полукольца R конечно.

1. Первоначальные понятия

Идемпотентом полукольца S называется элемент $e \in S$, такой, что $e = e^2$. Идемпотент e полукольца S называется *дополняемым*, если для некоторого $e^\perp \in S$ выполняется $e + e^\perp = 1$ и $ee^\perp = 0$. Если при этом идемпотент e является центральным (т. е. выполняется $se = es$ для любого $s \in S$), то его дополнение $e^\perp$ задается однозначно и также является центральным дополняемым идемпотентом. Множество всех центральных дополняемых идемпотентов полукольца S будем обозначать через BS. Со сложением $e \oplus f = ef^\perp + e^\perp f$ и обычным полукольцевым умножением получаем булево кольцо $\langle BS, \oplus, \cdot \rangle$.

Пусть M — максимальный идеал кольца BS. Введем на полукольце S отношение

$$a \equiv b(\rho_M) \Leftrightarrow ae^\perp = be^\perp \text{ для некоторого } e \in M.$$

Это отношение является конгруэнцией на полукольце S, которая называется *пирсовской* конгруэнцией. Факторполукольцо S/ρ_M по пирсовской конгруэнции называется *пирсовским слоем* полукольца S.

Множество $\operatorname{Max} BS$ всех максимальных идеалов кольца BS со стоуновской топологией образует пространство, являющееся нульмерным компактом (компактным хаусдорфовым пространством с базой открыто-замкнутых множеств). Множества $D(A) = \{M \in \operatorname{Max} BS : M \not\supseteq A\}$ для произвольного идеала A кольца BS являются открытыми, а множества вида $D(e)$, $e \in BS$, образуют базис открыто-замкнутых множеств.

Пирсовский пучок — это пара $(P(S), \operatorname{Max} BS)$, где $P(S) = \dot{\cup} S/\alpha_M$ — топологическое *накрывающее пространство*, являющееся дизъюнктным объединением всех пирсовских слоев полукольца S.

Непрерывные отображения из $\operatorname{Max} BS$ в $P(S)$ (каждая точка $M \in \operatorname{Max} BS$ отображается в «свой» пирсовский слой S/α_M) называются *глобальными сечениями*. Глобальные сечения пирсовского пучка исчерпываются сечениями вида $\hat{s}$, $s \in S$, где $\hat{s}(M)$ — класс элемента s в слое S/α_M. Пирсовские пучки применяются к исследованию алгебр посредством теорем о представлениях: *каждое кольцо* (*полукольцо*) *с единицей изоморфно кольцу* (*соответственно, полукольцу*) *всех глобальных сечений своего пирсовского пучка* [7, theorem 4.4; 11, теорема 3].

Полукольцо, в котором каждый ненулевой элемент обратим, называется *полукольцом с делением*; полукольцо с делением, не являющееся телом, называется *полутелом*. Полукольцо без ненулевых аддитивно обратимых элементов называется *антикольцом*.

Полукольцо S называется *arp-полукольцом*, если оно регулярно (для любого $a \in S$ разрешимо уравнение $axa = a$), *положительно* (элемент $a+1$ обратим в S для любого $a \in S$) и каждый его идемпотент e централен; *arp*-полукольцо называется *булевым*, если каждый его идемпотент дополняем. Со структурной теорией *arp*-полуколец можно познакомиться в [15], пучковые представления *arp*-полуколец рассмотрены в [16, §5.3].

2. Доказательство теоремы 1

Отметим, что факторполукольцо антикольца не обязательно будет антикольцом. Например, пусть $\mathbb{N}$ — полукольцо целых неотрицательных чисел, $\sim_m$ — отношение сравнимости по модулю m. Тогда $\mathbb{N}/\sim_m$ изоморфно кольцу вычетов $\mathbb{Z}_m$. Однако пирсовские слои антикольца будут антикольцами.

Лемма 1. *Равносильны следующие условия:*

1) *S — антикольцо;*

2) *$S[x,\varphi]$ — антикольцо;*

3) *каждый пирсовский слой полукольца S является антикольцом;*

4) *каждый пирсовский слой полукольца $S[x,\varphi]$ является антикольцом.*

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Предположим, что $f+g=0$ для некоторых ненулевых многочленов. Пусть f_i, g_j — их младшие ненулевые коэффициенты. Тогда $i=j$ и из $f_i+g_i=0$ получаем противоречие.

2) $\Rightarrow$ 1). S будет антикольцом, поскольку является подполукольцом антикольца $S[x,\varphi]$.

1) $\Rightarrow$ 3). Пусть $\bar{a},\bar{b}\in S/\alpha_M$ — пирсовский слой и $\bar{a}+\bar{b}=\bar{0}$. Тогда $(a+b)e=0$ для некоторого $e\in BS\setminus M$. Из $ae+be=0$ получаем $ae=be=0$, откуда $\bar{a}=\bar{b}=\bar{0}$.

3) $\Rightarrow$ 1). Пусть $a+b=0$ для $a,b\in S$. Тогда $\hat{a}(M)+\hat{b}(M)=\hat{0}(M)$ в каждом пирсовском слое S/α_M. В силу условия получаем $\hat{a}(M)=\hat{0}(M)$ для каждого $M\in \operatorname{Max} BS$. Но тогда $\hat{a}$ — нулевое сечение, поэтому $a=0$ по [16, теорема 4.2.13].

2) $\Leftrightarrow$ 4). Очевидно. $\square$

Лемма 2. *Пусть φ — инъективный эндоморфизм полукольца S, $R=S[x,\varphi]$, $\varphi(e)=e$ для любого $e\in BS$, M — максимальный идеал из BS. Тогда справедливы утверждения:*

1) *множество BR всех центральных дополняемых идемпотентов полукольца R совпадает с множеством BS всех центральных дополняемых идемпотентов полукольца S;*

2) *φ индуцирует инъективный эндоморфизм $\bar{\varphi}$ пирсовского слоя R/ρ_M и $R/\rho_M \cong (S/\alpha_M)[x, \bar{\varphi}]$.*

Доказательство. 1) Схема доказательства совпадает со схемой доказательства соответствующего кольцевого утверждения (см., например, [6, утверждение 15.4, пункт 2)]).

2) Непосредственно проверяется, что для $\bar{a} \in R/\rho_M$ правило $\bar{\varphi}(\bar{a}) = \overline{\varphi(a)}$ задает инъективный эндоморфизм $\bar{\varphi}$ пирсовского слоя R/ρ_M. Если $\overline{f(x)} \in R/\rho_M$ для $f = f_0 + \ldots + f_k x^k \in R$, и $\bar{f}_i$ — класс элемента f_i в S/α_M, то соответствие $\overline{f(x)} \mapsto \bar{f}_0 + \ldots + \bar{f}_k x^k$ определяет искомый изоморфизм. □

Полукольцо называется *слабо симметрическим*, если для любых $a, b, c, d \in S$ выполняется $bc = bd \Leftrightarrow cb = db$.

Доказательство теоремы 1

1) Пусть S — полукольцо, указанное в формулировке. По предложению 9 [12] каждый пирсовский слой S/α_M полукольца S является полукольцом с делением. Покажем, что $(S/\alpha_M)[x, \bar{\varphi}]$ — полукольцо без делителей нуля. Пусть $f = f_i x^i + \ldots$, $g = g_j x^j + \ldots$ — такие ненулевые многочлены из $(S/\alpha_M)[x, \bar{\varphi}]$, что $fg = 0$ и $f_i, g_j \neq 0$ — их младшие коэффициенты. Тогда $f_i \bar{\varphi}^i(g_j) = 0$. Случай $i = 0$ влечет $f_i g_j = 0$, поэтому невозможен. Если $i \neq 0$, то $\bar{\varphi}^i(g_j) = 0$, откуда $\bar{\varphi}(a) = 0$ для некоторого $a \neq 0$. Тогда $\bar{\varphi}(1) = \bar{\varphi}(a^{-1})\bar{\varphi}(a) = 0$, противоречие, поскольку произвольный пирсовский слой является полукольцом с ненулевой единицей, а эндоморфизм $\bar{\varphi}$

сохраняет единицу. Обозначим через F полукольцо с делением S/α_M, и пусть B — произвольный ненулевой левый m-идеал полукольца $F[x, \bar{\varphi}]$. Соответствующая ему $\bar{\varphi}$-цепь левых коэффициентных идеалов имеет вид либо $F, F, \ldots$, либо $0, \ldots, 0, F, F, \ldots$ с первым идеалом F на k-ом месте. В первом случае $B = F[x, \bar{\varphi}]$, во втором $B = (x^{k-1})$, и B — главный левый идеал. Применение леммы 2, пункт 2, завершает доказательство.

2) По предложению 10 и лемме 7 [12] все пирсовские слои S/α_M полукольца S являются антикольцами с делением. Далее доказательство аналогично 1 с учетом леммы 1.

3. Характеризация нётеровых полуколец

Нётерово слева полукольцо S определяется как полукольцо, удовлетворяющее условию обрыва возрастающих цепей левых идеалов. Как и для колец, это равносильно конечной порожденности его левых идеалов [18, prop. 6.16]. Пирсовские слои нётерова слева полукольца являются нётеровыми слева. Обратное не верно. Рассмотрим булеан бесконечного множества. В зависимости от задания аддитивной операции его можно представить либо как булеву решетку, либо как булево кольцо. В обоих случаях пирсовские слои будут состоять из двух элементов. Поскольку множество всех конечных подмножеств из этого полукольца образует идеал, не являющийся конечно порожденным, то получаем, что нётеровость (и даже конечность) пирсовских слоев полукольца S не влечет нётеровости S.

Предложение 1. *Полукольцо S нётерово слева (справа) в точности тогда, когда все пирсовские слои полукольца S нётеровы слева (справа) и S — полукольцо с конечным множеством центральных дополняемых идемпотентов.*

Доказательство. Пусть BS — бесконечная булева алгебра центральных дополняемых идемпотентов. Известно (см., например, [17, §4, с. 238]), что условие обрыва возрастающих цепей в булевой алгебре влечет ее конечность. Поэтому в BS существует бесконечная возрастающая цепь $e_1 < e_2 < \ldots$, и тогда $e_1S \subset e_2S \subset \ldots$ — бесконечная возрастающая цепь идеалов в полукольце S. Показали, что нётеровость S влечет конечность BS. Очевидно, что факторполукольцо нётерового полукольца нётерово.

Обратно, пусть множество BS конечно, $\operatorname{Max} BS = \{M_1, \ldots, M_k\}$ и каждый пирсовский слой S/α_i, $i = 1, \ldots, k$, — нётерово слева полукольцо. Пусть A — произвольный левый идеал полукольца S. Образ A при естественном эпиморфизме на слой S/α_i является левым идеалом A_i с образующими $\hat{a}_{i1}(M_i), \ldots, \hat{a}_{in}(M_i)$ для некоторых элементов $a_{ij} \in S$. Для удобства записи будем считать, что системы образующих $\hat{a}_{ij}(M_i)$ левых идеалов A_i состоят из одинакового числа элементов, независимо от слоя S/α_i; этого можно добиться, добавив при необходимости в системы образующих нулевые элементы.

Покажем, что множество $T = \{a_{ij} : 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq n\}$ порождает левый идеал A. Пусть $a \in A$. Тогда $\hat{a}(M_i) = (\hat{s}_{i1}\hat{a}_{i1} + \ldots + \hat{s}_{in}\hat{a}_{in})(M_i) = \hat{a}_i(M_i)$. По свойствам пучков сечения $\hat{a}$ и $\hat{a}_i$ совпадают на некоторой открытой окрестности U_i точки M_i. Нульмерность базисного пространства $\operatorname{Max} BS$ позволяет выбрать окрестности открыто-замкнутыми, а конечность — считать их попарно не пересекающимися. Итак, пусть имеется разбиение $\operatorname{Max} BS$ на $V_1, \ldots, V_m$ и соответствующее им множество элементов:

$$T_a = \{a'_{11}, \ldots, a'_{1n}, \ldots, a'_{m1}, \ldots, a'_{mn}\} \subseteq T.$$

Пусть
$$\chi_i = \begin{cases} \hat{1} \text{ на } V_i \\ \hat{0} \text{ на } \operatorname{Max} BS \setminus V_i \end{cases}$$
есть характеристическое сечение открыто-замкнутого множества V_i, и пусть $t_i \in S$ — такой элемент, что глобальные сечения $\hat{t}_i$ и χ_i совпадают. Непосредственно проверяется, что глобальное сечение $\hat{a}$ совпадает с глобальным сечением элемента $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} t_i s'_{ij} a'_{ij}$. Пирсовское представление произвольного полукольца изоморфно [16, теорема 4.2.13], поэтому $a = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} t_i s'_{ij} a'_{ij}$. Получили, что произвольный элемент выражается через представителей конечного множества T, поэтому полукольцо S — нётерово слева.

Случай правой нётеровости доказывается точно так же.

$\square$

Известно, что теорема Гильберта о базисе не верна в классе полуколец. Л. Дэйлом [4] была предложена следующая характеризация нётеровых полуколец: *коммутативное полукольцо S нётерово $\Leftrightarrow$ $S[x]$ не содержит бесконечной строго возрастающей цепи m-идеалов.*

Адаптация идей доказательства теоремы Дэйла позволяет получить следующий результат.

Лемма 3. *Пусть φ — автоморфизм полукольца S. Тогда равносильны следующие утверждения:*

1) *S — нётерово слева (справа) полукольцо;*

2) *$S[x, \varphi]$ не содержит бесконечной строго возрастающей цепи левых (правых) m-идеалов.*

Доказательство теоремы 2

Рассмотрим левосторонний случай, для правых идеалов рассуждения не изменятся.

В классе полуколец с конечными множествами центральных дополняемых идемпотентов левая нётеровость полукольца S равносильна левой нётеровости всех пирсовских слоев S/α_M по предложению 1.

Далее, полукольцо S/α_M нётерово слева тогда и только тогда, когда полукольцо $(S/\alpha_M)[x,\bar{\varphi}]$ удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей левых m-идеалов по лемме 3, а по лемме 2, пункт 2), этому же условию удовлетворяет и соответствующий пирсовский слой R/ρ_M. Из нётеровости полукольца S/α_M следует конечность множества $B(S/\alpha_M)$, и тогда по лемме 2, пункт 1) — конечность множества $B((S/\alpha_M)[x,\bar{\varphi}])$. По лемме 2, пункт 2) получаем, что множество центральных дополняемых идемпотентов слоя R/ρ_M также является конечным. Верно и обратное, конечность $B(R/\rho_M)$ влечет конечность $B((S/\alpha_M([x,\bar{\varphi}])$, а это — конечность $B(S/\alpha_M)$.

Список литературы

1. **Ore O.** Theory of non-commutative polynomials // *Ann. of Math.* 1933, 2(34), № 3. Pp. 480–508.

2. **Gooderl K. R., Warfield R. B.** An introduction to noncommutative Noetherian rings. Cambridge University Press, 2004. 370 p.

3. **McConnell J. C., Robson J. C.** Noncommutative Noetherian rings // *Graduate studes in mathematics.* 2000. Vol. 30, 636 p.

4. **Dale L.** Monic and monic free ideals in polynomial semirings // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1976. V.56. Pp. 45–50.

5. **Dale L.** The k-closure of monic and monic free ideals in a polynomial semiring //*Proc. Amer. Math. Soc.* 1977. Vol. 64. № 2. Pp. 219–226.

6. **Туганбаев А. А.** Теория колец. Арифметические кольца и модули. М.: МЦНМО, 2009. 472 с.

7. **Pierce R. S.** Modules over commutative regular rings // *Mem. Amer. Math. Soc.* 1967. V.70. Pp. 1–112.

8. **Burgess W. D., Stephenson W.** Pierce sheaves of noncommutative rings // *Comm. Algebra.* 1976. V.39. Pp. 512–526.

9. **Burgess W. D., Stephenson W.** Rings all of whose Pierce stalks are local // *Canad. Math. Bull.* 1979. V.22, 2. Pp. 159–164.

10. **Beidar C. I., Mikhalev A. V. and Salavova C.** Generalized identities and semiprime rings with involution // *Math. Z.* 1981. V.178. Pp. 37–62.

11. **Чермных В. В.** Пучковые представления полуколец // *Успехи матем. наук.* 1993. Т. 48. № 5. С. 185–186.

12. **Марков Р. В., Чермных В. В.** О пирсовских слоях полуколец // *Фундамент. и прикл. матем.* 2014. Т. 19. № 2. С. 171–186.

13. **Марков Р. В., Чермных В. В.** Полукольца, близкие к регулярным, и их пирсовские слои // *Труды ИММ УрО РАН.* 2015. Т. 21. № 3. С. 213–221.

14. **Dale L.** The structure of monic ideals in a noncommutative polynomial semirings // *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* 1982. V. 39, 1–3. Pp. 163–168.

15. **Вечтомов Е. М., Михалев А. В., Чермных В. В.** Абелевы регулярные положительные полукольца // *Труды семинара имени И. Г. Петровского.* 1997. Т. 20. С. 282–309.

16. **Чермных В. В.** Функциональные представления полуколец // *Фундамент. и прикл. матем.* 2012. Т. 17. № 3. С. 111–227.

17. Общая алгебра / под общей ред. Л. А. Скорнякова. М.: Наука, 1991. Т. 2. 480 с.

18. **Golan J. S.** Semirings and their applications. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht. 1999. 382 p.

Summary

Babenko M. V. Pierce stalks of semirings with some finiteness conditions

Let φ be an automorphism of the semiring S, the set of central complemented idempotents BS be finite, $\varphi(e) = e$ for any $e \in BS$, and $R = S[x, \varphi]$ be skew polynomial semiring. Then S is Noetherian iff every Pierce stalk of the semiring R satisfies ascending chain condition of monic ideals and the set of all central complemented idempotents of every Pierce stalk is finite. We also obtain a description of regular symmetric semirings and Boolean semirings in terms of Pierce stalks of skew polynomial semirings.

Keywords: skew polynomial semiring, monic ideal, Pierce stalk.

References

1. **Ore O.** Theory of non-commutative polynomials. *Ann. of Math. 1933, 2(34), No. 3. Pp. 480–508.*

2. **Gooderl K. R., Warfield R. B.** *An introduction to noncommutative Noetherian rings.* Cambridge University Press, 2004. 370 p.

3. **McConnell J. C., Robson J. C.** Noncommutative Noetherian rings. *Graduate studes in mathematics*, 2000. Vol. 30, 636 p.

4. **Dale L.** Monic and monic free ideals in polynomial semirings.*Proc. Amer. Math. Soc. 1976. V.56. Pp. 45–50.*

5. **Dale L.** The k-closure of monic and monic free ideals in a polynomial semiring. *Proc. Amer. Math. Soc. 1977. vol. 64. No. 2. Pp. 219–226.*

6. **Tuganbaev A. A.** *Teoriya kolec. Arifmeticheskie kolca i moduli* [Ring Theory. Arithmetic rings and modules]. M.: MCNMO. 2009. 472 p.

7. **Pierce R. S.** Modules over commutative regular rings. *Mem. Amer. Math. Soc. 1967. V.70. Pp. 1–112.*

8. **Burgess W. D., Stephenson W.** Pierce sheaves of noncommutative rings. *Comm. Algebra. 1976. V.39. Pp. 512–526.*

9. **Burgess W. D., Stephenson W.** Rings all of whose Pierce stalks are local. *Canad. Math. Bull. 1979. V.22, 2. Pp. 159–164.*

10. **Beidar C. I., Mikhalev A. V. and Salavova C.** Generalized identities and semiprime rings with involution. *Math. Z. 1981. V.178. Pp. 37–62.*

11. **Chermnykh V. V.** Beam half-ring representations. *Uspekhi matematicheskikh nauk* [Advances in mathematical sciences]. 1993. T. 48, No. 5. Pp. 185–186.

12. **Markov R. V., Chermnykh V. V.** About the pierce layers of the half-rings. *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika* [Fundamental and Applied Mathematics]. 2014. T. 19, No. 2. Pp. 171–186.

13. **Markov R. V., Chermnykh V. V.** Half-rings close to regular rings and their pierce layer. *Trudy IMM UrO RAN* [Proceedings of the IMM UB RAS]. 2015. T. 21, No. 3. Pp. 213–221.

14. **Dale L.** The structure of monic ideals in a noncommutative polynomial semirings. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* 1982. V. 39, 1–3. Pp. 163–168.

15. **Vechtomov E. M., Mikhalev A. V., Chermnykh V. V.** Abelian regular positive semi-rings. *Trudy seminara imeni I. G. Petrovskogo* [Proceedings of the I. G. Petrovsky Seminar.]. 1997. T. 20. Pp. 282–309.

16. **Chermnykh V. V.** Functional representations of semi-rings. *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika* [Fundamental and Applied Mathematics]. 2012. Vol. 17, No. 3. Pp. 111–227.

17. *Obshhaya algebra* [General Algebra]. Vol. 2. (red. L. A. Skornyakov). M.: Nauka. 1991. 480 p.

18. **Golan J. S.** *Semirings and their applications.* Kluwer Acad. Publ., Dordrecht. 1999. 382 p.

Для цитирования: Бабенко М. В. Пирсовские слои полуколец с некоторыми условиями конечности // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2021. Вып. 3 (40). С. 4–20. DOI: 10.34130/1992-2752_2021_3_4

For citation: Babenko M. V. Pierce stalks of semirings with some finiteness conditions. *Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, No. 3 (40), pp. 4–20. DOI: 10.34130/1992-2752_2021_3_4

Вятский государственный университет *Поступила 11.06.2021*