Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1.Вып.4.2001

УДК 519.234

Предельные теоремы для вейвлет-статистики от независимых случайных величин [1]

В.А. Юрченко

В статье рассматривается асимптотическое поведение линейных и нелинейных вейвлет-статистик. Получены оценки моментов вейвлет-коэффициентов. Получена центральная предельная теорема для линейных и нелинейных вейвлет-статистик.

Вейвлет-анализ, недавно выделившийся в самостоятельную область математики, стал одним из основных средств представления функций в функциональных пространствах. Основополагающими работами в этой области стали работы [2], [4], [14]. В них авторы развивают теорию построения ортонормальных базисов с заданными свойствами гладкости, которые строятся с помощью сдвигов и растяжений генерирующих функций φ, ψ.

В 90-ые годы появилось множество приложений вейвлет-анализа в теории вероятностей и математической статистике. В большинстве этих приложений аппарат вейвлет-анализа используется для описания поведения случайных величин, процессов через их функциональные характеристики. В этих работах используется как дискретное, так и непрерывное вейвлет-преобразование.

Различными авторами были предложены методы применения вейвлет-анализа в задачах непараметрического оценивания плотности случайной величины, оценивания минимаксного риска, оценивания спектральной плотности и функции регрессии.

[1] Работа частично поддержана грантом РФФИ 99–01–00247 и грантом Министерства образования РФ "Предельные теоремы для квадратичных форм. Изопериметрические задачи."

Задачу непараметрического оценивания плотности случайной величины с помощью вейвлет-анализа впервые рассматривали Kerkyacharian, Picard и Walter в работах [13] и [17]. Авторы рассматривали статистику

$$\hat{f}_{j_1}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{c}_{j_0,k}\varphi_{j_0,k}(x) + \sum_{j=j_0}^{j_1}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{d}_{j,k}\psi_{j,k}(x), \qquad (1)$$

где $\hat{c}_{j_0,k} = 1/n\sum_{i=1}^{n}\varphi_{j_0,k}(X_i)$, $\hat{d}_{j,k} = 1/n\sum_{i=1}^{n}\psi_{j,k}(X_i)$ - эмпирические вейвлет-коэффициенты, $j_1 = j_1(n)$ - уровень аппроксимации. Статистика (1) использовалась для непараметрического оценивания плотности распределения из класса функций Бесова $B^s_{p,p}$, $s > 0, p \geq 1$. Была получена оценка среднеквадратичной ошибки в L^p порядка $n^{-sp/(2s+1)}$. В [18] рассматривались классы плотностей Липшица и плотностей с полиномиальным порядком убывания. Нелинейные вейвлет-оценки рассматривались в работах [5], [6], [9], [12]. В [12] для шара в пространстве Бесова $B^s_{p,q}$ была получена оценка $L^{p'}$-минимаксного риска порядка

$$\left(\frac{\log n}{n}\right)^{(s-1/p+1/p')/(1+2(s-1/p))}, \ s > \frac{1}{p}, \ p' \geq (1+2s)p,$$

были описаны условия оптимальности минимаксного риска для шара в пространстве Бесова, условия оптимальности линейной и нелинейной вейвлет-оценок плотности. В работе Götze [8] исследуется минимаксный риск в предположении негауссовости коэффициентов $\hat{d}_{j,k}$ в (1).

В [15] Neumann исследовал нелинейные вейвлет-оценки спектральной плотности на классах Бесова. Были получены асимптотические свойства эмпирических вейвлет-коэффициентов и оценка L^2-риска спектральной плотности $f \in B^m_{p,q}$, $p \geq 2$ порядка $n^{-2m/(2m+1)}$ при ограничениях на кумулянты. В [3] вейвлет-оценки рассматривались для определения параметров процесса авторегресии. В [16] вейвлет-анализ использовался для оценивания дисперсии локально стационарных процессов по эволюционному вейвлет-спектру.

Задачу регрессии обсуждали Antoniadis [1], Hall и др.[10], [11]. Для оценивания искомой функции f по зашумленным данным $\{Y_i\}$

$$Y_i = f\left(\frac{i}{n}\right) + \varepsilon_i, \ i = 1, ..., n.$$

применяется статистика (1) с эмпирическими коэффициентами

$$\hat{c}_{j_0,k} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i\varphi_{j_0,k}\left(\frac{i}{n}\right), \ \hat{d}_{j,k} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i\psi_{j,k}\left(\frac{i}{n}\right).$$

В то же время при всем многообразии литературы по теме вейвлетов практически отсутствуют работы, в которых рассматриваются задачи, связанные с доказательством предельных теорем для вейвлет-статистик. В нашей статье мы рассматриваем асимптотическое поведение линейных и нелинейных вейвлет-статистик. Была получена предельная теорема для линейных и нелинейных вейвлет-статистик в случае оценивания плотности распределения случайной величины.

Статья разбита на 3 параграфа. В первом параграфе мы формулируем основные результаты. В втором параграфе в виде лемм мы получаем некоторые свойства эмпирических вейвлет-коэффициентов. В третьем параграфе мы получаем центральную предельную теорему для линейных и нелинейных вейвлет-статистик.

1. Формулировка основных результатов

Рассмотрим $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ - вероятностное пространство. Пусть последовательность $X_1, ..., X_n$ - независимых одинаково распределенных случайных величин, заданных на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, принимающих значения в $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$ и имеющих плотность распределения $f(t) \in L^2(\mathbf{R})$.

Рассмотрим пару функций-вейвлетов $\{\varphi, \psi\}$ и определим следующую систему функций

$$\varphi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\varphi(2^j x - k), \ \psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k), \ j, k \in \mathbf{Z}.$$

Будем предполагать также, что система функций $\{\varphi_{j,k}, \psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbf{Z}}$- образует ортонормальный вейвлет-базис.

Для $f(t)$ и для любого фиксированного $j \in \mathbf{Z}$ мы можем записать следующее разложение

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_{j,k}\varphi_{j,k}(x) + \sum_{l=j}^{\infty} \sum_{k \in \mathbf{Z}} d_{l,k}\psi_{l,k}(x), \tag{2}$$

где коэффициенты $c_{j,k}, d_{l,k}$ определяются следующим образом

$$c_{j,k} = < f, \varphi_{j,k} > = \int_{\mathbf{R}} f(x)\varphi_{j,k}(x)dx \ , \tag{3}$$

$$d_{l,k} = < f, \psi_{l,k} > = \int_{\mathbf{R}} f(x)\psi_{l,k}(x)dx \ . \tag{4}$$

Ряды в разложении (2) сходятся в $L^2(\mathbf{R})$. Определим вейвлет-статистику $\hat{f}_{j_1}(t)$ как эмпирическую оценку $f(t)$

$$\hat{f}_{j_1}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{c}_{j_0,k}\varphi_{j_0,k}(x) + \sum_{j=j_0}^{j_1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{d}_{j,k}\psi_{j,k}(x), \tag{5}$$

где $\hat{c}_{j_0,k} = 1/n\sum_{i=1}^{n}\varphi_{j_0,k}(X_i)$, $\hat{d}_{j,k} = 1/n\sum_{i=1}^{n}\psi_{j,k}(X_i)$ - эмпирические вейвлет-коэффициенты, $j_1 = j_1(n)$ - уровень аппроксимации.

Кроме коэффициентов $\hat{d}_{j,k}$ мы будем рассматривать сглаженные версии вейвлет-коэффициентов. Процедура сглаживания "soft-" и "hard-thresholding", введенная в [6] (см. также [5], [12]), позволяет улучшить асимптотические свойства вейвлет-оценки в нерегулярном случае. Далее мы будем рассматривать три случая:

1. $\hat{d}_{j,k}$ - эмпирические вейвлет-коэффициенты,
2. $\hat{d}^{S}_{j,k} = (|\hat{d}_{j,k}| - \lambda)_{+}\mathrm{sign}(\hat{d}_{j,k})$ - сглаженные, посредством процедуры "soft thresholding",
3. $\hat{d}^{H}_{j,k} = \hat{d}_{j,k}\mathrm{I}\{|\hat{d}_{j,k}| > \lambda\}$ - сглаженные, посредством процедуры "hard thresholding".

Статистики с такими вейвлет-коэффициентами будем обозначать, соответсвенно, $\hat{f}_{j_1}(x)$, $\hat{f}^{S}_{j_1}(x)$, $\hat{f}^{H}_{j_1}(x)$.

Нас будут интересовать условия применимости центральной предельной теоремы к последовательностям линейных и нелинейных вейвлет-статистик. Основные результаты представляют следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть $f(t)$ ограничена и существуют функции $F_1 \in L^2$ и $F_2 \in L^1\bigcap L^2\bigcap L^3$, такие, что $F_1(x-y) \le |K(x,y)| \le F_2(x-y)$. Тогда для любого t такого, что $f(t) > 0$*

$$\frac{(\hat{f}_{j_0}(t) - f_{j_0}(t))}{\sqrt{\mathbf{D}\hat{f}_{j_0}(t)}} \to \mathcal{N}(0,1), \quad n \to \infty,$$

где $j_0 = \alpha\log_2 n$, $0 < \alpha < 1$.

Теорема 2. *Пусть $f(t)$ ограничена и существуют функции $F_1 \in L^2$ и $F_2 \in L^1\bigcap L^2\bigcap L^3$, такие, что $F_1(x-y) \le |K(x,y)| \le F_2(x-y)$. Если кроме того $\sum_{j=j_0}^{\infty}\sum_k d^2_{j,k} = O(n^{-\delta})$, $\delta > 0$. Тогда для любого t такого, что $f(t) > 0$*

$$\frac{\hat{f}^{H}_{j_1}(t) - \mathbf{E}\hat{f}^{H}_{j_1}(t)}{\sqrt{\mathbf{D}\hat{f}^{H}_{j_1}(t)}} \to \mathcal{N}(0,1), n \to \infty,$$

сходится по распределению, где $j_0 = \alpha\log_2 n$, $j_1 = \beta\log_2 n$, $0 < \alpha < \beta < 1$, $\beta < 1/2\min(1,\delta)$.

Поведение сумм вида

$$\sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_k d_{j,k}^2, j_0 \to \infty$$

исследовалось во многих работах (см. например [12], [18]). Скорость сходимости к нулю такой суммы напрямую связана с гладкостью функции и свойствами генерирующих вейвлетов φ, ψ.

Теорема 3. *Пусть $f(t)$ ограничена и существуют функции $F_1 \in L^2$ и $F_2 \in L^1 \bigcap L^2 \bigcap L^3$, такие, что $F_1(x-y) \le |K(x,y)| \le F_2(x-y)$. Если кроме того $\sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_k d_{j,k}^2 = O(n^{-\delta})$, $\delta > 0$. Тогда для любого t такого, что $f(t) > 0$*

$$\frac{\hat{f}_{j_1}^S(t) - \mathbf{E}\hat{f}_{j_1}^S(t)}{\sqrt{\mathbf{D}\hat{f}_{j_1}^S(t)}} \to \mathcal{N}(0,1), n \to \infty, \tag{6}$$

сходится по распределению, если $\alpha + \tau' > 1$, где $j_0 = \alpha \log_2 n$, $j_0 = \beta \log_2 n$, $\tau' = 1/2 \min(1 - \alpha + \tau, 2\tau)$, $\tau = g(\beta, \delta, \lambda)$ определяется из верхней оценки дисперсии сглаженных вейвлет-коэффициентов.

Далее и везде мы будем придерживаться следующих обозначений: C - абсолютная константа, $C_f = \sup_t f(t)$,

$$\sum_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty}, \quad \int dx = \int_{\mathbf{R}} dx, \quad \| \xi \|_k = \left(\int \xi^k(t)\, dt \right)^{\frac{1}{k}}, \quad \| \xi \|_\infty = \sup_t |\xi(t)|.$$

2. Предварительные леммы

Далее и везде мы будем предполагать, что выполняются условия:
(A1) X_1 имеет плотность $f(t)$ такую, что $\sup_t f(t) \le C_f < \infty$;
(A2) $\sup_t \varphi(t) \le C_\varphi < \infty$.

Лемма 1. *Для любых фиксированных $j, k \in \mathbf{Z}$ $\hat{c}_{j,k}$ и $\hat{d}_{j,k}$ - несмещенные оценки коэффициентов вейвлет-разложения и являются асимптотически нормальными с дисперсией $\sigma_{j,k}^2/n$, где $\sigma_{j,k}^2 = \mathbf{D}\varphi_{j,k}(X_1)$ и если выполняется (A1), то*

$$\sigma_{j,k}^2 \le C_f, \tag{7}$$

если выполняется (A2), то

$$\sigma_{j,k}^2 \le 2^j C_\varphi^2. \tag{8}$$

Доказательство.

Для любых $j,k\in\mathbf{Z}$ верно

$$\mathbf{E}\hat{c}_{j,k}=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}\mathbf{E}\varphi_{j,k}(X_i)=\int\varphi_{j,k}(y)f(y)\,dy=c_{j,k},$$

$$\mathbf{E}\hat{d}_{j,k}=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}\mathbf{E}\psi_{j,k}(X_i)=\int\psi_{j,k}(y)f(y)\,dy=d_{j,k}.$$

Так как X_i независимы, то

$$\mathbf{D}\hat{c}_{j,k}=\frac{1}{n}\mathbf{E}(\varphi_{j,k}(X_1)-c_{j,k})^2\le\frac{1}{n}\mathbf{E}\varphi^2_{j,k}(X_1).$$

Используя ортонормальность семейства $\{\varphi_{j,k}(t)\}$ и (A1), получаем

$$\mathbf{D}\hat{c}_{j,k}\le\frac{1}{n}\int f(y)\varphi^2_{j,k}(y)\,dy\le\frac{C_f}{n}.$$

В случае выполнения (A2) очевидно

$$\mathbf{D}\hat{c}_{j,k}\le\frac{1}{n}\int f(y)\varphi^2_{j,k}(y)\,dy\le\frac{2^jC^2_\varphi}{n}.$$

Для доказательства асимптотической нормальности воспользуемся теоремой Леви. Проверим выполнение условий теоремы. Фиксируем j и k. Рассмотрим последовательность $Y_{i,j,k}=\varphi_{j,k}(X_i)$, $i=1,\ldots n$. Величины $Y_{i,j,k}$ являются одинаково распределенными и независимыми. Положительность $\sigma_{j,k}=\mathbf{D}\varphi_{j,k}(X_1)$ вытекает из следующих рассуждений. Пусть это не так и $\sigma=0$, тогда

$$\varphi_{j,k}(X_i)=\mathbf{E}\varphi_{j,k}(X_i)=c_{j,k}\quad \text{п.н.}$$

А это выполняется, если X_i - вырожденная случайная величина, что противоречит предположению о существовании плотности распределения X_1. Также очевидно, что для любого целого $l>1$

$$\mathbf{E}|\varphi_{j,k}(X_1)|^l\le 2^{k(l-2)/2}\int|\varphi^{l-2}(2^jy-k)|\varphi^2_{j,k}(y)f(y)\,dy\le 2^{j(l-2)/2}C_\varphi^{l-2}C_f \tag{9}$$

и $|c_{j,k}|\le\|f\|_2$. Последнее неравенство следует из равенства (см. [18])

$$\|f\|_2^2=\sum_k c^2_{j_0,k}+\sum_{j=j_0}^{\infty}\sum_k d^2_{j,k}. \tag{10}$$

Тогда, объединяя (9) и оценку $|c_{j,k}|$, получаем, что

$$\mathbf{E}|Y_{i,j,k} - \mathbf{E}Y_{i,j,k}|^3 \le 2^{\frac{3}{2}j} C_\varphi^3 C_f.$$

Абсолютный третий момент последовательности $Y_{i,j,k}$ конечен, следовательно, выполняются все условия теоремы Леви и

$$\frac{\sqrt{n}(\hat{c}_{j,k} - c_{j,k})}{\sigma_{j,k}} \to N(0,1).$$

Для доказательства асимптотической нормальности $\hat{d}_{j,k}$ заметим, что ψ удовлетворяет уравнению

$$\psi(x) = \sum_k (-1)^k \overline{h}_{1-k} \varphi(2x-k)$$

где $\{h_k\} \in l^2$ и $\sum_k h_k = \sqrt{2}$ (см. [12], с. 43), а это означает, что ψ ограничена. Повторяя выкладки проведенные ранее для $\hat{c}_{j,k}$ получаем, что

$$\frac{\sqrt{n}(\hat{d}_{j,k} - d_{j,k})}{\sigma_{j,k}} \to N(0,1).$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть f и φ - непрерывные функции на* $\mathbf{R}$, *тогда*

$$\mathbf{D}\hat{c}_{j,k} \ge \frac{\inf f(t)}{n},$$

если $N_t = \{t : f(t) > 0\} \bigcap \mathrm{supp}\varphi_{j,k} \ne 0$.

Доказательство.

Для доказательства используем неравенство Рао-Крамера (см. [19], с.206). Фиксируем j,k. Мы оцениваем параметр $c_{j,k} \in [0, \| \ f \ \|_2]$ Пусть $f(t) = f(t, c_{j,k})$. Тогда в силу линейности вейвлет разложения $f'_{c_{j,k}}(t, c_{j,k}) = \varphi_{j,k}(t)$. Информация Фишера в нашем случае представляется в виде

$$I(c_{j,k}) = \int_{N_t} \frac{\varphi_{j,k}^2(t)}{f(t)}\, dt,$$

где подынтегральная функция определена и непрерывна на $N_t = \{t : f(t) > 0\}$. Заметим, что из Леммы 1 $\hat{c}_{j,k}$ несмещенная оценка $c_{j,k}$, следовательно условия неравенства Рао-Крамера выполнены и

$$\mathbf{D}\hat{c}_{j,k} \ge \frac{1}{nI(c_{j,k})}.$$

Оценим значение $I(c_{j,k})$ сверху. В силу нормальности семейства $\{\varphi_{j,k}, \psi_{j,k}\}$, получаем

$$I(c_{j,k}) \le \int \varphi_{j,k}^2(t)\, dt \le \frac{1}{\inf f(t)} \int \varphi_{j,k}^2(t) dt \le \frac{1}{\inf f(t)}. \tag{11}$$

Используем (11) в неравенстве Рао-Крамера, получаем

$$\mathbf{D}\hat{c}_{j,k} \ge \frac{\inf f(t)}{n}.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. $\mathbf{D}\hat{d}_{j,k}^H \le \frac{(2^j C_1 (C_f n^{-1} + d_{j,k}^2))^{1/2}}{n\lambda}$, *где* $C_1 = 4C_\psi^2 C_f^2 + 6C_f^2 + C_\psi^2 C_f$.

Доказательство.

Оценим значение $\mathbf{D}\hat{d}_{j,k}^H$ сверху. Используя неравенство Коши-Буняковского, получаем

$$\mathbf{D}\hat{d}_{j,k}^H \le \mathbf{E}\left(\hat{d}_{j,k} \mathrm{I}\{|\hat{d}_{j,k}| > \lambda\}\right)^2 \le \sqrt{\mathbf{E}\hat{d}_{j,k}^4 \mathbf{P}\left(|\hat{d}_{j,k}| > \lambda\right)}. \tag{12}$$

Используем неравенство Чебышева для оценки $\mathbf{P}\left(|\hat{d}_{j,k}| > \lambda\right)$

$$\mathbf{P}\left(|\hat{d}_{j,k}| > \lambda\right) \le \frac{\mathbf{E}\hat{d}_{j,k}^2}{\lambda^2}. \tag{13}$$

Оценим значение $\mathbf{E}\hat{d}_{j,k}^2$. В силу оценки (7) получаем, что

$$\mathbf{E}\hat{d}_{j,k}^2 \le \frac{C_f}{n} + d_{j,k}^2. \tag{14}$$

Используем оценку (14) в (13). Получаем, что

$$\mathbf{P}\left(|\hat{d}_{j,k}| > \lambda\right) \le \lambda^{-2}\left(\frac{C_f}{n} + d_{j,k}^2\right). \tag{15}$$

Оценим значение $\mathbf{E}\hat{d}_{j,k}^4$. Очевидно равенство

$$\mathbf{E}\hat{d}_{j,k}^4 = \frac{1}{n^4}\Big(\sum_{i=1}^n \mathbf{E}\psi_{j,k}^4(X_i) + 4 \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} \mathbf{E}\psi_{j,k}^3(X_{i_1})\psi_{j,k}(X_{i_2}) +$$

$$+ 6 \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} \mathbf{E}\psi_{j,k}^2(X_{i_1})\psi_{j,k}^2(X_{i_2})\Big). \tag{16}$$

Так как X_i независимы и одинаково распределены, выражение (16) можно оценить сверху

$$\mathbf{E}\hat{d}_{j,k}^4 \le \frac{1}{n^3}\mathbf{E}\psi_{j,k}^4(X_1) + \frac{4}{n^2}\mathbf{E}\psi_{j,k}^3(X_1)\mathbf{E}\psi_{j,k}(X_1) + \frac{6}{n^2}\left(\mathbf{E}\psi_{j,k}^2(X_1)\right)^2. \quad (17)$$

Учитывая оценку (9) и то, что $\mathbf{E}\psi_{j,k}(X_1) \le 2^{j/2}C_\psi C_f$, в последнем неравенстве получаем

$$\mathbf{E}\hat{d}_{j,k}^4 \le \frac{2^j C_\psi^2 C_f}{n^3} + \frac{2^j 4C_\psi^2 C_f^2 + 6C_f^2}{n^2} \le \frac{2^j}{n^2}C_1, \quad (18)$$

где $C_1 = 4C_\psi^2 C_f^2 + 6C_f^2 + C_\psi^2 C_f$. Подставим оценку (18) в (12). Получим, что

$$\mathbf{D}\hat{d}_{j,k}^H \le \frac{(2^j C_1 (C_f n^{-1} + d_{j,k}^2))^{1/2}}{n\lambda}. \quad (19)$$

Лемма доказана.

Замечание: Пусть $j = \beta\log_2 n$, $\beta < 1$, $\lambda = \gamma\sqrt{\frac{\log_2 n}{n^\beta}}$, $\gamma > 0$. Тогда

$$\mathbf{D}\hat{d}_{j,k}^H \le C_1 n^{-1+\beta}(\log_2 n)^{-1/2}\left(\frac{C_f}{n} + d_{j,k}^2\right)^{1/2}. \quad (20)$$

Допустим, что $\sum_{j=j_0}^\infty \sum_k d_{j,k}^2 = O(n^{-\delta})$, $\delta > 0$. Тогда если $\delta < 1$, то

$$\mathbf{D}\hat{d}_{j,k}^H \le Cn^{-1-\delta/2+\beta}(\log_2 n)^{-1/2}, \quad (21)$$

Если $\delta \ge 1$, то

$$\mathbf{D}\hat{d}_{j,k}^H \le Cn^{-3/2+\beta}(\log_2 n)^{-1/2}. \quad (22)$$

Нас будут интересовать оценки $\mathbf{D}\hat{d}_{j,k}^H$ порядка $n^{-\tau}$, где $\tau > 1$. Такое условие выполняется в случае, если $\beta < \frac{1}{2}\min(\delta, 1)$.

Лемма 4. $\mathbf{D}\hat{d}_{j,k}^S \le \frac{2^{j/2}C}{n\lambda}\left(\frac{C_f}{n} + d_{j,k}^2\right)^{1/2} + \left(\frac{C_f}{n} + d_{j,k}^2\right)$.

Доказательство.

Оценим значение $\mathbf{D}\hat{d}_{j,k}^S$ сверху. Получаем

$$\mathbf{D}\hat{d}_{j,k}^S \le \mathbf{E}\left(|\hat{d}_{j,k}| - \lambda\right)^2 \mathrm{I}\{|\hat{d}_{j,k}| > \lambda\}^2 \le \mathbf{E}|\hat{d}_{j,k}|^2\mathrm{I}\{|\hat{d}_{j,k}| > \lambda\}^2 + \lambda^2\mathbf{E}\mathrm{I}\{|\hat{d}_{j,k}| > \lambda\}^2. \quad (23)$$

Используем неравенство Чебышева, (13) и (18) в (23), получаем

$$\mathbf{D}\hat{d}_{j,k}^S \le \sqrt{\mathbf{E}|\hat{d}_{j,k}|^4\mathbf{P}(|\hat{d}_{j,k}| > \lambda)} + \lambda^2\mathbf{P}(|\hat{d}_{j,k}| > \lambda) \le \sqrt{\frac{2^j C}{n^2}\frac{\mathbf{E}\hat{d}_{j,k}^2}{\lambda^2}} + \mathbf{E}\hat{d}_{j,k}^2 \le$$

$$\frac{2^{j/2}C}{n\lambda}\left(\frac{C_f}{n}+d_{j,k}^2\right)^{1/2}+\left(\frac{C_f}{n}+d_{j,k}^2\right). \qquad (24)$$

Лемма доказана.

Замечание: Как и в предыдущем замечании, мы интересуемся оценками $\mathbf{D}\hat{d}_{j,k}^S$ порядка $n^{-\tau}$, где $\tau > 1$. Однако из леммы 4 следует, что $\tau \le 1$ при условии, что $\lambda = \sqrt{\frac{\log_2 n}{n^\beta}}$. Представим оценку (24) в виде $\mathbf{D}d_{j,k}^S \le Cn^{-\tau}$, где $0 < \tau \le 1$, $\tau = g(\beta, \delta, \lambda)$. Такое представление мы будем использовать далее при доказательстве теоремы 3.

Лемма 5. *Вейвлет-статистика $\hat{f}_{j_1}(t)$ является асимптотически несмещенной оценкой $f(t)$, представима в виде ядерной и проективной оценок.*

Доказательство.

Покажем последовательно выполнение свойств вейвлет-статистик.

1. Вейвлет-статистика является асимптотически несмещенной оценкой $f(t)$. Свойство непосредственно следует из Леммы 1:

$$\mathbf{E}\hat{f}_{j_1}(x) = f(x) - \sum_{j=j_1}^{\infty}\sum_k d_{j,k}\psi_{j,k}(x) = f(x) - b_{j_1}(x).$$

   С ростом $j_1 \to \infty$ смещение $b_{j_1}(x) \to 0$ п.в. на $\mathbf{R}$. Скорость сходимости смещения к нулю в различных функциональных пространствах рассматривалась, к примеру, в [12], [18].

2. Вейвлет-оценка представима в виде ядерной оценки плотности. Используя уравнение маски (см. [12])

$$\varphi(x) = \sum_k h_k\varphi(2x-k), \ \psi(x) = \sum_k (-1)^k h_{1-k}\varphi(2x-k),$$

   где $\{h_k\} \in l^2$, характеризует пару $\{\varphi, \psi\}$, получаем,

$$\hat{f}_{j_1}(x) = \sum_k \hat{c}_{j_0 k}\varphi_{j_0 k}(x) + \sum_{j=j_0}^{j_1-1}\sum_k \hat{d}_{jk}\psi_{jk}(x) = \sum_k \hat{c}_{j_1,k}\varphi_{j_1,k}(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n K_{j_1}(x, X_i),$$

   где функцию $K(x,y) = \sum_k \varphi(x-k)\varphi(y-k)$ - назовем вейвлетным ядром. $K_j(x,y) = 2^j K(2^j x, 2^j y)$.

3. Вейвлет-оценка представима в виде проективной оценки плотности. Если $\{\varphi_{j,k}\}_{k\in\mathbf{Z}}$ - ортогональное семейство функций, то вейвлет-оценка представима в виде проективной оценки плотности на пространстве V_{j_1}.

$$\hat{f}_{j_1}(x) = \sum_k \hat{c}_{j_0 k}\varphi_{j_0 k}(x) + \sum_{j=j_0}^{j_1-1}\sum_k \hat{d}_{jk}\psi_{jk}(x) = \sum_k \hat{c}_{j_1,k}\varphi_{j_1,k}(x).$$

Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть $f(t)$ такая, что существует $\inf f(t) = c_f > 0$ и $\sup f(t) = C_f < \infty$. Пусть далее существуют $F_1 \in L^1$, $F_2 \in L^1 \bigcap L^2$ такие, что*

$$F_1(x-y) \le |K(x,y)| \le F_2(x-y). \tag{25}$$

Тогда для любого t выполняется

$$\mathbf{D}\hat{f}_{j_0}(t) = O\left(\frac{2^{j_0}}{n}\right).$$

Доказательство.

Рассмотрим представление $\hat{f}_{j_0}(t)$ в качестве ядерной оценки (см. Лемма 5).

$$\hat{f}_{j_0}(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} K_{j_0}(t, X_i),$$

где $K_{j_0}(t, X_i)$ - последовательность независимых случайных величин. Получим верхнюю оценку для $\mathbf{D}\hat{f}_{j_0}(t)$. В силу независимости и одинаковой распределенности $\{X_i\}$ очевидно равенство

$$\mathbf{D}\hat{f}_{j_0}(t) = \frac{1}{n}\left(\mathbf{E}K_{j_0}^2(t, X_1) - f_{j_0}^2(t)\right). \tag{26}$$

Воспользуемся равенством (26), учитывая верхнюю оценку в (25) и делая замену переменных, имеем

$$\mathbf{D}\hat{f}_{j_0}(t) \le \frac{1}{n}\mathbf{E}K_{j_0}^2(t, X_1) \le \frac{2^{2j_0}}{n}\int F_2^2(2^{j_0}(t-y))f(y)\,dy =$$

$$= \frac{2^{j_0}}{n}\int F_2^2(z) f\left(t + \frac{z}{2^{j_0}}\right)\,dz \le \frac{2^{j_0}}{n}\parallel F_2\parallel_2^2 C_f. \tag{27}$$

Получим оценку для дисперсии снизу. Оценим снизу значение $\mathbf{E}K_{j_0}^2(t, X_1)$. Как и в случае для верхней оценки, воспользуемся нижней оценкой в (25) и, делая замену переменных, получаем

$$\mathbf{E}K_{j_0}^2(t,X_1) \geq 2^{j_0} \int F_1^2(z) f\left(t + \frac{z}{2^{j_0}}\right)\, dy \geq 2^{j_0} c_f \parallel F_1 \parallel_2^2 . \tag{28}$$

Оценим сверху значение $f_{j_0}^2(t)$. Согласно Лемме 5 $\mathbf{E}K_{j_0}(t, X_1) = f_{j_0}(t)$. Используем верхнюю оценку (25), после замены переменных мы получаем

$$f_{j_0}^2(t) = (\mathbf{E}K_{j_0}(t,X_1))^2 \leq 2^{2j_0} \left(\int F_2(2^{j_0}(t-y)) f(y)\, dy\right)^2 \leq C_f \parallel F_2 \parallel_1^2 . \tag{29}$$

Объединяя (27), (26), (28) и (29), имеем

$$\mathbf{D}\hat{f}_{j_0}(t) \geq \frac{2^{j_0}}{n} \left(c_f \parallel F_1 \parallel_2^2 - \frac{C_f \parallel F_2 \parallel_1^2}{2^{j_0}}\right). \tag{30}$$

Откуда очевидно следует результат Леммы.

Рассмотрим функцию $R_{j_0,j_1}(t) = \sum_{j=j_0}^{j_1} \sum_k \hat{d}_{j,k}^* \psi_{j,k}(t)$.

Лемма 7. *Существует C_r такая, что*

$$\mathbf{D}R_{j_0,j_1}(t) \leq C_r (j_1 - j_0)^2 \max_{k,j=j_0..j_1} \mathbf{D}\hat{d}_{j,k}^* .$$

Доказательство.

Воспользуемся очевидным неравентсвом $\mathbf{D}(X+Y) \leq (\sqrt{\mathbf{D}X} + \sqrt{\mathbf{D}Y})^2$. Тогда

$$\mathbf{D}R_{j_0,j_1}(t) \leq \left(\sum_{j=j_0}^{j_1} \sum_k \sqrt{\mathbf{D}\hat{d}_{j,k}^* \psi_{j,k}(t)}\right)^2 \leq \max_{k,j=j_0..j_1} \mathbf{D}\hat{d}_{j,k}^* \left(\sum_{j=j_0}^{j_1} \sum_k |\psi_{j,k}(t)|\right)^2 . \tag{31}$$

Используя неравенство $\sum_k |\psi_{j,k}(t)| \leq C$ в (31), получаем результат леммы.

3. Основной результат

Теорема 1. *Пусть $f(t)$ ограничена и существуют функции $F_1 \in L^2$ и $F_2 \in L^1 \bigcap L^2 \bigcap L^3$, такие, что $F_1(x-y) \leq |K(x,y)| \leq F_2(x-y)$. Тогда для любого t такого, что $f(t) > 0$,*

$$\frac{(\hat{f}_{j_0}(t) - f_{j_0}(t))}{\sqrt{\mathbf{D}\hat{f}_{j_0}(t)}} \to \mathcal{N}(0,1), \quad n \to \infty,$$

где $j_0 = \alpha \log_2 n$, $0 < \alpha < 1$.

Доказательство.

Рассмотрим представление $\hat{f}_{j_0}(t)$ в качестве ядерной оценки (см. Лемма 5).

$$\hat{f}_{j_0}(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} K_{j_0}(t, X_i),$$

где $K_{j_0}(t, X_i)$ - последовательность независимых случайных величин. Для доказательства асимптотической нормальности необходима асимптотическая малость элементов последовательности $K_{j_1}(t, X_i)$

$$\max_i \mathbf{P}\left(|K_{j_0}(t, X_i) - \mathbf{E}K_{j_0}(t, X_i)| > \varepsilon\right) \le \frac{\mathbf{D}K_{j_0}(t, X_1)}{\varepsilon^2}. \qquad (32)$$

Согласно Лемме 6 при выборе $j_0 = \alpha \log_2 n$, $0 < \alpha < 1$ мы получаем асимптотическую малость элементов последовательности $K_{j_0}(t, X_i)$ так как ε можно выбрать так, чтобы (32) стремилось к нулю. Легко показать также, что для любого j_0

$$\mathbf{E}(K_{j_0}(t, X_i) - \mathbf{E}K_{j_0}(t, X_i))^3 \le 2^{3j_0}C < \infty,$$

где C - некоторая константа. Для этого необходимо повторить рассуждения, которые мы использовали при оценке $\mathbf{E}K_{j_0}^2(t, X_1)$. Осталось показать, что

$$\mathbf{D}K_{j_0}(t, X_1) > 0.$$

Пусть это не так и $\mathbf{D}K_{j_0}(t, X_1) = 0$. Тогда

$$K_{j_0}(t, X_1) = \mathbf{E}K_{j_0}(t, X_1) \quad \text{(п.н.)}$$

Это выполняется в случае вырожденного закона, что противоречит предположению о существовании плотности распределения. Следовательно, $\hat{f}_{j_0}(t)$ асимптотически нормальна. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть $f(t)$ ограничена и существуют функции $F_1 \in L^2$ и $F_2 \in L^1 \bigcap L^2 \bigcap L^3$, такие, что $F_1(x-y) \le |K(x,y)| \le F_2(x-y)$. Если кроме того $\sum_{j=j_0}^{\infty}\sum_k d_{j,k}^2 = O(n^{-\delta})$, $\delta > 0$. Тогда для любого t такого, что $f(t) > 0$,*

$$\frac{\hat{f}_{j_1}^H(t) - \mathbf{E}\hat{f}_{j_1}^H(t)}{\sqrt{\mathbf{D}\hat{f}_{j_1}^H(t)}} \to \mathcal{N}(0,1), n \to \infty,$$

сходится по распределению, где $j_0 = \alpha \log_2 n$, $j_1 = \beta \log_2 n$, $0 < \alpha < \beta < 1$, $\beta < 1/2 \min(1, \delta)$.

Доказательство.

Представим статистику

$$\left(\hat{f}^H_{j_1}(t) - \mathbf{E}\hat{f}^H_{j_1}(t)\right) / \sqrt{\mathbf{D}\hat{f}^H_{j_1}(t)} \qquad (33)$$

в следующем виде

$$\frac{\hat{f}^H_{j_1}(t) - \mathbf{E}\hat{f}^H_{j_1}(t)}{\sqrt{\mathbf{D}\hat{f}^H_{j_1}(t)}} = \frac{\hat{f}_{j_0}(t) - \mathbf{E}\hat{f}_{j_0}(t)}{\sqrt{\mathbf{D}\hat{f}_{j_0}(t)}} \cdot \frac{\sqrt{\mathbf{D}\hat{f}_{j_0}(t)}}{\sqrt{\mathbf{D}\hat{f}^H_{j_1}(t)}} + \frac{R_{j_0,j_1}(t) - \mathbf{E}R_{j_0,j_1}(t)}{\sqrt{\mathbf{D}\hat{f}^H_{j_1}(t)}}. \qquad (34)$$

Обозначим первое слагаемое через $T_{j_0,j_1}(t)$, второе - $Q_{j_0,j_1}(t)$. Разобъем доказательство на 2 шага:

1. Покажем, что для любого t $T_{j_0,j_1}(t) \to \mathcal{N}(0,1)$ по распределению.
2. Покажем, что для любого t и $\varepsilon > 0$ $\mathbf{P}(|Q_{j_0,j_1}(t)| > \varepsilon) \to 0$, $n \to \infty$

Тогда, воспользовавшись [21] Т.15., получаем результат теоремы.

1. Представим $T_{j_0,j_1}(t)$ в виде $T_{j_0,j_1}(t) = T^{lin}_{j_0}(t) T^*_{j_0,j_1}(t)$, где

$$T^{lin}_{j_0}(t) = \frac{\hat{f}_{j_0}(t) - \mathbf{E}\hat{f}_{j_0}(t)}{\sqrt{\mathbf{D}\hat{f}_{j_0}(t)}}, \quad T^*_{j_0,j_1}(t) = \frac{\sqrt{\mathbf{D}\hat{f}_{j_0}(t)}}{\sqrt{\mathbf{D}\hat{f}^H_{j_1}(t)}}.$$

Лемма 8. *Если* $j_0 = \alpha \log_2 n$, $j_1 = \beta \log_2 n$, *тогда*

$$|\mathbf{D}\hat{f}^H_{j_1}(t) - \mathbf{D}\hat{f}_{j_0}(t)| \le \frac{C \log_2 n}{n^\tau}.$$

Если $\delta \ge 1$ *и* $\beta - \alpha < 1/2$, *тогда* $\tau = \frac{5}{4} - \frac{1}{2}(\beta + \alpha)$.
Если $\delta < 1$ *и* $\beta - \alpha < \delta/2$, *тогда* $\tau = 1 + \delta/4 - \frac{1}{2}(\beta + \alpha)$.

Доказательство.

Воспользуемся результатом Леммы 7 и Замечанием к Лемме 4, получаем, что если $\delta < 1$, то

$$\mathbf{D}R_{j_0,j_1}(t) \le \frac{C \log_2 n}{n^{1+\min(\delta/2, 1/2)-\beta}},$$

$\beta < 1/2 \min(\delta, 1)$. Далее воспользуемся линейностью оценки $\hat{f}^H_{j_1}(t) = \hat{f}_{j_0}(t) + R_{j_0,j_1}(t)$, получаем

$$|\mathbf{D}\hat{f}^H_{j_1}(t) - \mathbf{D}\hat{f}_{j_0}(t)| \le \mathbf{D}R_{j_0,j_1}(t) + 2\sqrt{\mathbf{D}\hat{f}_{j_0}(t)\mathbf{D}R_{j_0,j_1}(t)}. \qquad (35)$$

Воспользуемся Леммой 5, откуда $\mathbf{D}\hat{f}_{j_0}(t) = O(n^{-1+\alpha})$. Пусть $\delta \geq 1$. Далее, если $\beta - \alpha > \frac{1}{2}$, то это противоречит условию $\beta < 1/2$.

Пусть $\delta < 1$, если $\beta - \alpha > \delta/2$, то очевидно, что это противоречит условию $\beta < \delta/2$.

Остальные случаи проверяются с помощью (35). Лемма доказана.

Можно легко показать, что из Лемм 7 и 8 следует

$$\left|\left(\frac{1}{T^*_{j_0,j_1}(t)}\right)^2 - 1\right| \leq Cn^{1-\alpha-\tau}\log_2 n \to 0, n \to \infty, \tag{36}$$

если $\beta - \alpha < 1/2\min(1,\delta)$. Это эквивалентно тому, что $T^*_{j_0,j_1}(t) \to 1, n \to \infty$. Для доказательства пункта 1 осталось воспользоваться (Т.1.) для $T^{lin}_{j_0}(t)$.

2. Оценим $\mathbf{P}(|Q_{j_0,j_1}(t)| > \varepsilon)$. Очевидна следующая цепочка неравенств с использованием неравенства Чебышева и результатов Леммы 8

$$\mathbf{P}(|Q_{j_0,j_1}(t)| > \varepsilon) \leq \frac{\mathbf{D}R_{j_0,j_1}(t)}{\varepsilon^2 \mathbf{D}\hat{f}^H_{j_1}(t)} \leq Cn^{1-\alpha-\tau}\log_2 n\varepsilon^{-2}. \tag{37}$$

Согласно (36) полученная оценка стремится к нулю в случае $\beta - \alpha < 1/2\min(1,\delta)$, следовательно, теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть $f(t)$ ограничена и существуют функции $F_1 \in L^2$ и $F_2 \in L^1 \bigcap L^2 \bigcap L^3$, такие, что $F_1(x-y) \leq |K(x,y)| \leq F_2(x-y)$. Если кроме того $\sum_{j=j_0}^{\infty}\sum_k d^2_{j,k} = O(n^{-\delta})$, $\delta > 0$. Тогда для любого t такого, что $f(t) > 0$*

$$\frac{\hat{f}^S_{j_1}(t) - \mathbf{E}\hat{f}^S_{j_1}(t)}{\sqrt{\mathbf{D}\hat{f}^S_{j_1}(t)}} \to \mathcal{N}(0,1), n \to \infty, \tag{38}$$

сходится по распределению, если $\alpha + \tau' > 1$, где $j_0 = \alpha\log_2 n$, $j_0 = \beta\log_2 n$, $\tau' = 1/2\min(1-\alpha+\tau, 2\tau)$, $\tau = g(\beta,\delta,\lambda)$ определяется в замечании к лемме 4.

Доказательство.

Доказательство теоремы аналогично Т.2. Представим статистику (38) в следующем виде

$$\frac{\hat{f}^S_{j_1}(t) - \mathbf{E}\hat{f}^S_{j_1}(t)}{\sqrt{\mathbf{D}\hat{f}^S_{j_1}(t)}} = \frac{\hat{f}_{j_0}(t) - \mathbf{E}\hat{f}_{j_0}(t)}{\sqrt{\mathbf{D}\hat{f}_{j_0}(t)}} \cdot \frac{\sqrt{\mathbf{D}\hat{f}_{j_0}(t)}}{\sqrt{\mathbf{D}\hat{f}^S_{j_1}(t)}} + \frac{R_{j_0,j_1}(t) - \mathbf{E}R_{j_0,j_1}(t)}{\sqrt{\mathbf{D}\hat{f}^S_{j_1}(t)}}. \tag{39}$$

Обозначим первое слагаемое через $T_{j_0,j_1}(t)$, второе – $Q_{j_0,j_1}(t)$.

1. Представим $T_{j_0,j_1}(t)$ в виде $T_{j_0,j_1}(t) = T_{j_0}^{lin}(t)T^*_{j_0,j_1}(t)$, где

$$T_{j_0}^{lin}(t) = \frac{\hat{f}_{j_0}(t) - \mathbf{E}\hat{f}_{j_0}(t)}{\sqrt{\mathbf{D}\hat{f}_{j_0}(t)}}, \quad T^*_{j_0,j_1}(t) = \frac{\sqrt{\mathbf{D}\hat{f}_{j_0}(t)}}{\sqrt{\mathbf{D}\hat{f}^S_{j_1}(t)}}.$$

Аналогично Лемме 8, воспользовавшись Замечанием к Лемме 4, можно показать, что

$$|\mathbf{D}\hat{f}^S_{j_1}(t) - \mathbf{D}\hat{f}_{j_0}(t)| \le \frac{C\log_2 n}{n^{\tau'}}, \tag{40}$$

где $\tau' = 1/2\min(1-\alpha+\tau, 2\tau)$, $\tau = g(\beta,\delta,\lambda)$ определена в замечании к лемме 4.

Тогда из (40) следует, что

$$\left|\left(\frac{1}{T^*_{j_0,j_1}(t)}\right)^2 - 1\right| \le Cn^{1-\alpha-\tau'}\log_2 n \to 0, n \to \infty, \tag{41}$$

выполняется по условиям теоремы. А это эквивалентно тому, что $T^*_{j_0,j_1}(t) \to 1, n \to \infty$. Для доказательства пункта 1 осталось воспользоваться (T.1.) для $T_{j_0}^{lin}(t)$.

2. Оценим $\mathbf{P}(|Q_{j_0,j_1}(t)| > \varepsilon)$. Очевидна следующая цепочка неравенств с использованием неравенства Чебышева и (40)

$$\mathbf{P}(|Q_{j_0,j_1}(t)| > \varepsilon) \le \frac{\mathbf{D}R_{j_0,j_1}(t)}{\varepsilon^2\mathbf{D}\hat{f}^S_{j_1}(t)} \le Cn^{1-\alpha-\tau'}\log_2 n\varepsilon^{-2}. \tag{42}$$

Согласно (41) $n^{1-\alpha-\tau'} \to 0$. Теорема доказана.

Литература

1. **Antoniadis A.** Smoothing noisy data with tapered coiflets series// *Scand. Journal of Statistics, V.23, P.313-330.*

2. **Chiu K.** An introduction to wavelets. *Academic Press, 1992.*

3. **Dahlhaus R., Neumann M., von Sachs R.** Nonlinear wavelet estimation of time-varying autoregressive process//*Bernoulli 5(5), P.873-906.*

4. **Daubechies I.** Ten lectures on wavelets//*CBMS-NSF. Regional conference series on applied mathematics. SIAM, 1992.*

5. **Donoho D.L., Johnstone I.M., Kerkyacharian G., Picard D.** Density estimation by wavelet thresholding//*Ann. Statist., V.24(2), 1996, P.508-539.*

6. **Donoho D.L.** De-noising by soft-therholding//*IEEE Transaction on information theory, V.41, N.3, P.613-627.*

7. **Donoho D.L., Johnstone I.M.** Ideal spatial adaptation by wavelet shrinkage //*Biometrika 81, P.425-455.*

8. **Götze F., Zalesky B.A.** Nonparametric Wavelet based Minimax Estimation in non Gaussian Models.

9. **Hall P., Kerkyacharian G., Picard D.** Block threshold rules for curve estimation using kernel and wavelet methods//*Annals of Statistics, V.26, N.3, P.922-942.*

10. **Hall P., McKay I., Turlach B.** Perfomance of wavelet methods for functions with many discontinuites//*Annals of Statistics, V. 24, P.2462-2476.*

11. **Hall P., Patil P.** On the choice of smoothing parameter, thershold and truncation in nonparametric regression by nonlinear wavelet methods//*J. Roy. Statist. Soc., Ser. B 58, P.361-377.*

12. **Härdle W., Kerkyacharian G., Picard D., Tsybakov A.** Wavelets, Approximation and Statistical Application. *Springer, 1997.*

13. **Kerkyacharian G., Picard D.** Density estimation in Besov Space//*Statistics and Probability Letters 13, P. 15-24.*

14. **Mallat S.** Multiresolution approximation and wavelets//*Trans.AMS, V.315, P.69-88.*

15. **Neumann M.** Spectral Density estimation via nonlinear wavelet methods for stationary non-gaussian time series//*Journal of time series analysis, V.17, N.6, P.601-633.*

16. **Nason G.P., von Sachs R.** Wavelet in time series analysis//*Phil.Trans.R.Soc.Lond. (Submitted).*

17. **Walter G.G.** Approximation on the Delta Function by Wavelet//*J. Approx.Theory, V.71, P.329-343.*

18. **Тихомиров А.Н., Юрченко В.А.** Вейвлет-оценки плотностей и B-сплайны//*Алгебра, дифф.уравнения и теория вероятностей КНЦ УрО РАН. 2000. С.84–107.*

19. **Боровков А.А.** Математическая статистика.*Новосибирск.:Наука, 1997. 772 с.*

20. **Биллингсли П.** Сходимость вероятностных мер.*М.:Наука, 1977. 352 с.*

21. **Петров В.В.** Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. *М.:Наука, 1987. 320 с.*

Summary

Yurchenko V.A. Limit theorems for wavelet-statistics

We consider linear and nonlinear wavelet-statistics of independent random variables. We obtain the limit theorem for linear and nonlinear wavelet-statistics. Some statistical properties of wavelet coefficients are proved.

Сыктывкарский университет *Поступила 29.09.2000*