Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1.Вып.4.2001

УДК 678.027.94.001

Термовязкоупругая модель отверждения сферического изделия [1]

Н.А.Беляева, Н.Н.Паршукова

Задача определения напряженного состояния сферического изделия, формируемого в ходе полимеризации (отверждения) с учетом неоднородного температурного и конверсионного полей, вязкости, решается при двух режимах проведения процесса: объемном и фронтальном. В случае объемного режима получена система интегрально-дифференциальных уравнений для определения радиальной и тангенциальной компонент напряжения; в случае фронтального режима указанные компоненты напряжения удается найти в явном виде.

Рассмотрим задачу о формировании полого сферического изделия $R_1 \leq r \leq R$ в процессе фазового перехода жидкость-твердое тело. Пространственно-временное поведение отверждающегося материала можно полностью описать следующей системой определяющих соотношений:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{2}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{tt}) = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \epsilon_{tt}}{\partial r} = \frac{\epsilon_{rr} - \epsilon_{tt}}{r}, \tag{2}$$

где (1) - уравнение равновесия, (2) - условие совместности деформаций, $\sigma_{rr} = \sigma_{rr}(r,t), \sigma_{tt} = \sigma_{tt}(r,t)$– радиальная и тангенциальная компоненты напряжений, $\epsilon_{rr} = \epsilon_{rr}(r,t), \epsilon_{tt} = \epsilon_{tt}(r,t)$– радиальная и тангенциальная компоненты деформации, причем

$$\epsilon_{rr} = \frac{du}{dr},\ \epsilon_{tt} = \frac{u}{r}.$$

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №00-01-00723.

Уравнения (1) и (2) справедливы в общем случае неупругой сплошной среды.

В рассматриваемом случае полные компоненты деформаций в (2) являются суммой вязкоупругой, температурной и химической составляющих [1]:

$$\epsilon = \epsilon^* + \epsilon_y^{\text{хим}} + \epsilon^{\text{т}}. \tag{3}$$

Здесь

$$\epsilon_y^{\text{хим}} = k_1\alpha + k_2\eta, \epsilon^{\text{т}} = \alpha_0(T - T^0),$$

где $\alpha = \alpha(r, t)$– глубина полимеризации (отверждения) исходного жидкого мономера, $\eta = \eta(r, t)$– глубина кристаллизации заполимеризовавшейся части вещества, α_0– аналог коэффициента линейного температурного расширения материала, $\epsilon^*(\epsilon^*_{rr}(r, t), \epsilon^*_{tt}(r, t))$– вязкоупругая составляющая деформации.

Будем искать последнюю в виде [2]:

$$\begin{pmatrix} \epsilon^*_{rr} \\ \epsilon^*_{tt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{2\nu}{E} \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1-\nu}{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{rr}(r, t) \\ \sigma_{tt}(r, t) \end{pmatrix} +$$

$$+ \int\limits_0^t \begin{pmatrix} f_{rr}(t-\tau) & f_{rt}(t-\tau) \\ f_{tr}(t-\tau) & f_{tt}(t-\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{rr}(r, \tau) \\ \sigma_{tt}(r, \tau) \end{pmatrix} d\tau. \tag{4}$$

Применим к (4) преобразование Лапласа, при этом

$$\epsilon_{rr}(p) \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} \epsilon^*_{rr}, \epsilon_{tt}(p) \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} \epsilon^*_{tt}, \sigma_{rr}(p) \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} \sigma_{rr}, \sigma_{tt}(p) \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} \sigma_{tt}$$

$$F_{rr}(p) \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} f_{rr}, F_{rt}(p) \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} f_{rt}, F_{tr}(p) \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} f_{tr}, F_{tt}(p) \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} f_{tt}.$$

Или, покомпонентно:

$$\epsilon_{rr}(p) = \frac{1}{E}\sigma_{rr}(p) - \frac{2\nu}{E}\sigma_{tt}(p) + F_{rr}\sigma_{rr}(p) + F_{rt}\sigma_{tt}(p) =$$

$$= \sigma_{rr}(p)\underbrace{[\frac{1}{E} + F_{rr}]}_{K_{rr}(p)} + \sigma_{tt}(p)\underbrace{[-\frac{2\nu}{E} + F_{rt}]}_{K_{rt}(p)} = \tag{5}$$

$$= \sigma_{rr}(p)K_{rr}(p) + \sigma_{tt}(p)K_{rt}(p);$$

$$\epsilon_{tt}(p) = -\frac{\nu}{E}\sigma_{rr}(p) + \frac{1-\nu}{E}\sigma_{tt}(p) + F_{tr}\sigma_{rr}(p) + F_{tt}\sigma_{tt}(p) =$$

$$= \sigma_{rr}(p)\underbrace{[-\frac{\nu}{E} + F_{tr}]}_{K_{tr}(p)} + \sigma_{tt}(p)\underbrace{[\frac{1-\nu}{E} + F_{tt}]}_{K_{tt}(p)} = \tag{6}$$

$$= \sigma_{rr}(p)K_{tr}(p) + \sigma_{tt}(p)K_{tt}(p).$$

Запишем закон Гука в сферических координатах для упругой сферы:

$$\epsilon_{rr} = \frac{1}{E}(\sigma_{rr} - 2\nu\sigma_{tt}),$$

$$\epsilon_{tt} = \frac{1}{E}(\sigma_{tt} - \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{tt})).$$

По закону наследственной упругости для получения зависимостей между вязкоупругими компонентами напряжения и деформации в операторном виде необходимо упругие константы заменить на упругие операторы [3]:

$$\begin{aligned} \epsilon_{rr}(p) &= \tfrac{1}{E(p)}(\sigma_{rr}(p) - 2\nu(p)\sigma_{tt}(p)), \\ \epsilon_{tt}(p) &= \tfrac{1}{E(p)}(\sigma_{tt}(p) - \nu(p)(\sigma_{rr}(p) + \sigma_{tt}(p))). \end{aligned} \tag{7}$$

Сравнивая (5), (6), (7), получаем:

$$\begin{array}{lcl} K_{rr}(p) = \frac{1}{E(p)} = \frac{1}{E} + F_{rr} & & F_{rr} = \frac{1}{E(p)} - \frac{1}{E} \\ K_{rt}(p) = -\frac{2\nu(p)}{E(p)} = -\frac{2\nu}{E} + F_{rt} & & F_{rt} = \frac{2\nu}{E} - \frac{2\nu(p)}{E(p)} \\ & \Rightarrow & \\ K_{tr}(p) = -\frac{\nu(p)}{E(p)} = -\frac{\nu}{E} + F_{tr} & & F_{tr} = \frac{\nu}{E} - \frac{\nu(p)}{E(p)} \\ K_{tt}(p) = \frac{1-\nu(p)}{E(p)} = \frac{1-\nu}{E} + F_{tt} & & F_{tt} = \frac{1-\nu(p)}{E(p)} - \frac{1-\nu}{E} \end{array} \tag{8}$$

Воспользуемся условием несжимаемости материала:

$$\epsilon_{rr} + 2\epsilon_{tt} = 0,$$

из которого следует

$$\nu(p) = \frac{1}{2}[1 - \frac{1-2\nu}{E}E(p)]. \tag{9}$$

Тогда с учетом (9) имеем:

$$\begin{aligned} F_{rt}(p) &= \tfrac{1}{E} - \tfrac{1}{E(p)} = -F_{rr}; \\ F_{tr}(p) &= \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{E} - \tfrac{1}{E(p)}) = -\tfrac{1}{2}F_{rr}; \\ F_{tt} &= \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{E(p)} - \tfrac{1}{E}) = \tfrac{1}{2}F_{rr}. \end{aligned} \tag{10}$$

Для стандартной модели вязкоупругого тела [1]:

$$f_{rr}(t) = \frac{\lambda-\mu}{E}e^{-\mu t}. \tag{11}$$

С учетом (10) выражение (4) запишется

$$\begin{pmatrix} \epsilon^*_{rr}(r,t) \\ \epsilon^*_{tt}(r,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{2\nu}{E} \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1-\nu}{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{rr}(r,t) \\ \sigma_{tt}(r,t) \end{pmatrix} +$$

$$+\int\limits_0^t \begin{pmatrix} f_{rr}(t-\tau) & -f_{rr}(t-\tau) \\ -\frac{1}{2}f_{rr}(t-\tau) & \frac{1}{2}f_{rr}(t-\tau) \end{pmatrix} [\sigma_{rr}(r,\tau)-\sigma_{tt}(r,\tau)]d\tau$$

или, покомпонентно,

$$\begin{gathered} \epsilon^*_{rr} = \tfrac{1}{E}[\sigma_{rr}(r,t) - 2\nu\sigma_{tt}(r,t)]+ \\ +\int\limits_0^t f_{rr}(t-\tau)[\sigma_{rr}(r,\tau)-\sigma_{tt}(r,\tau)]d\tau, \\ \epsilon^*_{tt} = \tfrac{1}{E}[-\nu\sigma_{rr} + (1-\nu)\sigma_{tt}]- \\ \tfrac{1}{2}\int\limits_0^t f_{rr}(t-\tau)[\sigma_{rr}(r,\tau)-\sigma_{tt}(r,\tau)]d\tau. \end{gathered} \tag{12}$$

Подставим (3) с учетом (12) в условие совместности деформаций (2):

$$\frac{\partial}{\partial r}[-\nu\sigma_{rr} + (1-\nu)\sigma_{tt} - \frac{1}{2}\int\limits_0^t \tilde{f}_{rr}(t-\tau)[\sigma_{rr}(r,\tau)-\sigma_{tt}(r,\tau)]d\tau] =$$

$$= \frac{3}{2r}\int\limits_0^t \tilde{f}_{rr}(t-\tau)[\sigma_{rr}(r,\tau)-\sigma_{tt}(r,\tau)]d\tau+$$

$$+\frac{1}{r}[\sigma_{rr}(1+\nu) - (1+\nu)\sigma_{tt}] + F(r,t),$$

где $F(r,t) = -E\frac{\partial\Theta(r,t)}{\partial r}$. После преобразований с использованием (1) получаем

$$(1-\nu)[\frac{\partial\sigma_{tt}}{\partial r} - \frac{1}{r}(\sigma_{rr}-\sigma_{tt})]+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^t \tilde{f}_{rr}(t-\tau)[\frac{\partial\sigma_{tt}(r,\tau)}{\partial r} - \frac{1}{r}(\sigma_{rr}(r,\tau)-\sigma_{tt}(r,\tau))]d\tau = F(r,t),$$

где $\tilde{f}_{rr} = Ef_{rr}$.

Введем вспомогательную функцию:

$$\chi(r,t) = \frac{\partial \sigma_{tt}}{\partial r} - \frac{1}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{tt}), \tag{13}$$

тогда

$$\chi(r,t) + \int_0^t \tilde{\tilde{f}}_{rr}(t-\tau)\chi(r,\tau)d\tau = F_1(r,t), \tag{14}$$

где $\tilde{\tilde{f}} = \frac{1}{2(1-\nu)}\tilde{f}_{rr}, F_1(r,t) = \frac{F(r,t)}{1-\nu}$.

Получаем систему для определения напряжений $\sigma_{rr}(r,t), \sigma_{tt}(r,t)$:

$$\begin{gathered} \chi(r,t) + \int_0^t \tilde{\tilde{f}}_{rr}(t-\tau)\chi(r,t)d\tau = F_1(r,t), \\ \chi(r,t) = \frac{\partial \sigma_{tt}}{\partial r} - \frac{1}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{tt}), \\ \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{2}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{tt}) = 0, \end{gathered} \tag{15}$$

которую дополним начальными

$$t = 0 : \sigma_{rr}(r) = 0, \sigma_{tt}(r) = 0 \tag{16}$$

и граничными условиями

$$\sigma_{rr}|_{R_1} = 0, \sigma_{rr}|_R = 0. \tag{17}$$

Система (15) совместно с условиями (16) и (17) позволяет численно определять пространственно-временное распределение напряжений в ходе объемного режима реакции полимеризации. При этом для нахождения температурного и конверсионного полей в ходе реакции необходимо использовать макрокинетическую модель совмещенноо процесса полимеризации и кристаллиации [1,2].

Рассмотрим задачу о фронтальном формировании (отверждении) изделия в виде полой сферы $R_1 \le r \le R$ с точки зрения механики непрерывно наращиваемого твердого тела: элемент растущего тела в окрестности какой-либо точки (r) деформируется совместно с другими элементами лишь начиная с момента его отверждения $(\tau^*(r))$, совпадающего с моментом присоединения этого элемента к образовавшейся (затвердевшей) области. Полагаем, что отверждение изделия происходит по аналогии изготовления его методом намотки, т.е. нас не будет интересовать предыстория движения частицы r до момента $\tau^*(r)$ присоединения (отверждения) этой частицы к затвердевшей области, и напряженное состояние затвердевшей части можно рассматривать независимо от состояния неотвержденной части. Тогда для образованной (отвержденной) к моменту $\tau^*(r)$ области непрерывно растущего тела сферической формы зависимость (12) между вязкоупругими деформациями и напряжениями запишется [4]:

$$\begin{aligned}\epsilon^*_{rr} &= \tfrac{1}{E}[\sigma_{rr}(r,t) - 2\nu\sigma_{tt}(r,t)]+\\ &+ \int\limits_{\tau^*(r)}^{t} f_{rr}(t-\tau)[\sigma_{rr}(r,\tau) - \sigma_{tt}(r,\tau)]d\tau,\\ \epsilon^*_{tt} &= \tfrac{1}{E}[-\nu\sigma_{rr}(r,t) + (1-\nu)\sigma_{tt}(r,t)]-\\ &-\tfrac{1}{2}\int\limits_{\tau^*(r)}^{t} f_{rr}(t-\tau)[\sigma_{rr}(r,\tau) - \sigma_{tt}(r,\tau)]d\tau,\end{aligned} \tag{18}$$

где $t > \tau^*(r)$.

Чтобы учесть динамический характер протекающего процесса отверждения (непрерывного наращивания), основные уравнения (1) и (2) необходимо записать в продифференцированном виде [5]:

$$\frac{\partial\dot{\sigma}_{rr}}{\partial r} + \frac{2}{r}(\dot{\sigma}_{rr} - \dot{\sigma}_{tt}) = 0- \tag{19}$$

уравнение равновесия,

$$\frac{\partial\dot{\epsilon}_t}{\partial r} = \frac{\dot{\epsilon}_r - \dot{\epsilon}_t}{r}- \tag{20}$$

условие совместности деформаций.

Определим зависимость между деформациями и напряжениями:

$$\dot{\epsilon}^*_r = \frac{1}{E}[\dot{\sigma}_{rr}(r,t) - 2\nu\dot{\sigma}_{tt}(r,t)] + f_{rr}(0)[\sigma_{rr}(r,t) - \sigma_{tt}(r,t)]+$$

$$+\int\limits_{\tau^*(r)}^{t} \dot{f}_{rr}(t-\tau)[\sigma_{rr}(r,\tau) - \sigma_{tt}(r,\tau)]d\tau, \tag{21}$$

$$\dot{\epsilon}^*_t = \frac{1}{E}[-\nu\dot{\sigma}_{rr}(r,t) + (1-\nu)\dot{\sigma}_{tt}(r,t)] - frac12 f_{rr}(0)[\sigma_{rr}(r,\tau) - \sigma_{tt}(r,\tau)]-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\tau^*(r)}^{t} \dot{f}_{rr}(t-\tau)[\sigma_{rtr}(r,\tau) - \sigma_t(r,\tau)]d\tau. \tag{22}$$

Подставим (21), (22) с учетом (3) в (20):

$$\frac{\partial}{\partial r}\{-\nu\dot{\sigma}_{rr}(r,t)+(1-\nu)\dot{\sigma}_{tt}(r,t)]-\frac{1}{2}\tilde{f}_{rr}(0)[\sigma_{rr}(r,\tau)-\sigma_{tt}(r,\tau)]-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\tau^*(r)}^{t}\dot{\tilde{f}}_{rr}(t-\tau)[\sigma_{rr}(r,\tau)-\sigma_{tt}(r,\tau)]d\tau+E\dot{\Theta}_t\}=$$

$$=\frac{1}{r}\{\dot{\sigma}_{rr}(1+\nu)+\dot{\sigma}_{tt}(1+\nu)+\frac{3}{2}\tilde{f}_{rr}(0)[\sigma_{rr}(r,\tau)-\sigma_{tt}(r,\tau)]+$$

$$+\frac{3}{2}\int\limits_{\tau^*(r)}^{t}\dot{\tilde{f}}_{rr}(t-\tau)[\sigma_{rr}(r,\tau)-\sigma_{tt}(r,\tau)]d\tau+E(\dot{\Theta}_r-\dot{\Theta}_t)\}.$$

Преобразуем полученное выражение, используя (1) и (19)

$$(1-\nu)[\frac{\partial\dot{\sigma}_{tt}}{\partial r}-\frac{\dot{\sigma}_{rr}-\dot{\sigma}_t}{r}]++\frac{1}{2}\dot{\tilde{f}}_{rr}(0)[\frac{\partial\sigma_{tt}}{\partial r}-\frac{\sigma_r-\sigma_t}{r}]+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\tau^*(r)}^{t}\dot{\tilde{f}}_{rr}(t-\tau)[\frac{\partial\sigma_t}{\partial r}-\frac{\sigma_{rr}-\sigma_{tt}}{r}]d\tau=\dot{F}(r,t).$$

В результате получаем следующую систему для определения $\chi(r,t)$:

$$\begin{gathered}\dot{\chi}(r,t)+\dot{\tilde{f}}_{rr}(0)\chi(r,t)+\int\limits_{\tau^*(r)}^{t}\dot{\tilde{f}}_{rr}(t-\tau)\chi(r,t)d\tau=\dot{F}_1(r,t),\\ \chi(r,t)=\frac{\partial\sigma_{tt}}{\partial r}-\frac{\sigma_{rr}-\sigma_{tt}}{r},\end{gathered}\qquad(23)$$

где $\dot{\tilde{f}}_{rr}(t)$, $F_1(r,t)$ определяются аналогично (14), а $t>\tau^*(r)$.

Продифференцируем второе равенство (23) по времени

$$\dot{\chi}(r,t)=\frac{\partial\dot{\sigma}_{tt}}{\partial r}-\frac{1}{r}(\dot{\sigma}_{rr}-\dot{\sigma}_{tt})$$

и подставим в полученное выражение $\dot{\sigma}_t$ из (19):

$$\dot{\sigma}_{tt}=\dot{\sigma}_{rr}+\frac{r}{2}\frac{\partial\dot{\sigma}_{rr}}{\partial r},\qquad(24)$$

получаем дифференциальное уравнение второго порядка относительно $\dot{\sigma}_{rr}$:

$$\frac{\partial^2\dot{\sigma}_{rr}}{\partial r^2}+\frac{4}{r}\frac{\partial\dot{\sigma}_{rr}}{\partial r}-\frac{2}{r}\dot{\chi}(r,t)=0.\qquad(25)$$

Пусть $\frac{\partial \dot\sigma_{rr}}{\partial r} = y$, тогда из (25) получим дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{4}{r}y - \frac{2}{r}\dot\chi(r,t) = 0,$$

решая которое методом вариации произвольной постоянной, получим выражение для y:

$$y = \frac{\partial \dot\sigma_{rr}}{\partial r} = \frac{1}{r^4}[2\int\limits_{R_1}^{r} \dot\chi(r,t)r^3 dr + c(t)R_1^4],$$

откуда

$$\dot\sigma_{rr} = \int\limits_{r^*(t)}^{r} [2\int\limits_{R_1}^{r} \dot\chi(r,t)r^3 dr + c(t)R_1^4]\frac{dr}{r^4} + \psi(t), \tag{26}$$

где $c(t), \psi(t)$– неизвестные функции, подлежащие определению из граничных условий.

Предположим, что на растущей поверхности задано внешнее давление $p(t)$:

$$\dot\sigma_{rr}(r^*(t)) = -\dot p(t),$$

тогда из (25) имеем

$$\psi(t) = -\dot p(t). \tag{27}$$

Если на растущей поверхности $r = R_1$ задано внутреннее давление $p_i(t)$, т.е.

$$\dot\sigma_{rr}(R_1) = -\dot p_i(t),$$

то с учетом (27) получаем

$$-\dot p_i(t) = -\int\limits_{R_1}^{r^*(t)} [2\int\limits_{R_1}^{r} \dot\chi(r,t)r^3 dr]\frac{dr}{r^4} - c(t)R_1^4\int\limits_{R_1}^{r^*(t)} \frac{dr}{r^4} - \dot p(t),$$

откуда следует

$$c(t) = \frac{3r^{*3}}{R_1(r^{*3} - R_1^3)}[\dot p_i(t)\dot p(t) - 2\int\limits_{R_1}^{r^*(t)} [\int\limits_{R_1}^{r} \dot\chi(r,t)r^3 dr]\frac{dr}{r^4}]. \tag{28}$$

Используя (27), (28) получаем окончательное выражение для $\dot\sigma_r(r,t)$:

$$\dot\sigma_{rr}(r,t) = -\dot p(t)\frac{r^{*3}(r^3 - R_1^3)}{r^3(r^{*3} - R_1^3)} - \frac{R_1^3(r^3 - R_1^3)}{r^3(r^{*3} - R_1^3)}[\dot p_i(t)-$$

$$-2\int\limits_{R_1}^{r^*(t)}[\int\limits_{R_1}^{r}\dot{\chi}(r,t)r^3dr]\frac{dr}{r^4}]-2\int\limits_{r}^{r^*(t)}[\int\limits_{R_1}^{r}\dot{\chi}(r,t)r^3dr]\frac{dr}{r^4}. \qquad (29)$$

Для нахождения $\dot{\sigma}_{tt}(r,t)$ воспользуемся (24).

Из (29) имеем

$$\frac{\partial\dot{\sigma}_{rr}}{\partial r}=-\dot{p}(t)\frac{r^{*3}}{r^{*3}-R_1^3}\frac{3r^2R_1^3}{r^6}-\frac{R_1^3}{r^{*3}-R_1^3}(-\frac{3r^2r^{*3}}{r^6})[\dot{p}_i(t)-$$

$$-2\int\limits_{R_1}^{r^*(t)}[\int\limits_{R_1}^{r}\dot{\chi}(r,t)r^3dr]\frac{dr}{r^4}]+\frac{2}{r^4}\int\limits_{R_1}^{r}\dot{\chi}(r,t)r^3dr=$$

$$=-3\dot{p}(t)\frac{r^{*3}R_1^3}{r^4(r^{*3}-R_1^3)}+\frac{3R_1^3r^{*3}}{r^4(r^{*3}-R_1^3)}[\dot{p}_i(t)-$$

$$-2\int\limits_{R_1}^{r^*(t)}[\int\limits_{R_1}^{r}\dot{\chi}(r,t)r^3dr]\frac{dr}{r^4}]+\frac{2}{r^4}\int\limits_{R_1}^{r}\dot{\chi}(r,t)r^3dr. \qquad (30)$$

Подставим (23) и (30) в (24)

$$\dot{\sigma}_{tt}=-\dot{p}(t)[\frac{r^{*3}(r^3-R_1^3)}{r^3(r^{*3}-R_1^3)}+\frac{3}{2}\frac{R_1^3r^{*3}}{r^3(r^{*3}-R_1^3)}]-\frac{R_1^3}{r^3(r^{*3}-R_1^3)}[\dot{p}_i(t)-$$

$$-2\int\limits_{R_1}^{r^*(t)}[\int\limits_{R_1}^{r}\dot{\chi}(r,t)r^3dr]\frac{dr}{r^4}](r^{*3}-R^3-\frac{3}{2}r^{*3})-2\int\limits_{r}^{r^*(t)}[\int\limits_{R_1}^{r}\dot{\chi}(r,t)r^3dr]\frac{dr}{r^4}+$$

$$+\frac{1}{r^3}\int\limits_{R_1}^{r}\dot{\chi}(r,t)r^3dr=$$

$$=-\frac{\dot{p}(t)r^{*3}(2r^3+R_1^3)}{2r^3(r^{*3}-R_1^3)}+\frac{R_1^3(2r^3+r^{*3})}{2r^3(r^{*3}-R_1^3)}[\dot{p}_i(t)-$$

$$-2\int\limits_{R_1}^{r^*(t)}[\int\limits_{R_1}^{r}\dot{\chi}(r,t)r^3dr]\frac{dr}{r^4}]-2\int\limits_{r^*(t)}^{r}[\int\limits_{R_1}^{r}\dot{\chi}(r,t)r^3dr]\frac{dr}{r^4}+$$

$$+\frac{1}{r^3}\int\limits_{R_1}^{r}\dot{\chi}(r,t)r^3dr. \qquad (31)$$

Выражения (30) и (31) дают возможность нахождения радиальной и трансверсальной компонент напряжения в явном виде. При этом, так же, как для объемного режима, необходимо использовать макрокинетическую модель совмещенного процесса для определения температуры, глубины полимеризации и кристаллизации в ходе процесса отверждения [1,4].

Литература

1. **Беляева Н.А., Клычников Л.В. и др.** Напряженное состояние при формировании цилиндрического изделия в ходе параллельного протекания реакций полимеризации и кристаллизации //*Механика композитных материалов. 1991. 6. С. 1091-1099.*
2. **Беляева Н.А., Клычников Л.В.** Метод интегрального уравнения в задаче объемного отверждения//*Вестник Сыктывкарского университета. Сер.1. Вып.2. 1996. С. 125-134.*
3. **Работнов Ю.Н.** Элементы наследственной механики твердых тел. *М.: Наука, 1977. 383 с.*
4. **Беляева Н.А., Титова Н.Н., Юркина Е.А.** Модель фронтального отверждения цилиндрического изделия с точки зрения механики непрерывно наращиваемого твердого тела//*Тр./Сыктывкарский лесной институт. Т.1. 1997. С.44-52.*
5. **Арутюнян Н.Х., Дроздов А.Д., Наумов В.Э.** Механика растущих вязко-упруго-пластических тел. *М.: Наука, 1987. 471 с.*

Summary

Belyaeva N.A., Parshukova N.N. A thermoviscoelastic model of a spherical product hardening

A method for determining the stress state of a spherical product during the process of its hardening (polymerization) is suggested. A system of integro-differential equations for both normal and shear stress compoments is obtained in the case of thermal viscoelastic hardening, proceeding in the bulk phase. The case of surface phase hardening is considered in terms of mechanics of continuously expanding solid, and the above stress components are found here explicitly.

Сыктывкарский университет

Поступила 30.09.2000