Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1.Вып.4.2001

УДК 681.511.4

Однотактовые колебания в линейных интегральных широтно-импульсных системах управления

Н.А.Антонова

Получены необходимые и достаточные условия для существования и нестабильности периодических колебаний с одним импульсом на периоде в системах управления с линейным интегральным широтно-импульсным модулятором.

В данной работе исследуется задача существования и устойчивости периодических колебаний в линейных интегральных широтно - импульсных системах управления с модуляцией переднего либо заднего фронта импульса и постоянным внешним возмущением. Эта задача решалась в [1], где были получены достаточные условия существования и устойчивости вынужденных периодических колебаний с произвольным числом импульсов на периоде. Но эти условия мало зависят от свойств широтно - импульсных модуляторов, практически неэффективны для систем первого порядка и, следовательно, далеки от необходимых. В данной работе для одномерных систем управления приводится аналитическое описание областей в пространстве параметров системы, где существуют как устойчивые, так и неустойчивые периодические колебания с одним импульсом на периоде.

1. Описание системы.

Одномерная линейная интегральная широтно-импульсная система управления описывается уравнением вида

$$T_1\frac{dU}{dt} + U = \varphi, \quad \sigma = \psi - U. \tag{1}$$

Здесь T_1 – положительная постоянная времени управляемого объекта, U – состояние системы управления, φ – сигнал на выходе импульсного элемента, σ – ошибка управления объектом, ω – постоянное внешнее воздействие на систему. Рассматриваются следующие виды широтно-импульсного управления:

а) В случае модуляции переднего фронта импульса в линейном интегральном широтно-импульсном модуляторе (ЛИШИМ-I) выход φ модулятора определяется как кусочно-постоянная функция вида

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0, & nT < t \le nT + \nu_n \\ \lambda_n, & nT + \nu_n < t \le (n+1)T, (n = 0, 1, 2, \ldots). \end{cases} \tag{2}$$

Здесь $T > 0$, а величины ν_n, λ_n находятся следующим образом. Если $|\sigma(nT)| < \frac{\Delta}{T}$, то ν_n будет первым положительным корнем уравнения

$$|\int_0^{\nu} \sigma(nT+t)dt| = \frac{\Delta}{T}\nu(1 - \frac{\nu}{T}) \tag{3}$$

и

$$\lambda_n = \operatorname{sign} \int_0^{\nu_n} \sigma(nT+t)dt. \tag{4}$$

в противном случае $\nu_n = 0$ и $\lambda_n = \operatorname{sign}\sigma(nT)$.

б) В случае модуляции заднего фронта импульса в линейном интегральном широтно-импульсном модуляторе (ЛИШИМ-II) выход φ модулятора имеет вид

$$\varphi(t) = \begin{cases} \lambda_n, & nT < t \le nT + \nu_n \\ 0, & nT + \nu_n < t \le (n+1)T, (n = 0, 1, 2, \ldots). \end{cases} \tag{5}$$

Здесь

$$\lambda_n = \operatorname{sign}\sigma(nT). \tag{6}$$

Величина ν_n определяется по следующему правилу. Если $\sigma(nT) \ne 0$, то ν_n вычисляется как минимальный на $(0, T)$ корень уравнения

$$|\int_0^{\nu} \sigma(nT+t)dt| = \Delta(\frac{\nu}{T})^2, \tag{7}$$

если такого корня нет, то полагают $\nu_n = T$. Если $\sigma(nT) = 0$, то $\nu_n = 0$.

Введем в рассмотрение величину $\alpha = \frac{T}{T_1}$ – параметр, связывающий характеристики непрерывной линейной части системы и импульсного элемента.

2. Формулировка результатов.

Будем исследовать $T-$ периодические решения уравнения (1), для которых

$$\sigma(t+T)=\sigma(t) \qquad \text{для всех } t\geq 0, \tag{8}$$

$$\varphi(t+T)=\varphi(t) \qquad \text{для всех } t\geq 0. \tag{9}$$

Среди периодических решений выделим тривиальные периодические колебания, для которых

$$\varphi(t)\equiv const, \quad \text{для всех } t>0, \tag{10}$$

т.е. колебания с насыщенными импульсами, и простейшие нетривиальные колебания, для которых

$$\varphi(t)\neq const, \quad \text{для всех } t>0, \tag{11}$$

т.е. колебания с ненасыщенными импульсами.
Нас будут интересовать условия на параметры системы T,α,ψ,Δ, при которых искомые колебания реализуются.

Для одномерных систем управления с модуляцией переднего фронта импульса в линейном интегральном широтно-импульсном модуляторе справедлива следующая теорема.

Теорема 1 (ЛИШИМ-I). 1. *Тривиальное $T-$периодическое колебание существует тогда и только тогда, когда*

$$|\psi|\geq\frac{\Delta}{T}+1. \tag{12}$$

2. *Простейшее нетривиальное $T-$периодическое колебание существует тогда и только тогда, когда точка $(\psi;\frac{\Delta}{T})$ является внутренней точкой области, ограниченной линиями*

$$|\psi|=\frac{\Delta}{T}+1, \qquad |\psi|=0, \tag{13}$$

и кривой, заданной в параметрическом виде,

$$|\psi|=(1-\tau)\frac{e^{\alpha}-\xi}{e^{\alpha}-1}, \quad \frac{\Delta}{T}=\tau\frac{e^{\alpha}-\xi}{e^{\alpha}-1}, \quad 0<\tau<1, \tag{14}$$

где ξ - корень уравнения

$$(1-2\tau+\frac{\tau}{\alpha}\ln\xi)\ln\xi=1-\frac{1}{\xi}, \quad \xi>1, \tag{15}$$

В случае одномерных систем управления с модуляцией заднего фронта импульса в линейном интегральном широтно-импульсном модуляторе имеет место следующее утверждение.

Теорема 2 (ЛИШИМ-II).

1. *Тривиальное T–периодическое колебание существует тогда и только тогда, когда*

$$|\psi| \geq \frac{\Delta}{T} + 1. \tag{16}$$

2. *Простейшее нетривиальное T–периодическое колебание существует тогда и только тогда, когда*

$$|\psi| < \frac{\Delta}{T} + 1. \tag{17}$$

Теперь сформулируем условия устойчивости T–периодических колебаний одномерных систем управления с модуляцией переднего либо заднего фронтов импульса в линейном интегральном широтно-импульсном модуляторе.

Пусть x_1 - корень на $(0;\alpha)$ уравнения

$$\frac{e^{\alpha-x}-1}{e^{\alpha}-1} = |\psi| - \frac{\Delta}{T} + \frac{\Delta}{\alpha T}x. \tag{18}$$

а x_2 - корень на $(0;\alpha)$ уравнения

$$\frac{e^{\alpha-x}-1}{e^{\alpha}-1} = \frac{\alpha}{e^{\alpha}-1}(|\psi| - \frac{\Delta}{T} + \frac{\Delta}{\alpha T}x). \tag{19}$$

Теорема 3 (ЛИШИМ-I).

1. *Тривиальное T–периодическое колебание устойчиво.*

2. *Простейшее нетривиальное T–периодическое колебание устойчиво, если выполняется условие*

$$\frac{e^{x_2}-1}{e^{\alpha}+1} \leq \frac{\Delta}{\alpha T}x_1 + (|\psi| - \frac{\Delta}{T} + \frac{\Delta}{\alpha T}x_1)(1 - \frac{x_1}{e^{x_1}-1}). \tag{20}$$

Простейшее нетривиальное T–периодическое колебание неустойчиво, если справедливо неравенство

$$\frac{e^{x_1}-1}{e^{\alpha}+1} \geq \frac{\Delta}{\alpha T}x_2 + (|\psi| - \frac{\Delta}{T} + \frac{\Delta}{\alpha T}x_2)(1 - \frac{x_2}{e^{x_2}-1}), \tag{21}$$

где x_1 и x_2 - решения уравнений (18) и (19) соответственно.

Пусть x_1 - корнь на $(0;\alpha)$ уравнения

$$\frac{e^{\alpha-x}-1}{e^{\alpha}-1}=1-|\psi|+\frac{\Delta}{\alpha T}x, \tag{22}$$

а x_2 - корнь на $(0;\alpha)$ уравнения

$$\frac{e^{\alpha-x}-1}{e^{\alpha}-1}=\frac{\alpha}{e^{\alpha}-1}(1-|\psi|+\frac{\Delta}{\alpha T}x). \tag{23}$$

Теорема 4 (ЛИШИМ-II).

1. *Тривиальное T−периодическое колебание устойчиво.*

2. *Простейшее нетривиальное T−периодическое колебание устойчиво, если выполняется неравенство*

$$\frac{e^{x_2}-1}{e^{\alpha}+1}\le\frac{\Delta}{\alpha T}x_1+(1-|\psi|+\frac{\Delta}{\alpha T}x_1)(1-\frac{x_1}{e^{x_1}-1}). \tag{24}$$

Простейшее нетривиальное T−периодическое колебание неустойчиво, если справедливо неравенство

$$\frac{e^{x_1}-1}{e^{\alpha}+1}\ge\frac{\Delta}{\alpha T}x_2+(1-|\psi|+\frac{\Delta}{\alpha T}x_2)(1-\frac{x_2}{e^{x_2}-1}), \tag{25}$$

где x_1 и x_2 - решения уравнений (22) и (23) соответственно.

3. Доказательства

3.1. Доказательство теоремы 1. Введем обозначения $u_n=u(nT)$, $\sigma_n=\sigma(nT)=\psi-u_n$. Для систем с ЛИШИМ-I решение уравнения (1) с функцией $\varphi(t)$, определяемой (2), примет вид

$$\sigma(nT+t)=\begin{cases}\psi+(\sigma_n-\psi)e^{-\alpha t/T}, & \text{если } t\in[0,\nu_n],\\ \psi+(\sigma_n-\psi)e^{-\alpha t/T}-\lambda_n[1-e^{-\alpha(t-\nu)/T}], & \text{если } t\in(\nu_n,T].\end{cases} \tag{26}$$

Очевидна формула для одномерного отображения [2]

$$\sigma_{n+1}=f(\sigma_n),\quad f(\sigma_n)=\psi+(\sigma_n-\psi)e^{-\alpha}-\lambda[1-e^{-\alpha(1-\nu_n/T)}]. \tag{27}$$

Вычисляем

$$\int_0^{\nu}\sigma(nT+t)dt=\nu\psi+\frac{T}{\alpha}(\sigma_n-\psi)(1-e^{-\alpha\nu/T}).$$

Величина ν_n в соответствии с (3) определяется следующим правилом. Если $|\sigma_n|<\frac{\Delta}{T}$, то ν_n - первый положительный корень уравнения

$$|\nu\psi+\frac{T}{\alpha}(\sigma_n-\psi)(1-e^{-\alpha\nu/T})|=\frac{\Delta}{T}\nu(1-\frac{\nu}{T}), \tag{28}$$

и из (4)

$$\lambda_n = \mathrm{sign}[\nu_n\psi + \frac{T}{\alpha}(\sigma_n - \psi)(1 - \mathrm{e}^{-\alpha\nu_n/T})].$$

Если $|\sigma_n| \geq \frac{\Delta}{T}$, то $\nu_n = 0$ и $\lambda_n = \mathrm{sign}\sigma_n$.

T–периодическим колебаниям исследуемой системы с ЛИШИМ-I будут соответствовать неподвижные точки точечного отображения (27), т.е. решения уравнения $\sigma_* = f(\sigma_*)$, или в развернутой записи

$$\sigma_* = \sigma_*\mathrm{e}^{-\alpha} + \psi(1 - \mathrm{e}^{-\alpha}) - \lambda(1 - \mathrm{e}^{-\alpha(1-\nu_*/T)}).$$

После некоторых преобразований это уравнение сводится к виду

$$\sigma_* = \psi - \lambda\frac{\mathrm{e}^{\alpha} - \mathrm{e}^{\alpha\nu_*/T}}{\mathrm{e}^{\alpha} - 1}. \tag{29}$$

Величина ν_* является ненулевым решением уравнения

$$|\nu_*\psi + \frac{T}{\alpha}(\sigma_* - \psi)(1 - \mathrm{e}^{-\alpha\nu_*/T})| = \frac{\Delta}{T}\nu_*(1 - \frac{\nu_*}{T}), \tag{30}$$

и λ принимает значение

$$\lambda = \mathrm{sign}[\nu_*\psi + \frac{T}{\alpha}(\sigma_* - \psi)(1 - \mathrm{e}^{-\alpha\nu_*/T})]. \tag{31}$$

В случае тривиального T–периодического колебания $|\sigma_*| \geq \frac{\Delta}{T}$, $\nu_* = 0, \lambda = \mathrm{sign}\sigma_*$. Тогда для начального значения $\sigma_* = \psi - \lambda$ при всех n будем иметь $\sigma_{n+1} = \sigma_n$. Так как $|\sigma_*| = \lambda\sigma_* = \lambda\psi - 1$, необходимым и достаточным условием существования тривиального T–периодического колебания будет требование $\lambda\psi - 1 \geq \frac{\Delta}{T}$, которое равносильно неравенству (12).

В случае простейшего нетривиального T–периодического колебания подставим (29) в уравнение (30) и, учитывая (31), получим уравнение

$$\frac{\mathrm{e}^{\alpha} - \mathrm{e}^{\alpha\nu_*/T}}{\mathrm{e}^{\alpha} - 1}\frac{1 - \mathrm{e}^{-\alpha\nu_*/T}}{\alpha\nu_*/T} - |\psi| = \frac{\Delta}{T}(\frac{\nu_*}{T} - 1). \tag{32}$$

Здесь в левой части уравнения стоит монотонно убывающая функция ν_*, а в правой монотонно возрастающая. Следовательно, уравнение имеет единственное решение $\nu_* \in (0, T)$ в том и только том случае, когда $|\psi|(1 - |\psi| + \frac{\Delta}{T}) > 0$, т.е. $0 < |\psi| < 1 + \frac{\Delta}{T}$. Границами этой области являются линии (13).

На простейшем нетривиальном колебании $|\sigma_*| < \frac{\Delta}{T}$ и ν_* должно быть первым положительным корнем уравнения (28), поэтому необходимо проверить выполнение неравенств

$$\left|\frac{e^\alpha - e^{\alpha\nu_*/T}}{e^\alpha - 1} - |\psi|\right| < \frac{\Delta}{T}, \tag{33}$$

$$\left|\frac{e^\alpha - e^{\alpha\nu_*/T}}{e^\alpha - 1}\frac{1 - e^{-\alpha\nu/T}}{\alpha\nu/T} - |\psi|\right| < \frac{\Delta}{T}(\frac{\nu}{T} - 1) \tag{34}$$

для всех $\nu \in (0, \nu_*)$.

Анализ неравенств (33) и (34) с учетом уравнения (32) позволяет заключить, что эти неравенства равносильны условию

$$\frac{e^\alpha - e^{\alpha\nu_*/T}}{e^\alpha - 1} - |\psi| < \frac{\Delta}{T}. \tag{35}$$

Уравнение (32) и неравенство (35) перепишем в виде

$$\frac{e^\alpha - e^{\alpha\nu_*/T}}{e^\alpha - 1} = \frac{\alpha\nu_*/T}{1 - e^{-\alpha\nu_*/T}}(|\psi| - \frac{\Delta}{T} + \frac{\Delta\nu_*}{T^2}),$$

$$\frac{e^\alpha - e^{\alpha\nu_*/T}}{e^\alpha - 1} < |\psi| + \frac{\Delta}{T}.$$

Правая часть уравнения монотонно возрастающая функция от ν_*. Поэтому существует единственный корень уравнения

$$\frac{\alpha\nu/T}{1 - e^{-\alpha\nu/T}}(|\psi| - \frac{\Delta}{T} + \frac{\Delta\nu}{T^2}) = |\psi| + \frac{\Delta}{T}.$$

Обозначим этот корень κ. Тогда неравенство

$$\frac{e^\alpha - e^{\alpha\kappa/T}}{e^\alpha - 1} < |\psi| + \frac{\Delta}{T} \tag{36}$$

необходимо и достаточно для выполнения (35), где ν_* - решение (32).

Если ввести $\xi = e^{\alpha\kappa/T}$, то ξ будет корнем уравнения

$$\frac{\ln\xi}{1 - 1/\xi}(|\psi| - \frac{\Delta}{T} + \frac{\Delta}{\alpha T}\ln\xi) = |\psi| + \frac{\Delta}{T}.$$

Введение параметра $\tau = \frac{\Delta/T}{|\psi| + \Delta/T}$ позволяет последнее уравнение свести к виду

$$(1 - 2\tau + \frac{\tau}{\alpha}\ln\xi)\ln\xi = 1 - \frac{1}{\xi}, \xi > 1. \tag{37}$$

Следовательно, границей области (36) будет линия, параметрические уравнения которой

$$|\psi| = (1-\tau)\frac{e^{\alpha}-\xi}{e^{\alpha}-1}, \quad \frac{\Delta}{T} = \tau\frac{e^{\alpha}-\xi}{e^{\alpha}-1}, \quad \tau \in (0,1),$$

где ξ - корень уравнения (37). Это совпадает с (14) и (15). Теорема 1 доказана.

3.2. Доказательство теоремы 2. Для систем с ЛИШИМ-II решение уравнения (1) с функцией $\varphi(t)$, определяемой (2), примет вид

$$\sigma(nT+t) = \begin{cases} \psi + (\sigma_n - \psi)e^{-\alpha t/T} - \lambda_n[1 - e^{-\alpha t/T}, & \text{если } t \in [0, \nu_n], \\ \psi + (\sigma_n - \psi)e^{-\alpha t/T} - \lambda_n[e^{-\alpha(t-\nu)/T} - e^{-\alpha t/T}], & \text{если } t \in (\nu_n, T]. \end{cases} \tag{38}$$

Значение λ_n определяется по формулам: $\lambda_n = \operatorname{sign}\sigma_n$, если $\sigma_n \neq 0$, $\lambda_n = 0$, если $\sigma_n = 0$.

Вычисляем

$$\int_0^{\nu} \sigma(nT+t)dt = \nu(\psi - \lambda_n) + \frac{T}{\alpha}(\sigma_n - \psi + \lambda_n)(1 - e^{-\alpha\nu)/T}).$$

Выводим формулу для одномерного отображения [2]

$$\sigma_{n+1} = f(\sigma_n), \;\; f(\sigma_n) = \psi + (\sigma_n - \psi)e^{-\alpha} - \lambda_n e^{-\alpha}(e^{\alpha\nu_n/T} - 1). \tag{39}$$

Величина ν_n в соответствии с (7) определяется следующим правилом. Если $|\sigma_n| = 0$, то $\nu_n = 0$. Если $|\sigma_n| > 0$, то ν_n - минимальный на $(0;T)$ корень уравнения

$$|\nu(\psi - \lambda_n) + \frac{T}{\alpha}(\sigma_n - \psi + \lambda_n)(1 - e^{-\alpha\nu/T})| = \frac{\Delta\nu^2}{T^2}. \tag{40}$$

В случае отсутствия корня полагаем $\nu_n = T$.

T—периодическим колебаниям исследуемой системы с ЛИШИМ-II будут соответствовать неподвижные точки точечного отображения (39), т.е. решения уравнения $\sigma_* = f(\sigma_*)$, или после преобразований

$$\sigma_* = \psi - \lambda\frac{e^{\alpha\nu_*/T} - 1}{e^{\alpha} - 1}. \tag{41}$$

Величина $\lambda = \operatorname{sign}\sigma_*$, а ν_* является ненулевым решением уравнения

$$|\nu(\psi - \lambda) + \frac{T}{\alpha}(1 - e^{-\alpha\nu/T})(\lambda - \lambda\frac{e^{\alpha\nu_*/T} - 1}{e^{\alpha} - 1})| = \frac{\Delta\nu^2}{T^2}. \tag{42}$$

Для тривиального T-периодического колебания $\nu_n = T$ для всех n и $\sigma_* = \psi - \lambda$. Поэтому уравнение (42) упрощается к виду

$$|\nu(\psi - \lambda)| = \frac{\Delta\nu^2}{T^2}.$$

Поскольку $|\sigma_*| = \lambda\psi - 1$, то $\lambda\psi - 1 > 0$ и $\lambda\psi = |\psi|$. Следовательно, необходимым и достаточным условием отсутствия корня последнего уравнения на $(0, T)$ является требование $|\psi| - 1 \geq \frac{\Delta}{T}$, т.е. неравенство (16).

В случае простейшего нетривиального T-периодического колебания из (42) получим уравнение

$$\left|(|\psi| - 1) + \frac{1 - e^{-\alpha\nu)/T}}{\alpha\nu)/T} \frac{e^{\alpha} - e^{\alpha\nu_*/T}}{e^{\alpha} - 1}\right| = \frac{\Delta\nu}{T^2}. \tag{43}$$

В правой части этого уравнения стоит монотонно убывающая по аргументу ν функция. Поэтому $\nu = \nu_*$ единственный корень уравнения, если он существует. А существование этого корня определяется уравнением

$$(|\psi| - 1) + \frac{1 - e^{-\alpha\nu_*)/T}}{\alpha\nu_*/T} \frac{e^{\alpha} - e^{\alpha\nu_*/T}}{e^{\alpha} - 1} = \frac{\Delta\nu*}{T^2}. \tag{44}$$

Левая часть уравнения функция монотонно убывающая, а правая часть - монотонно возрастающая функция. Поэтому необходимым и достаточным условием разрешимости уравнения на $(0, T)$ является неравенство $|\psi| - 1 < \frac{\Delta}{T}$, которое совпадает с (17). Теорема 2 доказана.

3.3. Доказательство теоремы 3. Для доказательства устойчивости искомого колебания достаточно показать устойчивость неподвижной точки σ_*. Для этого следует проверить неравенство $|df/d\sigma| < 1$ для $\sigma = \sigma_*$, где $f(\sigma)$ из (27). В случае тривиального T-периодического колебания $\|df/d\sigma| = e^{-\alpha} < 1$. Поэтому тривиальное T-периодическое колебание устойчиво.

Для простейшего нетривиального T-периодического колебания вычислим

$$\frac{df}{d\sigma} = e^{-\alpha} + \lambda\frac{\alpha}{T}e^{-\alpha(1-\frac{\nu_*}{T})}\frac{d\nu}{d\sigma}. \tag{45}$$

Обозначим $\nu' = \frac{d\nu}{d\sigma}$. Дифференцируя (28), получаем

$$\nu'\psi + \frac{T}{\alpha}(1 - e^{-\alpha\nu_*/T}) + (\sigma_* - \psi)e^{-\alpha\nu_*/T}\nu' = \lambda\frac{\Delta}{T}(1 - \frac{2\nu_*}{T})\nu'. \tag{46}$$

Отсюда находим ν' и подставляем его в (45), получаем неравенство

$$e^{-\alpha}\left|1-\frac{e^{\alpha\nu_*/T}-1}{\lambda\psi-e^{-\alpha\nu_*/T}\frac{e^{\alpha}-e^{\alpha\nu_*/T}}{e^{\alpha}-1}-\frac{\Delta}{T}(1-\frac{2\nu_*}{T})}\right|<1.$$

Так как ν_* является решением уравнения (32) и $\lambda\psi=|\psi|$, несложные преобразования приводят к неравенству

$$1-e^{\alpha}<\frac{e^{\alpha\nu_*/T}-1}{|\psi|-\frac{\Delta}{T}+\frac{2\Delta\nu_*}{T}-\frac{\alpha\nu_*/T}{e^{\alpha\nu_*/T}-1}(|\psi|-\frac{\Delta}{T}+\frac{\Delta\nu_*}{T})}<e^{\alpha}+1.$$

В силу уравнения (32) знаменатель последней дроби оценивается снизу величиной

$$(|\psi|-\frac{\Delta}{T}+\frac{\Delta\nu_*}{T})(1-\frac{\alpha\nu_*/T}{e^{\alpha\nu_*/T}-1})+\frac{\Delta\nu_*}{T}>\frac{\Delta\nu_*}{T}.$$

Следовательно, условие устойчивости сводится к проверке неравенства

$$\frac{e^{x}-1}{e^{\alpha}+1}<\frac{\Delta x}{\alpha T}+(|\psi|-\frac{\Delta}{T}+\frac{\Delta x}{\alpha T})(1-\frac{x}{e^{x}-1}), \tag{47}$$

в котором используется обозначение $x=\alpha\nu_*/T$. Уравнение (32) перепишем в виде

$$\frac{e^{\alpha-x}-1}{e^{\alpha}-1}=\frac{x}{e^{x}-1}(|\psi|-\frac{\Delta}{T}+\frac{\Delta}{\alpha T}x).$$

Легко заметить, что величины x_1 и x_2, корни уравнений (18) и (19) соответственно, являются нижней и верхней оценками корня x последнего уравнения. Так как левая и правая части неравенства (47) монотоно растут по x, требование (20) является достаточным условием для выполнения (47) в точке x, т.е.условием устойчивости исследуемого колебания.

Доказательство неустойчивости нетривиального T–периодического колебания проводится аналогичными рассуждениями, только знак неравенства нужно сменить на противоположный. Мы получим, что требование $|df/d\sigma|>1$ *для* $\sigma=\sigma_*$ обеспечивается условием *(21). Теорема* 3 доказана.

3.4. Доказательство теоремы 4. В случае тривиального колебания $|df/\sigma|=e^{-\alpha}<1$. Поэтому тривиальное T–периодическое колебание устойчиво.

Для простейшего нетривиального T–периодического колебания вычислим из (39)

$$\frac{df}{d\sigma}=e^{-\alpha}(1-\lambda\frac{\alpha}{T}e^{\alpha\nu_*/T}\frac{d\nu}{d\sigma}). \tag{48}$$

Обозначим $\nu' = \frac{d\nu}{d\sigma}$. Дифференцируя (40), получаем

$$\nu'(\psi - \lambda) + e^{-\alpha\nu_*/T}(\sigma_* - \psi + \lambda)\nu' + \frac{T}{\alpha}(1 - e^{-\alpha\nu_*/T}) = \lambda\frac{2\Delta\nu_*}{T^2}\nu'. \quad (49)$$

Отсюда находим ν' и подставляем его в (48), получаем неравенство

$$e^{-\alpha}\left|1 - \frac{e^{\alpha\nu_*/T} - 1}{1 - \lambda\psi + \frac{2\Delta\nu_*}{T^2} - e^{-\alpha\nu_*/T}\frac{e^{\alpha} - e^{\alpha\nu_*/T}}{e^{\alpha}-1}}\right| < 1.$$

Обозначение $x = \alpha\nu_*/T$ и несложные преобразования приводят к неравенству

$$1 - e^{\alpha} < \frac{e^{\alpha\nu_*/T} - 1}{\frac{2\Delta\nu_*}{T^2} - |\psi| + \frac{e^{\alpha} - e^{\alpha - x}}{e^{\alpha}-1}} < e^{\alpha} + 1.$$

Использование уравнения (43) позволяет переписать это неравенство в равносильном виде

$$\frac{e^x - 1}{e^{\alpha} + 1} < \frac{\Delta x}{\alpha T} + (1 - |\psi| + \frac{\Delta x}{\alpha T})(1 - \frac{x}{e^x - 1}). \quad (50)$$

Уравнение (44) запишем в виде

$$\frac{e^{\alpha - x} - 1}{e^{\alpha} - 1} = \frac{x}{e^x - 1}(1 - |\psi| + \frac{\Delta}{\alpha T}x).$$

Величины x_1 и x_2, корни уравнений (22) и (23) соответственно, являются нижней и верхней оценками корня x последнего уравнения. Так как левая и правая части неравенства (50) монотоно растут по x, то требование (24) является достаточным условием для выполнения (50) в точке x, т.е. условием устойчивости исследуемого колебания.

Доказательство неустойчивости нетривиального T−периодического колебания проводится аналогичными рассуждениями, только знак неравенства нужно сменить на противоположный. Мы получим, что требование $|df/d\sigma| > 1$ для $\sigma = \sigma_*$ обеспечивается условием (25). Теорема 4 доказана.

4. Обсуждение результата.

Доказанные теоремы дают разбиение области параметров α, T, Δ, ψ одномерной линейной интегральной широтно-импульсной системы управления на области, в которых возможны устойчивые либо неустойчивые T−периодические колебания, и области, где таких колебаний нет.

В теоремах 1 и 2 приводится аналитическое описание областей существования однотактовых колебаний. Оказывается, что в системах с ЛИШИМ-I есть область в пространстве параметров системы, в которой $T-$ периодические колебания отсутствуют. В системах с ЛИШИМ-II подобное явление не наблюдается. В теоремах 3 и 4 сформулированы достаточные условия устойчивости и неустойчивости простейших нетривиальных $T-$периодических колебаний. При малых значениях параметра α эти условия близки к необходимым. В основе доказательства теорем лежит метод точечных отображений [2]. Нетривиальным колебаниям периода T исследуемой системы управления будут соответствовать неподвижные точки точечного отображения прямой в прямую. Поэтому вопросы существования неподвижных точек этого отображения, их устойчивость либо неустойчивость определяют динамику решений изучаемой системы: существование устойчивой неподвижной точки будет соответствовать устойчивому $T-$периодическому колебанию, т.е. порядку, а существование неустойчивой неподвижной точки будет соответствовать неустойчивому колебанию, т.е. возможному детерминированному хаосу. Зоны существования устойчивых либо неустойчивых периодических колебаний легко строятся с помощью вычислительной техники, так как условия (14)-(15) и (18)-(23) предполагают необходимость решения неявных уравнений от одной переменной.

Литература

1. Гелиг А.Х., Чурилов А.Н. Колебания и устойчивость нелинейных импульсных систем. СПб: изд-во СПбГУ, 1993. 268с.

2. Шарковский А.,Н., Коляда С.,Ф., Сивак А.,Г., Федоренко В.,В. Динамика одномерных отображений. Киев: Наук. думка, 1989.

Summary

Antonova N.A. T-periodic modes in linear integral pulse-width modulated control systems

Nesessary and sufficient conditions are obtained for existence and nonstability of T-periodic modes in control systems employing linear integral pulse-width modulation.

Сыктывкарский университет *Поступила 11.10.2000*