*Вестник Сыктывкарского университета.*
*Сер.1.Вып.4.2001*

**УДК 517.2**

# Задача Римана-Гильберта для обобщенного уравнения Коши-Римана с сингулярностью

*А.Ю.Тимофеев, Т.Е.Цывунина*

В данной работе решается задача Римана-Гильберта для обобщенной системы Коши-Римана с сингулярной особенностью.

$$\partial_{\overline{z}} w + \frac{a}{2\overline{z}} w + \frac{b}{2\overline{z}} \overline{w} = 0, \quad a, b \in C$$

с краевым условием $\mathrm{Re}[z^{-m} w] = g(z), m \in Z$, где $g(z)$ — заданная функция. Результаты данной работы продолжают исследования Л .Г. Михайлова, З. Д. Усманова, А. Тунгатарова и др.

Обобщенной системой Коши-Римана называется эллиптическая система уравнений с частными производными первого порядка следующего вида

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + au + bv = 0, \\ &\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + cu + dv = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где $u$ и $v$ — искомые, а $a$, $b$, $c$, $d$ — заданные вещественные функции в некоторой области $G$ действительных переменных $x$, $y$.

Если ввести комплексную переменную $z = x + iy$, $i^2 = -1$, искомую комплекснозначную функцию $w = u + iv$, а также обозначения:

$$A(z) = \frac{1}{4}(a + d + ic - ib),$$

$$B(z) = \frac{1}{4}(a - d + ic + ib),$$

$$\partial_{\overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

то система (1) может быть записана в форме

$$\partial_{\bar z} w + A(z)w + B(z)\overline{w} = 0.$$

Задача Римана-Гильберта представляет собой решение в заданном классе уравнения

$$\partial_{\bar z} w + \frac{a}{2\bar z} w + \frac{b}{2\bar z}\overline{w} = 0, \quad a, b \in C \tag{2}$$

с краевым условием

$$\mathrm{Re}[z^{-m} w] = g(z), m \in Z, \tag{3}$$

где $g(z)$ — заданная функция.

Будем предполагать, что $g(\varphi) = g(e^{ik\varphi})$ разложима в абсолютно и равномерно сходящийся ряд Фурье по переменной $\varphi$:

$$g(\varphi) = g_o + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} g_k e^{ik\varphi} + \overline{g}_k e^{-ik\varphi} \tag{4}$$

где

$$g_o = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\varphi)d\varphi, \quad g_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\varphi)e^{-ik\varphi}d\varphi \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

Решения ищутся в пространстве

$$\Omega := L_{a_1,\infty} \cap C_{\bar z}(G \setminus \{0\}) \cap C(\overline{G} \setminus \{0\}),$$

где

$$L_{a_1,\infty} = \{f : |f(z)||z|^{a_1} \in L_\infty(G)\} \quad \text{и} \quad a_1 = \mathrm{Re}\, a.$$

Исследование краевой задачи будет основываться на представлении решений модельного уравнения в форме

$$w(z)|z|^{a_1} = w_o(r) + \sum_{k=1}^{\infty} C_{k,1} r^{\mu_k} e^{ik\varphi} - \overline{C}_{k,1}\frac{\overline{\mu}_k - (k + ia_2)}{\overline{b}} r^{\overline{\mu}_k} e^{-ik\varphi}, \tag{5}$$

которое было получено в работе М. Райссига и А.Ю. Тимофеева [1] для класса функций $L_{a_1,\infty}(G)$, где

$$L_{a_1,\infty} = \{f : |f(z)||z|^{a_1} \in L_\infty(G)\} \quad \text{и} \quad a_1 = \mathrm{Re}\, a.$$

Случай $m = 0$ исследован в совместной работе А.Ю. Тимофеева и М. Райссига [1]. Случай $m > 0$ исследован в дипломной работе Л.П. Баталовой (СыктГУ, 1999).

Для случая $m < 0$ справедлива теорема.

**Теорема 1.** *В пространстве*

$$\Omega := L_{a_1,\infty} \cap C_{\overline{z}}(G \setminus \{0\}) \cap C(\overline{G} \setminus \{0\}),$$

*где* $L_{a_1,\infty} = \{f : |f(z)||z|^{a_1} \in L_\infty(G)\}$ *и* $a_1 = \mathrm{Re}\, a$. *однородная краевая задача (2) - (3)* ($g = 0$) *не имеет решений, отличных от нуля. Неоднородная краевая задача (2) - (3) допускает решения тогда, когда* $g(z)$ *удовлетворяет* $|m|$ *условиям разрешимости:*

$$\begin{gathered} g_p + \sum_{\beta=1}^{\infty} \overline{g}_{2\beta|m|+p} \cdot \prod_{\delta=0}^{\beta-1} \overline{\lambda}_{(2\delta+1)|m|-p} + \\ + \sum_{\beta=1}^{infty} g_{2\beta|m|+p} \cdot \prod_{\delta=0}^{\beta-1} \lambda_{(2\delta+1)|m|+p} = 0, \\ p = 1, 2, \ldots, |m| - 1, \end{gathered} \tag{6}$$

$$g_o + \mathrm{Re}[\sum_{\beta=1}^{\infty} g_{(2\beta+1)|m|} \prod_{\delta=o}^{\beta-1} \lambda_{(2\delta+1)|m|}] = 0,$$

где $p = 1, 2, \ldots, |m| - 1$.

Доказательство.

При доказательстве используем схему теоремы 9.3(см.[2], стр 58).

Подстановка (5) в краевое условие (3) приводит к бесконечной системе алгебраических уравнений для определения констант $C_{k,1}$:

$$\begin{gathered} \mathrm{Re}\Big[w_o(1)e^{-i|m|\varphi} + \sum_{k=1}^{\infty} \big(C_{k,1}e^{i(k-|m|)\varphi} - \overline{C}_{k,1}\overline{\lambda}_k e^{-i(k+|m|)\varphi}\big)\Big] = \\ = g(\varphi) = g_o + \sum_{k=1}^{\infty} (g_k^{'} \cos k\varphi - g_k^{''} \sin k\varphi), \end{gathered}$$

где

$$\overline{\lambda}_k = \frac{\overline{\mu}_k - (k + ia_2)}{\overline{b}}, \quad \text{тогда} \quad \lambda_k = \frac{\mu_k - (k - ia_2)}{b}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $e^{ik\varphi}$, получим бесконечную систему алгебраических уравнений:

$$\mathrm{Re}(-C_{|m|,1}\lambda_{|m|}) = g_o, \tag{7}$$

$$-C_{|m|+p,1}\lambda_{|m|+p} - \overline{C}_{|m|-p,1}\overline{\lambda}_{|m|-p} = g_p, \quad p = 1, \ldots, |m| - 1, \tag{8}$$

$$w_o(1) - C_{2|m|,1}\lambda_{2|m|} = g_{|m|}, \tag{9}$$

$$C_{p,1} - C_{2|m|+p,1}\lambda_{2|m|+p} = g_{|m|+p}, \quad p = 1, 2, \ldots \tag{10}$$

Из (7) определяется $C_{|m|,1} = -\dfrac{g_o + iq_o}{\lambda_{|m|}}$, где $q_o$ — произвольная вещественная константа.

Значение величины $q_o$ позволяет определить все константы

$$C_{(2k+1)|m|,1}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

с помощью цепочки формул, которые выводятся следующим образом:

$$C_{p,1} - C_{2|m|+p,1}\lambda_{2|m|+p} = g_{|m|+p},$$

$$2|m| + p = (2k+1)|m|, \quad p = 2k|m| + |m| - 2m = (2k-1)|m|,$$

тогда

$$C_{(2k-1)|m|,1} - C_{(2k+1)|m|,1}\lambda_{(2k+1)|m|} = g_{(2k+1)|m|}. \tag{11}$$

Из (11) методом математической индукции получаем, что

$$C_{(2k+1)|m|,1} = -\frac{1}{\prod\limits_{\delta=0}^{k} \lambda_{(2\delta+1)|m|}} \cdot \left[g_o + iq_o + \sum_{\beta=1}^{k} g_{(2\beta+1)|m|} \cdot \prod_{\delta=0}^{\beta-1} \lambda_{(2\delta+1)|m|}\right]. \tag{12}$$

Положим $\overline{C}_{|m|-p,1} = -\dfrac{q_{|m|-p}}{\lambda_{|m|-p}}$, где $q_{|m|-p}$, $p = 1, 2, \ldots, |m|-1$ — произвольная комплексная постоянная. Уравнение (8) будет иметь следующий вид:

$$C_{|m|+p,1} = -\frac{g_p - q_{|m|-p}}{\lambda_{|m|+p}}, \quad \text{где} \quad p = 1, 2, \ldots, |m|-1. \tag{13}$$

Значения величин $q_{|m|-p}$, $p = 1, 2, \ldots, |m|-1$ позволяют определить все константы $C_{(2k+1)|m|\pm p,1}$, $p = 1, 2, \ldots, |m|-1$, $k = 1, 2, \ldots$ с помощью цепочки формул:

в уравнении (10) положим

$$2|m| + j = (2k+1)|m| \pm p,$$

$$j = (2k-1)|m| \pm p, \quad \text{где} \quad p = 1, 2, \ldots, |m|-1.$$

Получим следующую рекуррентную формулу:

$$
\begin{gathered}
C_{(2k-1)\pm p,1} - C_{(2k+1)\pm p,1}\lambda_{(2k+1)|m|\pm p} = g_{2k|m|\pm p}, \\
p = 1, 2, \dots, |m| - 1, \quad k = 1, 2, \dots
\end{gathered} \tag{14}
$$

Тогда из (14) методом математической индукции получим формулы

$$
\begin{gathered}
C_{(2k+1)|m|+p,1} = -\frac{1}{\prod\limits_{\delta=0}^{k} \lambda_{(2\delta+1)|m|+p}} \cdot \\
\cdot \left[ g_p - q_{|m|-p} + \sum_{\beta=1}^{k} g_{2\beta|m|+p} \cdot \prod_{\delta=0}^{\beta-1} \lambda_{(2\delta+1)|m|+p} \right],
\end{gathered} \tag{15}
$$

$$
\begin{gathered}
C_{(2k+1)|m|-p,1} = -\frac{1}{\prod\limits_{\delta=0}^{k} \lambda_{(2\delta+1)|m|-p}} \cdot \\
\cdot \left[ \overline{q}_{|m|-p} + \sum_{\beta=1}^{k} g_{2\beta|m|-p} \cdot \prod_{\delta=0}^{\beta-1} \lambda_{(2\delta+1)|m|-p} \right], \quad \text{где} \\
p = 1, 2, \dots, |m| - 1, \quad k = 1, 2, \dots
\end{gathered} \tag{16}
$$

Положив в уравнении (10)

$$
p = 2k|m|, \quad \text{где} \quad k = 1, 2, \dots
$$

получим рекуррентную формулу:

$$
C_{2k|m|,1} - C_{2(k+1)|m|,1}\lambda_{2(k+1)|m|} = g_{2(k+1)|m|}, \quad k = 1, 2, \dots \tag{17}
$$

Пусть $w_o(1) = q_{|m|}$, где $q_{|m|}$ — произвольная комплексная постоянная, тогда из уравнения (9) имеем

$$
C_{2|m|,1} = \frac{q_{|m|} - g_{|m|}}{\lambda_{2|m|}}.
$$

Зная значение величины $q_{|m|}$, можем определить все коэффициенты $C_{2(k+1)|m|,1}$, $k = 1, 2, \dots$ с помощью следующей цепочки формул. Рассмотрим уравнение (17).

Для <u>$k = 1$ :</u>

$$
C_{4|m|,1} = \frac{C_{2|m|,1} - g_{4|m|}}{\lambda_{4|m|}}.
$$

Тогда

$$
C_{4|m|,1} = \frac{q_m - g_{|m|}}{\lambda_{2|m|}\lambda_{4|m|}} - \frac{g_{4|m|}}{\lambda_{4|m|}}.
$$

Повторяя выкладки, методом математической индукции получим следующую формулу:

$$C_{2(k+1)|m|,1} = -\frac{1}{\prod\limits_{\delta=0}^{k+1}\lambda_{\delta|m|}} \cdot \left[g_{|m|} - q_{|m|} + \sum_{\beta=1}^{k+1} g_{2\beta|m|} \cdot \prod_{\delta=0}^{\beta-1}\lambda_{\delta|m|}\right]. \qquad (18)$$

Таким образом, через одну вещественную константу $q_o$ и $|m|$ комплексных констант $q_1$, $q_2$, $\ldots$, $q_{|m|-1}$, $q_{|m|}$, а также через известные коэффициенты Фурье $g_o$, $q_k$ $(k = 1,\ 2,\ \ldots)$ функции $g(z)$, $|z| < 1$, удалось выразить все константы $C_{k,1}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ в формуле (5).

Следующим этапом доказательства является доказательство сходимости ряда (5).

Рассмотрим ряд (5), в котором отличны от нуля только коэффициенты вида $C_{(2k+1)|m|}$, $k = 1,\ 2,\ \ldots$ Введем обозначения $q(k) = (2k+1)|m|$, тогда

$$w_{|m|}(z)|z|^{a_1} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{q(k),1} r^{\mu_{q(k)}} e^{iq(k)\varphi} - \overline{C}_{q(k),1}\overline{\lambda}_{q(k)} r^{\overline{\mu}_{q(k)}} e^{-ik(k)\varphi}, \qquad (19)$$

Этот ряд формально удовлетворяет уравнению (2) и специальному краевому условию (3), в котором все коэффициенты $g(z)$ за исключением $g_{2k|m|}$, $k = 1,\ 2,\ \ldots$ равны нулю.

Так как нас интересуют только функции $w(z)$ из пространства $L_{a_1,\infty}$, то должен сходиться ряд

$$\left|w_{|m|}(z)\right||z|^{a_1} = \left|\sum_{k=0}^{\infty} C_{q(k),1} r^{\mu_{q(k)}} e^{iq(k)\varphi} - \overline{C}_{q(k),1}\overline{\lambda}_{q(k)} r^{\overline{\mu}_{q(k)}} e^{-iq(k)\varphi}\right|. \qquad (20)$$

Мы должны проконтролировать выполнение необходимого условия сходимости ряда:

$$\lim_{k\to\infty} \left|C_{q(k),1} r^{\mu_{q(k)}} e^{iq(k)\varphi} - \overline{C}_{q(k),1} r^{\overline{\mu}_{q(k)}}\overline{\lambda}_{q(k)} e^{-iq(k)\varphi}\right| = 0.$$

Если $z$ принадлежит области $G$, то есть $|z| < 1$, то

$$\begin{aligned} &|C_{q(k),1} r^{\mu_{q(k)}} e^{iq(k)\varphi} - \overline{C}_{q(k),1} r^{\overline{\mu}_{q(k)}}\overline{\lambda}_{q(k)} e^{-iq(k)\varphi}| \leq \\ &\leq |C_{q(k),1}| \cdot |r^{\mu_{q(k)}}| + |\overline{C}_{q(k),1}| \cdot |\overline{\lambda}_{q(k)}| \cdot |r^{\overline{\mu}_{q(k)}}| = \\ &= |C_{q(k),1}| \cdot |e^{\mu_{q(k)}\ln r}| \cdot (1 + |\lambda_{q(k)}|). \end{aligned}$$

Известно, что $|e^{\mu_{q(k)}\ln r}| = e^{\mathrm{Re}\,\mu_{q(k)}\ln r}$. В работе [1] было доказано, что $\lim\limits_{k\to\infty}\mathrm{Re}\,\mu_{q(k)} = \infty$, а в дипломной работе Л. П. Баталовой, что $\lim\limits_{k\to\infty}|\lambda_{q(k)}| = 0$.

Тогда $\lim\limits_{k\to\infty} e^{\mathrm{Re}\,\mu_{q(k)}\ln r} = 0$. Значит, для сходимости ряда (20) необходимо, чтобы коэффициенты $|C_{q(k),1}|$ были ограничены. Но ряд должен сходиться и на границе области $G$, то есть для таких $z$, что $|z| = 1$, а это выполняется только тогда, когда $\lim\limits_{k\to\infty}|C_{q(k),1}| = 0$. Тогда $\lim\limits_{k\to\infty} C_{q(k),1} = 0$, то есть

$$g_o + iq_o + \sum_{\beta=1}^{\infty} g_{(2\beta+1)|m|}\cdot\prod_{\delta=o}^{\beta-1}\lambda_{(2\delta+1)|m|} = 0.$$

Разделяя действительную и мнимую части, получим два вещественных условия:

$$g_o + \mathrm{Re}[\sum_{\beta=1}^{\infty} g_{(2\beta+1)|m|}\cdot\prod_{\delta=o}^{\beta-1}\lambda_{(2\delta+1)|m|}] = 0, \tag{21}$$

$$g_o + \mathrm{Im}[\sum_{\beta=1}^{\infty} g_{(2\beta+1)|m|}\cdot\prod_{\delta=o}^{\beta-1}\lambda_{(2\delta+1)|m|}] = 0. \tag{22}$$

Последнее условие следует понимать как формулу для определения произвольной вещественной константы $q_o$.

Далее, рассматривая ряды $w_{|z|\pm p}(z)$, где $p = 1, 2, \ldots, |m| - 1$, и $w_o(z)$, порождаемые (5) с отличными от нуля коэффициентами $C_{(2k+1)|m|+p,1}$, $C_{(2k+1)|m|+p,1}$ и $C_{2(k+1)|m|,1}$ соответственно, и проводя рассуждения, аналогичные предыдущим, устанавливаем, что необходимые условия для их сходимости к требованиям:

$$\lim_{k\to\infty} C_{(2k+1)|m|+p,1} = \lim_{k\to\infty} C_{(2k+1)|m|-p,1} = \lim_{k\to\infty} C_{2(k+1)|m|,1} = 0$$

В согласии с (15), (16) и (18) это эквивалентно соотношениям:

$$g_p - \overline{q}_{|m|-p} + \sum_{\beta=1}^{\infty} g_{2\beta|m|+p}\cdot\prod_{\delta=0}^{\beta-1}\lambda_{(2\delta+1)|m|+p} = 0, \tag{23}$$

$$g_{|m|-p} + \sum_{\beta=1}^{\infty} g_{2\beta|m|+p}\cdot\prod_{\delta=0}^{\beta-1}\lambda_{(2\delta+1)|m|+p} = 0, \tag{24}$$

$$g_{|m|} - q_{|m|} + \sum_{\beta=1}^{\infty} g_{2\beta|m|} \cdot \prod_{\delta=0}^{\beta-1} \lambda_{\delta|m|} = 0. \tag{25}$$

Равенство (24) служит для определения произвольной константы $q_{|m|-p}$. Исключая ее в (23), получим условие разрешимости:

$$\begin{gathered} g_p + \sum_{\beta=1}^{\infty} \overline{g}_{2\beta|m|+p} \cdot \prod_{\delta=0}^{\beta-1} \overline{\lambda}_{(2\delta+1)|m|-p} + \\ + \sum_{\beta=1}^{infty} g_{2\beta|m|+p} \cdot \prod_{\delta=0}^{\beta-1} \lambda_{(2\delta+1)|m|+p} = 0, \\ p = 1, 2, \ldots, |m| - 1. \end{gathered} \tag{26}$$

Из соотношения (25) можно найти произвольную комплексную константу $q_{|m|}$.

Рассмотрим однородную краевую задачу ($q(z) = 0$), то есть для любого $k$ все коэффициенты $q_k$ равны нулю. Тогда соотношения (22) — (25) порождают следующие условия:

$$q_o = 0,$$

$$q_{|m|\pm p} = 0, \quad p = 1,\ 2,\ \ldots,\ |m| - 1,$$

$$q_{|m|} = 0.$$

Из этих условий и формул, выражающих коэффициенты $C_{k,1}$, получаем, что $C_{k,1} = 0$, для $k = 1,\ 2,\ \ldots$

Таким образом, получили, что однородная краевая задача $g(z) = 0$ имеет только тривиальное решение (то есть $w(z) = 0$).

Рассмотрим неоднородную краевую задачу. Неоднородная краевая задача имеет решения только тогда, когда выполнены $|m|$ условий разрешимости (21) и (26). Сумма

$$w_o(z) + \sum_{p=1}^{|m|-1} w_{|m|-p}(z) + w_{|m|}(z)$$

задает непрерывное в области $G$ решение краевой задачи (2), (3). Таким образом, теорема доказана.

**Замечание 1.** *При выполнении условий разрешимости (21) и (26) решение задачи(2), (3)дается формулой:*

$$w(z)=\sum_{p=0}^{|m|}\sum_{k=0}^{\infty}C_{(2k+1)|m|+p,1}r^{\mu_{(2k+1)|m|+p}}e^{i((2k+1)|m|+p)\varphi}-$$
$$-\overline{C}_{(2k+1)|m|+p,1}\overline{\lambda}_{(2k+1)|m|+p}r^{\overline{\mu}_{(2k+1)|m|+p}}e^{-i((2k+1)|m|+p)\varphi}+$$
$$+\sum_{p=0}^{|m|}\sum_{k=0}^{\infty}C_{(2k+1)|m|-p,1}r^{\mu_{(2k+1)|m|-p}}e^{i((2k+1)|m|-p)\varphi}-$$
$$-\overline{C}_{(2k+1)|m|-p,1}\overline{\lambda}_{(2k+1)|m|-p}r^{\overline{\mu}_{(2k+1)|m|-p}}e^{-i((2k+1)|m|-p)\varphi},$$

*где*

$$\mu_k=\sqrt{|b|^2+(k-ia_2)^2},\quad r^{\mu_k}=e^{\mu_k\ln r},$$

$$\lambda_k=\frac{\mu_k-(k-ia_2)}{b},$$

$$C_{2|m|,1}=\frac{1}{\lambda_{2|m|}}\left[g_{|m|}+\sum_{\beta=1}^{\infty}g_{2\beta|m|}\prod_{\delta=0}^{\beta-1}\varphi_{\delta|m|}\right],$$

$$\overline{C}_{|m|-p,1}=-\frac{1}{\lambda_{|m|-p}}\sum_{\beta=1}^{\infty}g_{2\beta|m|-p}\prod_{\delta=0}^{\beta-1}\varphi_{(2\delta+1)|m|-p},$$

$$C_{|m|+p,1}=-\frac{1}{\overline{\lambda}_{|m|+p}}\left[g_p-\sum_{\beta=1}^{\infty}g_{2\beta|m|-p}\prod_{\delta=0}^{\beta-1}\varphi_{(2\delta+1)|m|-p}\right],$$

$$C_{|m|,1}=-\frac{1}{\lambda_{|m|}}\left[g_o+i\,\mathrm{Im}\Big(\sum_{\beta=1}^{\infty}g_{(2\beta+1)|m|}\prod_{\delta=0}^{\beta-1}\varphi_{(2\delta+1)|m|}\Big)\right].$$

## Литература

1. **Reissig M., Timofeev A.** Special Vecua equations with singular coefficients// *Appl. Analysis. 1999. V.73 (1-2). P. 187-199.*

2. **Усманов З.Д.** Обобщенные системы Коши-Римана с сингулярной точкой. Душанбе, 1993.

**Summary**

**Timofeew A.Y., Cyvunina T.E.** The problem of Riemann-Hilbert for the generalized Cauchy-Riemann system with a singularity

In the present paper the problem of Riemann-Hilbert for the generalized Cauchy-Riemann system with a singularity

$$\partial_{\bar z} w + \frac{a}{2\bar z} w + \frac{b}{2\bar z}\overline{w} = 0, \quad a, b \in C$$

$$\mathrm{Re}[z^{-m} w] = g(z), m \in Z$$

is solved.

*Сыктывкарский университет* *Поступила 30.10.2000*