Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1.Вып.4.2001

УДК 519.216.5

Обобщенная задача Коши для стоимости опциона пут Американского типа

М. А. Холопова

Новый метод, основанный на использовании обобщенных функций, применяется для оценивания опционов Американского типа. В частности, точное решение обобщенной задачи Коши со свободной границей (задачи Стефана) дает известную интегральную формулу для рациональной стоимости опциона пут Американского типа и соответствующей граничной функции останова.

1. Задача о рациональной стоимости опциона. Пусть на рынке ценных бумаг с непрерывным временем $t \geq 0$ есть некоторая акция A (или другая ценная бумага) с ценой $S(t)$ в момент t.

Опционом пут (опционом продажи) для A называется ценная бумага, дающая владельцу, купившему опцион, *право* продать A продавцу опциона по заранее установленной цене K в определенный момент времени $\tau \in [0, T]$. Пусть цена опциона в момент $t = 0$ (начальная стоимость) равна f.

В дальнейшем мы рассматриваем стандартный опцион пут Американского типа, для которого момент τ реализации опциона определяется самим владельцем, а выплата со стороны продавца опциона составляет $(K - S_\tau)_+ = \max(0; K - S_\tau)$. Здесь отражено, что при $S_\tau < K$ владелец опциона покупает на рынке "дешевую" акцию A по цене S_τ и продает его продавцу опциона по цене K, использовав свое право, а при $S_\tau \geq K$ просто не предъявляет опцион к оплате.

Рассмотрим для S_τ диффузионную модель эволюции (см. [2], С.13):

$$dS_t = S_t(rdt + \sigma dW_t), \qquad S_0 > 0.$$

где $W = (W_t)_{t\geq 0}$ – стандартное броуновское движение (винеровский процесс с $E(W_t) = 0, D(W_t) = t$), а $r > 0$ - постоянная процентная ставка банковского счета с непрерывным начислением процентов. Решением этой модели является случайный процесс геометрического броуновского движения

$$S_t = S_0\, e^{rt}\, e^{\sigma W_t - \sigma^2 t/2}, \qquad S_0 > 0. \tag{1}$$

Величина f называется *рациональной стоимостью* опциона пут, если: 1) продавец опциона, располагая только капиталом f, полученным от покупателя опциона, может так им распорядиться, продавая и покупая, если нужно, A и держа часть капитала на банковском счету, чтобы в любой момент t иметь возможность выплатить $(K - S_t)_+$ ("хеджирование"); 2) ни покупатель, ни продавец в среднем не получат никакой прибыли ("безарбитражность") [2, 4]. Одна из основных задач теории расчетов опционов состоит в отыскании рациональной стоимости f.

Известно [4, 8], что рациональная цена в момент времени t равна среднему значению дисконтированой ожидаемой выплаты и для стандартного Американского опциона пут может быть записана как $P(t, \ln S_t)$ с функцией

$$P(t,x) = \sup_{\tau\in\mathcal{T}_{0,T-t}} \mathbf{E}e^{-r\tau}\psi(x + \mu\tau + \sigma W_\tau). \tag{2}$$

где $\mathcal{T}_{0,T-t}$ обозначает множество всех моментов остановки (относительно естественной фильтрации процесса W) со значениями в интервале $[\,0\,;\,T-t\,]$,

$$\psi(x) = (K - e^x)_+\,, \tag{3}$$

$$\mu = r - \sigma^2/2. \tag{4}$$

Из (2) видно, что при $\tau \equiv 0 \in \mathcal{T}_{0,T-t}$ (соответствующему безусловному останову в момент t) под sup получается $\psi(x)$, и поэтому $\forall(t,x)$ выполнено $P(t,x) \geq \psi(x)$. Множество $\mathcal{C} = \{(t,x) : P(t,x) > \psi(x)\}$ называется областью продолжения, а множество $\{(t,x) : P(t,x) = \psi(x)\}$ - областью остановки. В работах [8, 5] и др. показано, что существует строго возрастающая по t бесконечно дифференцируемая на интервале $[\,0\,;\,\mathrm{T})$ функция $s_*(t,T)$ такая, что $\mathcal{C} = \{(t,x) : x > s_*(t,T)\}$ и, соответственно, область остановки равна $\{(t,x) : x \leq s_*(t,T)\}$. Значение $\exp s_*(t,T)$ называется критической ценой в момент времени t, кривая $s_*(\cdot,T)$ называется свободной границей. Оказывается, что момент τ^*

первого попадания (t, S_t) в область остановки (т.е. когда цена A впервые окажется не выше критической) является оптимальным выбором для предъявления опциона, реализующим sup в (2). Установлено также (см., например, [7]), что функция $P(t,x)$ имеет следующие свойства:

a) $P, P_t, P_x \in C^1(0 \le t < T)$; $\quad P > 0, P_t < 0, P_x < 0$ при $0 \le t < T$;

b) $P \in C^2(0 < t < T, x > s_*(t,T))$ и в этой области (продолжения) удовлетворяет уравнению параболического типа

$$P_t(t,x) + \frac{\sigma^2}{2} P_{xx}(t,x) + \mu P_x(t,x) - rP(t,x) = 0 \tag{5}$$

(через f_t, f_x и т.д. здесь и далее обозначены частные производные функции f по t, по x и т.д.);

c) существует положительная константа C такая, что

$$\forall (t,x) \in [\,0\,; T) \times \mathbf{R}, \qquad |P_t(t,x)| + |P_x(t,x)| \le \frac{C}{\sqrt{T-t}}; \tag{6}$$

d) $\lim\limits_{t \to T-0} P(t,x) = \psi(x) \quad \forall x$; $\lim\limits_{t \to T-0} s_*(t,T) = \ln K$ (свойства следуют из (2)).

2. Интегральная формула для рациональной стоимости стандартного опциона. Введем обращение времени $t \to T - t$ и функции $Q(t,x) = P(T-t,x), \quad s(t) = s_*(T-t,T)$. Основной результат данной работы сформулируем в виде утверждения.

Утверждение. *Функция Q является решением обобщенной задачи Коши (10) и при всех $T > 0, t > 0, x \in \mathbf{R}$ справедлива формула*

$$\begin{aligned} Q(t,x) = P(T-t,x) \;&=\; rK \int\limits_0^t e^{-r\tau} \Phi\left(\frac{s(t-\tau) - x - \mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) d\tau \,+ \\ &+ Ke^{-rt}\Phi\left(\frac{\ln K - x - \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) \;-\; e^x \Phi\left(\frac{\ln K - x - t(\mu+\sigma^2)}{\sigma\sqrt{t}}\right), \end{aligned} \tag{7}$$

где Φ - функция распределения Лапласа.

Граничная функция $s(t)$ может быть найдена из интегрального тождества

$$Q(t,x) \equiv \psi(x) \qquad \forall x \le s(t),\; t > 0\,. \tag{8}$$

Замечания. 1) Аналогичная формула приведена в работе Кима [6], а при выводе использовалась дискретизация по времени и громоздкая схема пересчета стоимости по временным слоям с последующим предельным переходом. Нам кажется, что приведенный ниже вывод (7) намного рациональнее.

2) Из (8) следует *независимость* $s(t)$ *от значения* T и тем самым из (7) – *независимость* $Q(t,x)$ *от* T.

3) Начальная рациональная цена опциона равна $f = P(0, \ln S_0) = Q(T, \ln S_0)$. В частности, устремляя в (7) $t \to +\infty$, можно получить стационарные значения $P_\infty(S_0), s_\infty$ для цены опциона и порогового значения для акции, совпадающие с приведенными в [3, 4].

3. Вывод интегральной формулы (7). Рассмотрим пространство двумерных обобщенных функций $\mathcal{D}' = \mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$, то есть линейных непрерывных функционалов на пространстве $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbf{R}^2)$ финитных бесконечно дифференцируемых функций (см.[1], С.91). Значение $f \in \mathcal{D}'$ на $\varphi \in \mathcal{D}$ будем записывать $\langle f, \varphi \rangle$. Обобщенные функции, определяемые локально интегрируемыми в $\mathbf{R}^2$ функциями по формуле

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{R^2} f(x)\varphi(x)\,dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}, \tag{9}$$

являются *регулярными обобщенными функциями*, остальные - *сингулярными*. Через $\mathcal{D}'_+$ обозначим $\{f \in \mathcal{D}' : f = 0 \text{ при } t < 0\}$.

Введенная выше функция Q удовлетворяет при $t \in (0,T)$, $x > s(t)$ уравнению

$$L\,Q \equiv Q_t - \frac{\sigma^2}{2} Q_{xx} - \mu Q_x + rQ = 0,$$

равна $\psi(x)$ при $t \in (0,T)$, $x \le s(t)$ и удовлетворяет начальному условию

$$Q(+0,x) = \psi(x), \quad \forall x.$$

Продолжим линию $x = s(t)$ и функцию Q в полуплоскость $t \ge T$ так, чтобы равенства $Q(t,x) = \psi(x)$ при $x < s(t)$, $L\,Q = 0$ при $x > s(t)$ и условие $Q \in C^1(t > 0)$ выполнялись теперь в области $t > 0$. Выбор продолжения на область $t > T$ является несущественным, так как известно, что значение решения уравнения типа теплопроводности при некотором t *не зависит* от значений правой части уравнения при аргументах, больших t (см. также 7).

Дополним полученную функцию Q нулем при $t < 0$, и тогда она будет регулярной обобщенной функцией $\tilde{Q}$ из $\mathcal{D}'_+$.

Поставим для $\tilde{Q}$ обобщенную задачу Коши ([1], С.225) с оператором L и с начальным условием при $t = 0$. Для этого найдем обобщенную функцию $f = L\tilde{Q}$, вычислив обобщенные производные $\tilde{Q}$. Воспользоваться сразу формулами об обобщенных первых и вторых частных производных кусочно-дифференцируемой функции ([1], С.117-118) нельзя, так как функция $\tilde{Q}(t,x)$ не является непрерывно дифференцируемой при $t \geq 0$ (см. свойство b)). Поэтому введем семейство обобщенных локально интегрируемых функций

$$Q_\varepsilon(t,x) = H(t-\varepsilon)\,Q(t,x) = \begin{cases} Q(t,x), & t > \varepsilon \\ 0, & t < \varepsilon. \end{cases} \qquad \varepsilon > 0\,,$$

где $H(t)$ - функция Хевисайда, индикатор множества $t > 0$.

Так как $|Q_\varepsilon(t,x)| \leq K$, то из (9) следует, что $\langle Q_\varepsilon, \varphi\rangle \to \left\langle \tilde{Q}, \varphi \right\rangle$ при $\varepsilon \to 0$, поэтому $Q_\varepsilon \to \tilde{Q}$ при $\varepsilon \to 0$ в пространстве $\mathcal{D}'$. Теперь по непрерывности оператора дифференцирования в $\mathcal{D}'$ следует, что $L\,Q_\varepsilon \to L\,\tilde{Q}$ при $\varepsilon \to 0$.

Используя свойства a)-d) и дифференцируемость $\psi(x)$ при $x < \ln K$, по теореме об обобщенной первой частной производной кусочно-дифференцируемой функции находим

$$L\,Q_\varepsilon = H(t-\varepsilon)\left\{L\,\tilde{Q}\right\} + Q(\varepsilon,x)\cdot\delta(t-\varepsilon),$$

где $\{u\}$ - "обычная" производная кусочно-дифференцируемой функции u, склеенная из производных в отдельных областях, $\delta(t-\varepsilon)$ - δ-функция с особенностью в ε: $<\delta(t-\varepsilon), \varphi> = \varphi(\varepsilon)$. Несложно показать, что $Q(\varepsilon,x)\cdot\delta(t-\varepsilon) \to \psi(x)\cdot\delta(t)$ в пространстве $\mathcal{D}'$. Получили

$$L\,\tilde{Q}(t,x) = H(t)\{L\,\tilde{Q}(t,x)\} + \psi(x)\cdot\delta(t)\,.$$

Так как функция Q дважды кусочно-непрерывно дифференцирумая в областях $\{t > 0, s(t) < x\}$ и $\{t > 0, x < s(t)\}$, то первые и вторые обобщенные производные Q не содержат сингулярных компонент и $\{L\,\tilde{Q}(t,x)\} = 0$ при $t > 0, s(t) < x$ и $\{L\,\tilde{Q}(t,x)\} = L\,\psi(x) = L(K - e^x) = rK$ при $t > 0, x \leq s(t) < \ln K$ или $\{L\,\tilde{Q}(t,x)\} = rK \cdot H(s(t) - x)$ при $t > 0$.

Таким образом, получаем $f(t,x) = rKH(t)\cdot H(s(t)-x) + \psi(x)\cdot\delta(t)$ или обобщенную задачу Коши (знак $\tilde{}$ далее будет опускаться)

$$L\,Q \equiv Q_t - \frac{\sigma^2}{2}Q_{xx} - \mu Q_x + rQ = rKH(t)\cdot H(s(t)-x) + \psi(x)\cdot\delta(t). \quad (10)$$

Найдем фундаментальное решение этого уравнения с постоянными коэффициентами, то есть функцию $\mathcal{E} \in \mathcal{D}'$, удовлетворяющую равенству $L\,\mathcal{E} = \delta$.

Так как при $\nu = -\dfrac{\mu}{\sigma^2}$, $\lambda = -r - \dfrac{\mu^2}{2\sigma^2}$ справедливо

$$\begin{aligned} L(e^{\lambda t+\nu x}\mathcal{E}_T(t,x)) &= e^{\lambda t+\nu x}\left[(\mathcal{E}_T)_t(t,x) - \frac{\sigma^2}{2}(\mathcal{E}_T)_{xx}(t,x)\right] \\ &= e^{\lambda t+\nu x}\delta(t,x) = \delta(t,x), \end{aligned}$$

где

$$\mathcal{E}_T(t,x) = \frac{H(t)}{\sqrt{2\pi t}\sigma}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2 t}\right) \tag{11}$$

фундаментальное решение уравнения теплопроводности (см. [1], с.267), то получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t,x) &= \frac{H(t)}{\sqrt{2\pi t}\sigma}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2 t}\right)\exp\left(-rt - \frac{\mu^2}{2\sigma^2}t - \frac{\mu}{\sigma^2}x\right) \\ &= \frac{H(t)}{\sqrt{2\pi t}\sigma}\exp\left(-\frac{(x+\mu t)^2}{2\sigma^2 t}\right)e^{-rt}. \end{aligned}$$

Заметим, что функции $\mathcal{E}, f$ принадлежат классу $\mathcal{D}'_+$. По теореме о неоднородных уравнениях ([1], С.196) решение (10) в классе $\mathcal{D}'_+$ равно $Q(t,x) = \mathcal{E}(t,x) * f(t,x)$ и это решение единственно в классе тех обобщенных функций из $\mathcal{D}'_+$, для которых существует свертка с $\mathcal{E}$.

Так как $Q(t,x)*(\psi(x)\cdot\delta(x)) = Q(t,x)*\psi(x)$, где последняя свертка берется только по переменной x, и функции $\mathcal{E}(t,x), Q(t,x), \psi(x), rKH(t)\cdot H(s(t)-x)$ являются локально-интегрируемыми, то

$$\begin{aligned} Q &= \mathcal{E} * f = \mathcal{E}(t,x) * \{rK\, H(t)\cdot H(s(t)-x)\} + \mathcal{E}(t,x) * \psi(x) \\ &= rK\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{H(\tau)}{\sqrt{2\pi\tau}\sigma}e^{-r\tau}\exp\left(-\frac{(\xi+\mu\tau)^2}{2\sigma^2\tau}\right)\times\right. \\ &\qquad\qquad \left.\times H(t-\tau)H(s(t-\tau)-x+\xi)\right]d\xi \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{H(t)}{\sqrt{2\pi t}\sigma}\exp\left(-\frac{(\xi+\mu t)^2}{2\sigma^2 t}\right)e^{-rt}\psi(x-\xi)d\xi \\ &= rKH(t)\int_0^t d\tau\left[\frac{e^{-r\tau}}{\sqrt{2\pi\tau}\sigma}\times\right. \end{aligned}$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{\infty} H\left(s(t-\tau)-x+\xi\right)\exp\left(-\frac{(\xi+\mu\tau)^2}{2\sigma^2\tau}\right)d\xi\Bigg]$$

$$+\frac{H(t)}{\sqrt{2\pi t}\sigma}e^{-rt}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(\xi+\mu t)^2}{2\sigma^2 t}\right)\psi(x-\xi)\,d\xi.$$

Будем далее считать, что $t>0$. Тогда $H(t)=1$ и

$$\begin{aligned} Q(t,x) &= rK\int\limits_0^t \frac{e^{-r\tau}d\tau}{\sqrt{2\pi\tau}\sigma}\int\limits_{x-s(t-\tau)}^{\infty}\exp\left(-\frac{(\xi+\mu\tau)^2}{2\sigma^2\tau}\right)d\xi \\ &+K\frac{e^{-rt}}{\sqrt{2\pi t}\sigma}\int\limits_{x-\ln K}^{\infty}\exp\left(-\frac{(\xi+\mu t)^2}{2\sigma^2 t}\right)d\xi \qquad (12) \\ &-\frac{e^{-rt}}{\sqrt{2\pi t}\sigma}\int\limits_{x-\ln K}^{\infty}\exp\left(-\frac{(\xi+\mu t)^2}{2\sigma^2 t}\right)e^{x-\xi}\,d\xi. \end{aligned}$$

Используя при $c>0$ формулу

$$\int\limits_{\alpha}^{\infty}\exp\left(-\frac{(a\xi+b)^2}{c}\right)d\xi = \sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{c}{2a^2}}\Phi\left(-\frac{\sqrt{2}(\alpha a+b)}{\sqrt{c}}\right),$$

преобразуем интегралы в (12):

$$rK\int\limits_0^t\frac{e^{-r\tau}\,d\tau}{\sqrt{2\pi\tau}\sigma}\int\limits_{x-s(t-\tau)}^{\infty}\exp\left(-\frac{(\xi+\mu\tau)^2}{2\sigma^2\tau}\right)d\xi = rK\int\limits_0^t e^{-r\tau}\Phi\left(\frac{s(t-\tau)-x-\mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)d\tau;$$

$$\frac{K\,e^{-rt}}{\sqrt{2\pi t}\sigma}\int\limits_{x-\ln K}^{\infty}\exp\left(-\frac{(\xi+\mu t)^2}{2\sigma^2 t}\right)d\xi = Ke^{-rt}\Phi\left(\frac{\ln K-x-\mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right);$$

$$-\frac{e^{-rt}}{\sqrt{2\pi t}\sigma}\int\limits_{x-\ln K}^{\infty}\exp\left(-\frac{(\xi+\mu t)^2}{2\sigma^2 t}\right)e^{x-\xi}\,d\xi = -e^x\Phi\left(\frac{\ln K-x-t(\mu+\sigma^2)}{\sigma\sqrt{t}}\right).$$

Подставив эти выражения в (12), получаем искомую формулу (7).

Литература

1. **Владимиров В.С.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988. 512 с.

2. **Ширяев А. М.** О некоторых понятиях и стохастических моделях финансовой математики// *Теория вероятностей и ее применение. 1994. Т.39. Вып.1. С. 5 - 22.*

3. **Ширяев А. Н., Кабанов Ю. М., Крамков Д. О., Мельников А. В.** К теории расчетов опционов европейского и американского типов. Непрерывное время// *Теория вероятностей и ее применение. 1994. Т.39. Вып.1. С. 80 - 129.*

4. **Ширяев А. Н.** Основы стохастической финансовой математики. Т.2. Теория. М.: ФАЗИС, 1998. 544 с. (Стохастика, вып.3).

5. **Friedman A.** Parabolic variational inequalilies in one space dimension and smoothness of the free boundary// *Journal of Functional Analysis. 1975. No.18. pp. 151-176.*

6. **Kim J.** The analitic valuation of American options// *The Review of Financial Studies. 1990. Vol.3. No.4. pp. 547-572.*

7. **Lamberton D.** Error estimates for approximation of American Put options// *The Annals of Applied Probability. 1998. Vol. 8. No. 1. pp. 206-233.*

8. **Merton R.C.** Theory of rational option pricing// *Bell J. Economics and Managment Science. 1973, v. 4, pp. 141-183.*

Summary

Kholopova M. A. Generalized Caushy problem for the American Put option cost

A new technique based on distributions is applied to evaluate American options. In particular, the explicit solution of generalized Caushy problem with free boundary (Stefan problem) gives the well known integral formula for the American Put option price and its boundary function.

Сыктывкарский университет

Поступила 9.10.00