*Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1.Вып.4.2001*

УДК 513.88

О ФУНКЦИОНАЛЕ ШОКЕ И ОДНОМ ЕГО ПРИМЕНЕНИИ В ТЕОРИИ МЕРЫ

А.Г.Порошкин, Ю.В.Шергин

В настоящей работе дано подробное изложение основных свойств неаддитивного расширенного функционала на конусе положительных элементов K_σ-пространства со слабой единицей, названного авторами функционалом Шоке по аналогии с применяемым в теории нечеткого интегрирования термином "интеграл Шоке". Предложено одно применение построенного функционала в теории меры для нового доказательства теоремы о нормируемости σ-полной булевой алгебры с существенно положительной сильно субаддитивной непрерывной нечеткой мерой.

1. Введение

В работе Шоке [1] было дано определение неаддитивного интеграла от положительной измеримой функции f по монотонной функции множества μ через лебеговский (или римановский) интеграл от "функции распределения" $\mu T(f > \lambda)$. Впоследствии ряд авторов неоднократно обращался к этому определению интеграла, изучению его свойств и возможным его применениям (см., например, [2–5]).

Идея определения интеграла в [1] была развита одним из авторов настоящей статьи для построения неаддитивного расширенного функционала на положительных элементах K_σ-пространства X со слабой единицей; были выделены важные его свойства, которые нашли применение в решении одной задачи, связанной с порядковыми топологиями в K-пространствах (см. [8]). Дальнейшее изучение этого функционала было проведено в дипломной работе второго автора "Об одном неаддитивном функционале в K-пространстве с единицей" (1983), выполненной под руководством первого, а также в работах [16], [17].

В настоящей работе мы даем подробное изложение основных свойств функционала, введенного в [8] (мы назвали его *функционалом Шоке* по аналогии с применяемым в теории нечеткого интегрирования термином "*интеграл Шоке*"). При этом доказательство простейших свойств мы опускаем, отсылая читателя к работе [16]. Идеи некоторых доказательств навеяны работами [2–5], хотя в чистом виде на случай функций на булевых алгебрах они не могут быть перенесены. Предлагаем еще одно применение разработанного аппарата в теории меры: даем новое доказательство теоремы о нормируемости σ-полной булевой алгебры, на которой имеется существенно положительная сильно субаддитивная непрерывная субмера. Этот результат, связанный с проблемой Магарам [6], известен по работам [7, 14, 15]. Он получен нами с привлечением других идей и результатов, приведенных в настоящей статье и в [13].

2. Вспомогательные семейства единичных элементов

В нашей работе мы в основном придерживаемся терминологии, принятой в монографии [10] с заменой термина "единица" более употребительным ныне термином "слабая единица". В необходимых случаях поясняем также основные понятия из [10] в терминах, принятых в более поздних отечественных изданиях (см., например, [11]) или научных статьях и зарубежной литературе.

Пусть $X-K_\sigma$-пространство (т.е. счетно-полная векторная решетка), 1 – слабая единица в X (элемент со свойством $1 \wedge x > 0 \quad \forall x > 0$), E – база пространства X (множество *всех единичных* элементов X : $e \in E := e \wedge (1 - e) = 0$).

Каждому элементу $x \in X$ сопоставим следующие два однопараметрические семейства единичных элементов $(a^x_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ и $(b^x_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$, определяемых равенствами:

$$a^x_\lambda := (e^x_\lambda)' = 1 - e^x_\lambda; \quad b^x_\lambda := e_{(\lambda 1 - x)_-} = \big((\lambda 1 - x)_-\big)1, \tag{1}$$

где $(e^x_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ – характеристика элемента x [10, с. 119], а $e_{(\lambda 1 - x)_-}$ – след элемента $(\lambda 1 - x)_-$, $\lambda \in \mathbb{R}$; (u) означает оператор проектирования на компоненту, порожденную элементом u [10, с. 102]. Заметим, что для $x \geqslant 0$ будет $b^x_0 = e_x$.

Поскольку $\forall u \in X$ имеем $u_- = (-u) \vee 0 = (-u)_+$, то b^x_λ можем выразить иначе через характеристику элемента $(-x)$; а именно

$$b^x_\lambda = e_{(\lambda 1 - x)_-} = e_{(-\lambda 1 - (-x))_+} = e^{-x}_{-\lambda}. \tag{2}$$

В целях сокращения в дальнейшем эти семейства мы иногда обозначаем просто a_λ, b_λ, указывая верхние индексы лишь в случаях надобности.

Отметим некоторые свойства семейств a^x_λ и b^x_λ.

1^o. $a_\lambda \geqslant b_\lambda \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Следствие. Для любых $x \in X^+$ и $\lambda \in \mathbb{R}^+$ справедливы неравенства $\lambda b^x_\lambda \leqslant \lambda a^x_\lambda \leqslant a^x_\lambda x$.

2^o. a_λ, b_λ убывают от 1 до 0: $\sup\limits_\lambda a_\lambda = \sup\limits_\lambda b_\lambda = 1$, $\inf\limits_\lambda a_\lambda = \inf\limits_\lambda b_\lambda = 0$.

3^o. $a_\lambda = \inf\limits_{\mu<\lambda} a_\mu$, $b_\lambda = \sup\limits_{\mu>\lambda} b_\mu \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$. Другими словами, a_λ *непрерывна слева*, b_λ *непрерывна справа.*

Замечание. a^x_λ может иметь разрыв справа и b^x_λ слева.

4^o. Если $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$, то $a^x_{\lambda_2} \leqslant b^x_\lambda \leqslant a^x_\lambda \leqslant b^x_{\lambda_1}$ для любого $x \in X$.

5^o. Если $\lambda_0 1 \leqslant x$, то $a^x_\lambda = 1$ при $\lambda \leqslant \lambda_0$ и $b^x_\lambda = 1$ при $\lambda < \lambda_0$. Если $\lambda_0 1 \geqslant x$, то $a^x_\lambda = 0$ при $\lambda > \lambda_0$ и $b^x_\lambda = 0$ при $\lambda \geqslant \lambda_0$.

6^o. Если $x \geqslant 0$, то $a^x_\lambda = 1$ при $\lambda \leqslant 0$, $b^x_\lambda = 1$ при $\lambda < 0$.

7^o. Пусть $x, y, x_\xi \in X$, $\xi \in \Sigma$. Тогда справедливы равенства:

а) $b_\lambda^{\bigvee_\xi x_\xi} = \bigvee\limits_\xi b^{x_\xi}_\lambda \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$, если $\bigvee\limits_\xi x_\xi$ существует;

б) $a_\lambda^{\bigwedge_\xi x_\xi} = \bigwedge\limits_\xi a^{x_\xi}_\lambda \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$, если $\bigwedge\limits_\xi x_\xi$ существует;

в) $b^{x\wedge y}_\lambda = b^x_\lambda \wedge b^y_\lambda \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$;

г) $a^{x\vee y}_\lambda = a^x_\lambda \vee a^y_\lambda \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Естественно, равенства в) и г) распространяются на любое конечное число элементов.

8^o. Если $x \leqslant y$, то $a^x_\lambda \leqslant a^y_\lambda$, $b^x_\lambda \leqslant b^y_\lambda$.

9^o. Если $x_n \uparrow x$, то $b^{x_n}_\lambda \uparrow b^x_\lambda$. Если $x_n \downarrow x$, то $a^{x_n}_\lambda \downarrow a^x_\lambda$.

10^o. Если $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ – возрастающее направление в X ([10], с. 15]) и $x_\alpha \uparrow x$, то $b^{x_\alpha}_\lambda \uparrow b^x_\lambda$. Если $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ – убывающее направление в X ([10], с. 15]) и $x_\alpha \downarrow x$, то $a^{x_\alpha}_\lambda \downarrow a^x_\lambda$.

Таким образом, b^x_λ о-непрерывна снизу (по x), a^x_λ о-непрерывна сверху (по x).

Замечание. Свойства в) и г) в 7^o на бесконечные множества элементов не распространяются. Можно показать, что справедливы в любом случае неравенства $a_\lambda^{\bigvee_\xi x_\xi} \geqslant \bigvee\limits_\xi a^{x_\xi}_\lambda$, $b_\lambda^{\bigwedge_\xi x_\xi} \leqslant \bigwedge\limits_\xi b^{x_\xi}_\lambda$.

11^o. Если $x \in X$ и λ_1 и λ_2 – две различные точки разрыва a^x_λ ($a^x_{\lambda_i} \neq a^x_{\lambda_i+0}$), то скачки a^x_λ в этих точках дизъюнктны:

$(a^x_{\lambda_1} - a^x_{\lambda_1+0})$ d $(a^x_{\lambda_2} - a^x_{\lambda_2+0})$. Аналогичное утверждение верно для b^x_λ : $(b^x_{\lambda_1-0} - b^x_{\lambda_1})$ d $(b^x_{\lambda_2-0} - b^x_{\lambda_2})$, если λ_1 и λ_2 различные точки разрыва b^x_λ.

12^o. Если $X - K_\sigma$-пространство счетного типа, то множество точек разрыва a^x_λ (как и множество точек разрыва b^x_λ) не более чем счетно.

13^o. Если в точке $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ непрерывна хотя бы одна из "характеристик" a^x_λ и b^x_λ, то $a^x_{\lambda_0} = b^x_{\lambda_0}$.

14^o. $a^{x\mp\alpha 1}_\lambda = a^x_{\lambda\pm\alpha}$, $b^{x\mp\alpha 1}_\lambda = b^x_{\lambda\pm\alpha}$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

3. Функционал Шоке, порожденный нечеткой мерой

Пусть снова $X - K_\sigma$-пространство со слабой единицей 1, E - база X. Пусть μ - нечеткая мера на E, т.е. функция $\mu : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ со свойствами: 1) $\mu 0 = 0$; 2) $e_1 \leqslant e_2 \Longrightarrow \mu e_1 \leqslant \mu e_2$. (Иногда в определение нечеткой меры вводится еще условие *непрерывности снизу* по последовательностям: $e_n \uparrow e \Longrightarrow \mu e_n \longrightarrow \mu e$. Мы отказываемся от этого требования.)

Для любого $x \in X^+$ определим две функции на $[0, +\infty)$

$$f_x(\lambda) = \mu a^x_\lambda, \quad g_x(\lambda) = \mu b^x_\lambda. \tag{3}$$

Из свойств μ, убывания "характеристик" a^x_λ, b^x_λ и неравенства $b^x_\lambda \leqslant a^x_\lambda$ при любом λ, а также свойства 4^o в п.2 мы получаем, что

а) $0 \leqslant g_x(\lambda) \leqslant f_x(\lambda) \leqslant +\infty$, $\lambda \in [0, +\infty)$,

б) $g_x(\lambda)$ и $f_x(\lambda)$ убывают (в широком смыле) на $[0, +\infty)$,

в) если $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$, то $g_x(\lambda_2) \leqslant f_x(\lambda_2) \leqslant g_x(\lambda) \leqslant f_x(\lambda) \leqslant g_x(\lambda_1) \leqslant f_x(\lambda_1)$.

Из в) и монотонности g_x и f_x следует, что в точках непрерывности (т.е. почти всюду на $\mathbb{R}^+$) эти функции совпадают, а поэтому совпадают их лебеговы (или римановы) интегралы. Положим

$$\varphi_\mu(x) := \int_0^\infty f_x(\lambda) d\lambda = \int_0^\infty g_x(\lambda) d\lambda. \tag{4}$$

Функцию $\varphi_\mu : X^+ \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ мы назовем *функционалом Шоке*, порожденным нечеткой мерой μ. При этом, работая с одной нечеткой мерой μ, индекс μ в функционале φ_μ будем опускать.

Очевидны следующие свойства введенного функционала:

1^o. $0 \leqslant \varphi_\mu(x) \leqslant +\infty$ $\forall x \in X^+$.

2^o. $0 \leqslant x \leqslant y \Longrightarrow \varphi_\mu(x) \leqslant \varphi_\mu(y)$ (см. 8^o из § 1).

3^o. $\varphi_\mu(0) = 0$ (ибо $a^0_\lambda = b^0_\lambda = 0$ для $\lambda > 0$).

4^o. Если μ, ν – нечеткие меры и $\mu(e) \leqslant \nu(e)$ $\forall e$, то $\varphi_\mu(x) \leqslant \varphi_\nu(x)$ $\forall x \in X^+$.

Отметим еще некоторые свойства функционала φ_μ.

5^o. $\varphi(e) = \mu e$ $\forall e \in E$.

6^o. $\varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x)$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}^+$ $\forall x \in X^+$. Другими словами, φ_μ положительно однороден на X^+.

7^o. φ аддитивна "в горизонтальном смысле": $\varphi(x) = \varphi(x \wedge \alpha 1) + +\varphi(x - x \wedge \alpha 1)$ $\forall x \in X^+$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}^+$.

Следствие. $\varphi(x) = \lim\limits_{\alpha\to+0} \varphi(x - x \wedge \alpha 1) = \lim\limits_{\alpha\to+\infty} \varphi(x \wedge \alpha 1)$.

Действительно. $\lim\limits_{\alpha\to+0} \varphi(x - x \wedge \alpha 1) = \lim\limits_{\alpha\to+0} \int_\alpha^\infty g_x(\lambda)d\lambda = \varphi(x)$, $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} \varphi(x \wedge \alpha 1) = \lim\limits_{\alpha\to+\infty} \int_0^\alpha g_x(\lambda)d\lambda = \varphi(x)$.

8^o. Пусть $x \in X^+$, $0 < \xi_1 \leqslant \xi_2 \leqslant \ldots \leqslant \xi_n$, $x_k = x \wedge \xi_k 1$, $k = 1, \ldots, n$. Тогда

$$\varphi(x) = \varphi(x - x_n) + \varphi(x_n - x_{n-1}) + \ldots + \varphi(x_2 - x_1) + \varphi(x_1). \qquad (4)$$

Определение 1. ([10], с. 144). Элемент $p \in X$ называется *конечно-значным*, если он представим в виде линейной комбинации попарно дизъюнктных единичных элементов

$$p = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}, \quad e_i \mathrel{\mathrm{d}} e_j \ \text{ при } \ i \neq j. \qquad (5)$$

Сделаем по поводу этого определения несколько замечаний.

Замечание 1. В равенстве (5) семейство $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ можно считать полным (т.е. $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}^d = 0$). В противном случае к сумме (5) мы могли бы добавить еще одно слагаемое $\alpha_0 e_0$ с $\alpha_0 = 0$, $e_0 = (\bigvee\limits_{i=1}^{n} e_i)^d$, не влияющее на сумму (5). В дальнейшем эту сумму мы часто будем записывать в виде $\sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_i e_i$ с $\alpha_0 = 0$, **даже если окажется** $e_0 = 0$.

Замечание 2. Можно перенумеровать слагаемые в (5) и считать $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_n$. В случае $p \geqslant 0$ мы будем записывать его в виде

$$p = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i e_i, \quad 0 = \alpha_0 \leqslant \alpha_1 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_n, \quad e_i \mathrel{\mathrm{d}} e_j \ \text{ при } \ i \neq j. \qquad (5')$$

При этом в самой сумме будут допускаться и слагаемые $\alpha_i e_i$ с коэффициентом $\alpha_i > 0$ и $e_i = 0$.

Представление конечно-значного элемента p в виде $(5')$ назовем *стандартным*.

Замечание 3. Мы будем допускать запись конечно-значного элемента (5) и в виде линейной комбинации *не обязательно попарно дизъюнктных* единичных элементов. Например, с точки зрения вычисления функционала Шоке вместо (5′) удобнее записывать

$$p = \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i - \alpha_{i-1})s_i, \quad s_i = \sum_{k=i}^{n} e_k = \bigvee_{k=i}^{n} e_k, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (5'')$$

Такое представление p назовем *ярусным.*

Множество *всех конечно-значных* элементов X будем обозначать через L, а *всех положительных конечно-значных* элементов X – через L^+.

9°. Пусть $p \in L^+$ и $p = \sum\limits_{i=1}^{n}(\alpha_i - \alpha_{i-1})s_i$ с $\alpha_0 = 0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_n$ и $s_i = \sum\limits_{k=i}^{n} e_k$, $i = 1, \ldots, n$. Тогда

$$\varphi(p) = \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i - \alpha_{i-1})\mu s_i. \qquad (6)$$

Замечание 4. Формуле (6) можно придать несколько иной вид и записать ее с использованием значений функции a_λ^x в точках α_k и приблизить (6) к римановской интегральной сумме.

Действительно

$$a_{\alpha_k}^x = \bigvee_{\alpha_i \geqslant \alpha_k} e_i = \sum_{\alpha_i \geqslant \alpha_k} e_i = s_k. \qquad (7)$$

В силу этого формулу (6) можно написать в виде

$$\varphi(p) = \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k - \alpha_{k-1})\mu a_{\alpha_k}^x. \qquad (6')$$

Следствие. Пусть $h_i \in E$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $p = \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i h_i \in L$ ($\lambda_i \geqslant 0$, h_i – не обязательно дизъюнктны). Пусть $\gamma_n^i \longrightarrow_n \lambda_i$ ($\gamma_n^i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots m$) и $p_n = \sum\limits_{i=1}^{m} \gamma_n^i h_i$. Тогда $\varphi(p_n) \longrightarrow \varphi(p)$.

10°. Для $x = \sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_i e_i$, где $0 = \alpha_0 \leqslant \alpha_1 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_n$ верно также следующее равенство (в нем предполагаем $e_{n+1} = 0$ и $+\infty - (-\infty) =$

$+\infty$)

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \Big[\mu\Big(\sum_{k=i}^{n+1} e_k\Big) - \mu\Big(\sum_{k=i+1}^{n+1} e_k\Big)\Big]. \tag{8}$$

Получаем сразу, раскрыв скобки в (6), в случае, когда все μs_i в нем конечны. При наличии слагаемых, равных $+\infty$, $\varphi(x) = +\infty$ и равенство (8) также выполнено.

4. Свойства функционала Шоке, связанные со свойствами μ

Напомним сначала некоторые определения, связанные с нечеткими мерами на булевой алгебре E.

Определение 2. Нечеткая мера μ на E называется:

- *субаддитивной*, если $\mu(e_1 \vee e_2) \leqslant \mu e_1 + \mu e_2$ $\forall e_1, e_2 \in E$;

- *сильно субаддитивной*, если $\mu(e_1 \vee e_2) + \mu(e_1 \wedge e_2) \leqslant \mu e_1 + \mu e_2$ $\forall e_1, e_2 \in E$;

- *супераддитивной*, если $\mu(e_1 \vee e_2) \geqslant \mu e_1 + \mu e_2$ $\forall e_1, e_2 \in E$, $e_1 \,\mathrm{d}\, e_2$;

- *сильно супераддитивной*, если $\mu(e_1 \vee e_2) + \mu(e_1 \wedge e_2) \geqslant \mu e_1 + \mu e_2$ $\forall e_1, e_2 \in E$;

- *аддитивной*, если $\mu(e_1 \vee e_2) = \mu e_1 + \mu e_2$ $\forall e_1, e_2 \in E$, $e_1 \,\mathrm{d}\, e_2$;

- *σ-непрерывной снизу*, если $e_n \uparrow e \Longrightarrow \mu e_n \longrightarrow \mu e$;

- *σ-непрерывной сверху*, если $e_n \downarrow e \Longrightarrow \mu e_n \longrightarrow \mu e$;

- *условно σ-непрерывной сверху*, если $e_n \downarrow e$, $\mu e_1 < +\infty \Longrightarrow \mu e_n \longrightarrow \mu e$;

- *$o\sigma$-непрерывной*, если $e_n \xrightarrow{o\sigma} e \Longrightarrow \mu e_n \longrightarrow \mu e$;

- *условно $o\sigma$-непрерывной*, если $e_n \xrightarrow{o\sigma} e$ и $\exists\, \overline{e} : e_n \leqslant \overline{e}$ $\forall n$ и $\mu\overline{e} < +\infty$, то $\mu e_n \longrightarrow \mu e$;

- *σ-аддитивной*, если $\mu\Big(\bigvee_{n=1}^{\infty} e_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu e_n$ при $e_n \,\mathrm{d}\, e_m$ для $n \neq m$;

- *существенно положительной*, если $\mu e > 0$ $\forall e > 0$.

Очевидно, сильно субаддитивная нечеткая мера субаддитивна, а сильно супераддитивная нечеткая мера супераддитивна. Далее, понятно, условная $o\sigma$-непрерывность μ равносильна паре условий: условной σ-непрерывности сверху и σ-непрерывности снизу на множестве $E_0 = \{e \in E : \mu e < +\infty\}$.

11^o. Пусть $x = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i e_i$, $0 = \alpha_0 \leqslant \alpha_1 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_n$, $e_i \,\mathrm{d}\, e_j$ при $i \neq j$. Тогда

а) если μ субаддитивна, то $\varphi(x) \leqslant \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \mu e_i$; (9)

б) если μ супераддитивна, то $\varphi(x) \geqslant \sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_i \mu e_i;$ (10)

в) если μ аддитивна, то $\varphi(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_i \mu e_i;$ (11)

12^o. Если μ существенно положительна, то таков же $\varphi : \varphi(x) > 0$ $\forall x > 0$.

13^o. Если μ σ-непрерывна снизу, то таков же $\varphi : x_n \uparrow x \Longrightarrow \varphi(x_n) \longrightarrow \varphi(x)$.

14^o. Если μ условно σ-непрерывна сверху, то таков же φ: из $x_n \downarrow x$ и $\varphi(x_1) < +\infty$ следует $\varphi(x_n) \longrightarrow \varphi(x)$.

15^o. Если μ условно $o\sigma$-непрерывна, то таков же φ: из $x_n \xrightarrow{o\sigma} x$ и $\exists\, z \in X^+ : \ \varphi(z) < +\infty, \ x_n \leqslant z \ \ \forall n$, следует $\varphi(x_n) \longrightarrow \varphi(x)$.

Замечание. Пусть X – расширенное K_σ-пространство. Если ввести множества $X_0 = \{x \in X : \ \varphi(|x|) < +\infty\}$ и $X_0^+ = X_0 \cap X^+$ и в свойствах 14^o и 15^o ограничиться множеством X_0^+, то непрерывность φ на нем будет *безусловной*: φ будет σ-непрерывной сверху ($o\sigma$-непрерывной), если μ условно σ-непрерывна сверху (условно $o\sigma$-непрерывна).

16^o. а) Если μ субаддитивна, то φ_μ *решеточно-субаддитивен*: $\varphi_\mu(x \vee y) \leqslant \varphi_\mu(x) + \varphi_\mu(y) \ \ \forall x, y \in X^+$.

б) Если μ супераддитивна, то φ_μ *решеточно супераддитивен*: $\varphi_\mu(x \vee y) \geqslant \varphi_\mu(x) + \varphi_\mu(y) \ \ \forall\, x, y \in X^+, \ x \mathrm{d} y$.

в) Если μ сильно субаддитивна, то φ_μ *сильно решеточно-субаддитивен*: $\varphi_\mu(x \vee y) + \varphi_\mu(x \wedge y) \leqslant \varphi_\mu(x) + \varphi_\mu(y) \ \ \forall x, y \in X^+$.

г) Если μ сильно супераддитивна, то φ_μ *сильно решеточно-супераддитивен*: $\varphi_\mu(x \vee y) + \varphi_\mu(x \wedge y) \geqslant \varphi_\mu(x) + \varphi_\mu(y) \ \ \forall x, y \in X^+$.

д) Если μ аддитивна, то φ_μ *решеточно-аддитивен*: $\varphi_\mu(x \vee y) + \varphi_\mu(x \wedge y) = \varphi_\mu(x) + \varphi_\mu(y) \ \ \forall x, y \in X^+$ (можно показать, что последнее условие равносильно алгебраической аддитивности φ_μ : $\varphi_\mu(x + y) = \varphi_\mu(x) + \varphi_\mu(y)$).

17^o. Если μ σ-субаддитивна, то φ *решеточно-σ-субаддитивен*: $\varphi\Big(\bigvee\limits_{n=1}^{\infty} x_n\Big) \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi(x_n)$. Если μ σ-непрерывна снизу и субаддитивна, то φ *решеточно-σ-субаддитивен*.

18^o. Если μ σ-аддитивна, то φ *решеточно-σ-аддитивен*: для любой дизъюнктной последовательности (x_n) в X^+ имеем $\varphi\Big(\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n\Big) = \varphi\Big(\bigvee\limits_{n=1}^{\infty} x_n\Big) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi(x_n)$.

19^o. Если μ субаддитивна, то φ *алгебраически 2-субаддитивен*: $\varphi(x + y) \leqslant 2[\varphi(x) + \varphi(y)]$.

Действительно, $x+y \leqslant 2(x \vee y)$, так что $\varphi(x+y) \leqslant \varphi(2(x \vee y)) = 2\varphi(x \vee y) \leqslant 2[\varphi(x)+\varphi(y)]$.

20^o. Пусть μ σ-субаддитивна и существенно положительна. Тогда если $\varphi(x_n) \longrightarrow 0$ и (x_n) ограничена в X, то $\exists\ x_{k_n} \xrightarrow{o\sigma} 0$.

Замечание. Если X расширенное, а μ существенно положительна, субаддитивна и σ-непрерывна снизу, то заключение в 20^o будет верным и без предположения об ограниченности (x_n) (ср. [8]).

5. Теорема об аппроксимации конечно-значными элементами

В этом пункте мы покажем, что значение $\varphi(x)$ в случае конечного его значения с любой степенью точности аппроксимируется значением φ на конечно-значном элементе.

Теорема 1. *Пусть $x \in X^+$. Тогда для любого $\xi < \varphi(x) \leqslant +\infty$ найдется конечно-значный элемент $\overline{x} \leqslant x$ такой, что $\varphi(\overline{x}) > \xi$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение очевидно, если $\mu a^x_{\lambda_0} = +\infty$ для некоторого $\lambda_0 > 0$. В этом случае $\varphi(x) = +\infty$ и взяв $\overline{x} = \lambda_0 a^x_{\lambda_0} \leqslant x$ (см. следствие из свойства 1^o в п.2), будем иметь $\varphi(\overline{x}) = \lambda_0 \mu a^x_{\lambda_0} = +\infty > \xi$.

Пусть теперь $\mu a^x_\lambda < +\infty$ $\forall \lambda > 0$. Поскольку $\varphi(x) = \int\limits_0^\infty \mu a^x_\lambda d\lambda = \lim\limits_{\substack{m\to 0\\ M\to+\infty}} \int\limits_m^M \mu a^x_\lambda d\lambda$, то найдутся $m > 0$ и $M > m$ такие, что $\int\limits_m^M \mu a^x_\lambda d\lambda > \xi$. Далее, найдем такое разбиение $\alpha_0 = m < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n = M$ сегмента $[m, M]$, чтобы нижняя сумма Дарбу $s = \sum\limits_{k=1}^n \mu a_{\alpha_k}(\alpha_k - \alpha_{k-1})$ была больше ξ : $s = \sum\limits_{k=1}^n \mu a_{\alpha_k}(\alpha_k - \alpha_{k-1}) > \xi$. Но эта сумма в силу замечания к 9^o в п.3 есть $s = \varphi\Big(\bigvee\limits_{k=1}^n \alpha_k a_{\alpha_k}\Big)$, а по следствию из 1^o в п.2 конечно-значный элемент $\overline{x} = \bigvee\limits_{k=1}^n \alpha_k a_{\alpha_k}$ удовлетворяет неравенству $\overline{x} \leqslant x$, так как $\alpha_k a_{\alpha k} \leqslant a_{\alpha_k} x \leqslant x$ $\forall k$.

Итак, найден конечно-значный элемент $\overline{x} = \bigvee\limits_{k=1}^n \alpha_k a_{\alpha_k} = \sum\limits_{k=0}^n \alpha_k (a_{\alpha_k} - a_{\alpha_{k+1}})$, удовлетворяющий неравенству $\varphi(\overline{x}) = s > \xi$.

Следствие. *Для любого $x \in X^+$ существует возрастающая последовательность $(\overline{x}_n)$ конечно-значных элементов такая, что $\varphi(\overline{x}_n) \longrightarrow \varphi(x)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем последовательность $0 < \xi_n < \varphi(x)$, чтобы $\xi_n \uparrow \varphi(x)$, для каждого n найдем конечно-значный элемент

$y_n \leqslant x$ такой, чтобы $\varphi(y_n) > \xi_n$. Полагая $\overline{x}_n = \bigvee\limits_{i=1}^{n} y_i$, получим конечно-значные элементы $\overline{x}_n$, удовлетворяющие условиям $\overline{x}_n \leqslant x$, $x_n \uparrow$ и $\varphi(x_n) \geqslant \xi_n \uparrow \varphi(x)$.

Определение 3. Конечно-значный элемент p назовем *рациональным*, если он является рациональной линейной комбинацией попарно дизъюнктных единичных элементов: $p = \sum\limits_{k=0}^{n} r_k e_k, \quad r_k \in \mathbb{Q}$.

Теорема 2.*Пусть $x \in X^+$ и $\xi < \varphi(x)$. Тогда найдется рациональный конечно-значный элемент $q \leqslant x$ такой, что $\varphi(q) > \xi$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 1 найдем $p = \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k e_k \leqslant x$, чтобы

$$\varphi(p) = \sum_{k=1}^{m} (\alpha_k - \alpha_{k-1}) \mu s_k > \xi \quad (s_k = \bigvee_{i=k}^{m} e_i, \ k = 1, 2, \ldots, n).$$

Затем подберем рациональные последовательности $0 \leqslant r_k^n \uparrow_n \alpha_k$ и пусть $q_n = \sum\limits_{k=1}^{m} r_k^n e_k$. Тогда по следствию из 9^o в п.3 $\varphi(q_n) \longrightarrow \varphi(p)$ и найдется n_0, что $\varphi(q_{n_0}) > \xi$. При этом $q_{n_0} \leqslant p \leqslant x$.

Следствие. $\forall x \in X^+$ *существует возрастающая последовательность рациональных конечно-значных q_n такая, что $\varphi(q_n) \longrightarrow \varphi(x)$.*

Замечание. Приведенные здесь следствия справедливы для произвольной нечеткой меры μ, без каких-либо дополнительных требований, наложенных на нее.

6. Вспомогательные предложения

Докажем несколько вспомогательных предложений, позволяющих технически упростить доказательство теоремы 3 в части достаточности.

Лемма 1. *Пусть E – булева алгебра, $s_0 = 1 \geqslant s_1 \geqslant s_2 \geqslant \ldots \geqslant s_{n-1} \geqslant s_n > 0$ – конечная убывающая последовательность в E, $e \in E$. Тогда если μ – сильно субаддитивная нечеткая мера на E, то для любого $k = 1, 2, \ldots, n-1, n$ справедливо неравенство*

$$\mu s_k + \mu(s_{k-1} \wedge e) \geqslant \mu(s_k \vee (s_{k-1} \wedge e)) + \mu(s_k \wedge e). \tag{12}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из сильной субаддитивности μ следует

$$\mu s_k + \mu(s_{k-1} \wedge e) \geqslant \mu(s_k \vee (s_{k-1} \wedge e)) + \mu(s_k \wedge (s_{k-1} \wedge e)).$$

Но $\mu(s_k \wedge (s_{k-1} \wedge e)) = \mu(s_k \wedge s_{k-1}) \wedge e) = \mu(s_k \wedge e))$, ибо $s_k \leqslant s_{k-1}$. Значит, $\mu s_k + \mu(s_{k-1} \wedge e) \geqslant \mu(s_k \vee (s_{k-1} \wedge e)) + \mu(s_k \wedge e)$.

Лемма 2. *В условиях предыдущей леммы справедливо неравенство*

$$\mu e + \sum_{i=1}^{n} \mu s_i \geqslant \sum_{i=1}^{n} \mu(s_i \vee (s_{i-1} \wedge e)) + \mu(s_n \wedge e). \tag{13}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\mu e + \mu s_1 < +\infty$, то в силу субаддитивности и монотонности μ для любого $i = 1, \dots, n$ имеем

$$\mu(s_i \vee (s_{i-1} \wedge e)) \leqslant \mu(s_i \vee e) \leqslant \mu s_i + \mu e \leqslant \mu s_1 + \mu e < +\infty,$$

так что правая часть в (13) конечна и неравенство (13) можно записать в равносильной форме

$$d_n := \mu e + \sum_{i=1}^{n} \mu s_i - \sum_{i=1}^{n} \mu(s_i \vee (s_{i-1} \wedge e)) \geqslant \mu(s_n \wedge e). \tag{13'}$$

Последнее неравенство мы и докажем методом математической индукции. При $n = 1$ неравенство (12) (с учетом $s_k = s_1, s_{k-1} = s_0 = 1$) дает нам $\mu s_1 + \mu e - \mu(s_1 \vee (s_0 \wedge e)) \geqslant \mu(s_1 \wedge e)$.

Предположим теперь, что $n \geqslant 2$ и что неравенство (13′) справедливо для $(n-1)$ слагаемых и покажем, что оно справедливо и для n слагаемых. Имеем (с учетом неравенства (13′) для $n-1$)

$$d_n = \mu e + \sum_{i=1}^{n} \mu s_i - \sum_{i=1}^{n} \mu(s_i \vee (s_{i-1} \wedge e)) = \Big[\mu e + \sum_{i=1}^{n-1} \mu s_i - \sum_{i=1}^{n-1} \mu(s_i \vee (s_{i-1} \wedge e))\Big] +$$

$$+ \mu s_n - \mu(s_n \vee (s_{n-1} \wedge e)) = d_{n-1} + \mu s_n - \mu(s_n \vee (s_{n-1} \wedge e)) \geqslant \quad (\text{так как}$$

$$d_{n-1} \geqslant \mu(s_{n-1} \wedge e)) \quad \geqslant \mu(s_{n-1} \wedge e) + \mu s_n - \mu(s_n \vee (s_{n-1} \wedge e)) \geqslant \mu(s_n \wedge e).$$

Следствие. *В условиях леммы 1 справедливо неравенство*

$$\mu e + \sum_{i=1}^{n} \mu s_i \geqslant \sum_{i=1}^{n} \mu(s_i \vee (s_{i-1} \wedge e)) + \mu(s_n \wedge e). \tag{14}$$

Лемма 3. *Если* $e \mathrm{\ d\ } a_\lambda^x$, $e \in E$, *то* $\lambda e \geqslant (e)x = ex$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По формуле (11) на с. 120 в [10] имеем $\lambda e_\lambda^x \geqslant e_\lambda^x x$ или с учетом равенства $(a_\lambda^x)' = e_\lambda^x$,

$$\lambda (a_\lambda^x)' \geqslant (a_\lambda^x)' x. \tag{15}$$

Если $e \mathrm{\ d\ } a_\lambda^x$, то $e \leqslant (a_\lambda^x)'$ и $e(a_\lambda^x)' = e$, а поэтому, умножая (15) на e, получим нужное неравенство $\lambda e \geqslant ex$.

Лемма 4. *Если* $x, y \in X^+$, *то* $\forall\ \alpha > 0$ *справедливо неравенство* $(x+y) - (x+y) \wedge \alpha 1 \leqslant (x+y) - y \wedge \alpha 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из $x+y \geqslant y$ следует $(x+y) \wedge \alpha 1 \geqslant y \wedge \alpha 1$, или $-(x+y) \wedge \alpha 1 \leqslant -y \wedge \alpha 1$. Отсюда, прибавив к обеим частям по $(x+y)$, получим нужное неравенство.

7. Критерий алгебраической субаддитивности функционала Шоке

Выше мы установили, что в случае субаддитивной μ порожденный функционал φ_μ обладает свойством алгебраической 2-субаддитивности: $\varphi_\mu(x+y) \leqslant 2[\varphi(x)+\varphi(y)]$. Однако субаддитивность μ в общем случае не обеспечивает 1-субаддитивности φ_μ, т.е. выполнимости условия $\varphi_\mu(x+y) \leqslant \varphi_\mu(x)+\varphi_\mu(y)$. Для этого потребуется более сильное ограничение на μ. Следующая теорема показывает, что таким условием является условие *сильной субаддитивности.*

В дальнейшем изложении вместо φ_μ пишем просто φ.

Теорема 3. *Функционал* φ *будет алгебраически субаддитивным в том и только том случае, когда* μ *сильно субаддитивна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Допустим, что μ не сильно субаддитивна, так что найдутся $e_1, e_2 \in E$ такие, что $\mu(e_1 \vee e_2) + \mu(e_1 \wedge e_2) > \mu e_1 + \mu e_2$. Введем элементы $\overline{e}_1 = e_1 \vee e_2 - e_1 \wedge e_2$, $\overline{e}_2 = e_1 \wedge e_2$. Тогда $\overline{e}_1 \mathrm{d}\, \overline{e}_2$ и $e_1 + e_2 = \overline{e}_1 + 2\overline{e}_2$ - конечно-значный элемент, а поэтому по 9^o из § 2 с учетом равенств $\overline{e}_1 \vee \overline{e}_2 = e_1 \vee e_2$, $\overline{e}_2 = e_1 \wedge e_2$ имеем

$$\varphi(e_1 + e_2) = \mu(\overline{e}_1 \vee \overline{e}_2) + (2-1)\mu(\overline{e}_2) = \mu(e_1 \vee e_2) + \mu(e_1 \wedge e_2) >$$

$$> \mu e_1 + \mu e_2 = \varphi(e_1) + \varphi(e_2).$$

Достаточность. Эта часть доказательства более громоздка и мы проведем ее поэтапно, постепенно расширяя круг элементов x и y, для которых выполняется нужное неравенство. При этом мы придерживаемся схемы, предложенной в работе Шипоша [3], вводя некоторые изменения и уточнения. Понятно, что для $x, y \in X^+$, удовлетворяющих условию $\varphi(x) + \varphi(y) = +\infty$, неравенство $\varphi(x+y) \leqslant \varphi(x) + \varphi(y)$ выполнено, так что в дальнейшем во всех пунктах доказательства мы можем считать $\varphi(x) + \varphi(y) < +\infty$.

А. Пусть сначала $x, y \in L^+$, $x = \beta e > 0$, $y = \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k e_k$, $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_n$. $e_i \mathrm{d} e_j$ при $i \neq j$ и $\sum\limits_{k=0}^{n} e_k = 1$. Кроме того предположим, что $\beta \leqslant \min\limits_{k=1}^{n}(\alpha_k - \alpha_{k-1})$. Представим $x+y$ в стандартном виде, преобразовав предварительно x и y специальным образом:

$$x = \beta e = \beta\Big(e \wedge \Big(\bigvee_{k=0}^{n} e_k\Big)\Big) = \beta\Big(\bigvee_{k=0}^{n}(e \wedge e_k)\Big) = \sum_{k=0}^{n}\beta(e \wedge e_k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\beta(e \wedge e_k) + \sum_{k=0}^{n} 0\cdot(e' \wedge e_k),$$

$$y = \sum_{k=0}^{n}\alpha_k e_k = \sum_{k=0}^{n}\alpha_k[(e \wedge e_k) \vee (e' \wedge e_k)] = \quad (\text{так как} \ \ e \wedge e_k \ \mathrm{d} \ e' \wedge e_k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\alpha_k(e \wedge e_k) + \sum_{k=0}^{n}\alpha_k(e' \wedge e_k).$$

Тогда $x + y = \sum_{k=0}^{n}\alpha_k(e' \wedge e_k) + \sum_{k=0}^{n}(\alpha_k + \beta)(e \wedge e_k)$, или, располагая слагаемые в порядке возрастания коэффициентов, $(\alpha_0 < \beta \leqslant \alpha_1 < \alpha_1 + \beta \leqslant \alpha_2 < \alpha_2 + \beta \leqslant \ldots \leqslant \alpha_n < \alpha_n + \beta)$,

$$x + y = 0\cdot(e' \wedge e_0) + \beta(e \wedge e_0) + \alpha_1(e' \wedge e_1) + (\alpha_1 + \beta)(e \wedge e_1) + \ldots +$$
$$+\alpha_k(e' \wedge e_k) + (\alpha_k + \beta)(e \wedge e_k) + \ldots + \alpha_n(e' \wedge e_n) + (\alpha_n + \beta)(e \wedge e_n).$$

По формуле (6') отсюда мы можем написать

$$\mu(x+y) = \beta\mu a_{\beta}^{x+y} + (\alpha_1 - \beta)\mu a_{\alpha_1}^{x+y} + (\alpha_1 + \beta - \alpha_1)\mu a_{\alpha_1+\beta}^{x+y} + (\alpha_2 - \alpha_1 - \beta)\mu a_{\alpha_2}^{x+y} +$$

$$+ \ldots + (\alpha_k - \alpha_{k-1} - \beta)\mu a_{\alpha_k}^{x+y} + (\alpha_k + \beta - \alpha_k)\mu a_{\alpha_k+\beta}^{x+y} + \ldots +$$

$$+(\alpha_n - \alpha_{n-1} - \beta)\mu a_{\alpha_n}^{x+y} + (\alpha_n + \beta - \alpha_n)\mu a_{\alpha_n+\beta}^{x+y} =$$

$$= \beta\sum_{k=0}^{n}\mu a_{\alpha_k+\beta}^{x+y} + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k - \alpha_{k-1})\mu a_{\alpha_k}^{x+y} - \beta\sum_{k=1}^{n}\mu a_{\alpha_k}^{x+y}. \tag{16}$$

Подсчитаем теперь $a_{\alpha_k}^{x+y}$ и $a_{\alpha_k+\beta}^{x+y}$ для различных k с учетом формулы (7), данной в п.3. При этом принимаем во внимание неравенства $\alpha_i < \alpha_i + \beta \leqslant \alpha_{i+1}$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, и для удобства введем еще обозначения: $s_k = \sum_{i=k}^{n} e_i$, $k \geqslant 1$. По формуле (7) имеем

$$a_{\alpha_k}^{x+y} = \Big[\bigvee_{\alpha_i \geqslant \alpha_k}(e' \wedge e_i)\Big] \vee \Big[\bigvee_{\alpha_i+\beta \geqslant \alpha_k}(e \wedge e_i)\Big] = \Big[\bigvee_{i=k}^{n}(e' \wedge e_i)\Big] \vee$$

$$\vee\Big[\bigvee_{i=k}^{n}(e \wedge e_i)\Big] \vee c_k = \bigvee_{i=k}^{n}(e' \wedge e_i) \vee \Big[(e \wedge e_i) \vee c_k\Big] = \bigvee_{i=k}^{n}(e_i) \vee c_k = s_k \vee c_k,$$

$$k = 1, 2, \ldots, n, \tag{17}$$

где $c_k = 0$, если $\alpha_{k-1} + \beta < \alpha_k$ и $c_k = e \wedge e_{k-1}$, если $\alpha_{k-1} + \beta = \alpha_k$.

$$a_{\alpha_k+\beta}^{x+y} = \Big[\bigvee_{\alpha_i \geqslant \alpha_k+\beta}(e' \wedge e_i)\Big] \vee \Big[\bigvee_{\alpha_i+\beta \geqslant \alpha_k+\beta}(e \wedge e_i)\Big] = \Big[\bigvee_{i=k+1}^{n}(e' \wedge e_i)\Big] \vee$$

$$\vee\left[\bigvee_{i=k}^{n}(e\wedge e_i)\right] = \bigvee_{i=k+1}^{n}((e'\wedge e_i)\vee(e\wedge e_i))\vee(e\wedge e_k) =$$

$$= s_{k+1}\vee(e\wedge e_k),\quad k=0,1,\ldots,n-1,$$

$$a^{x+y}_{\alpha_n+\beta} = e\wedge e_n = s_n\wedge e. \tag{18}$$

Заметим, что $s_k = s_{k+1}\vee e_k$, $k=1,2,\ldots,n-1$, а поэтому (учитывая дистрибутивные законы в булевой алгебре)

$$s_{k+1}\vee(e\wedge e_k) = (s_{k+1}\vee e)\wedge(s_{k+1}\vee e_k) = (s_{k+1}\vee e)\wedge s_k = (s_{k+1}\wedge s_k)\vee(e\wedge s_k) =$$

$$= s_{k+1}\vee(s_k\wedge e). \tag{19}$$

Используя (17)-(19), равенство (16) можем теперь написать в виде

$$\varphi(x+y) = \beta\sum_{k=0}^{n-1}\mu(s_{k+1}\vee(s_k\wedge e)) + \beta\mu(s_n\wedge e)+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k-\alpha_{k-1})\mu(s_k\vee c_k) - \beta\sum_{k=1}^{n}\mu(s_k\vee c_k). \tag{20}$$

Заметим теперь, что в этой формуле мы можем фактически считать все $c_k = 0$, так как для тех k, для которых $c_k > 0$ мы имеем $\alpha_k = \alpha_{k-1}+\beta$ или $\alpha_k - \alpha_{k-1} = \beta$ и соответствующие слагаемые в двух последних суммах уничтожаются, а поэтому безразлично, брать ли в них множители $\mu(s_k\vee c_k)$ или μs_k.

Итак, вместо (20) мы можем написать

$$\varphi(x+y) = \beta\sum_{k=0}^{n-1}\mu(s_{k+1}\vee(s_k\wedge e)) + \beta\mu(s_n\wedge e)-$$

$$-\beta\sum_{k=1}^{n}\mu s_k + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k-\alpha_{k-1})\mu s_k. \tag{21}$$

Подсчитаем теперь разность $\varphi(x)+\varphi(y)-\varphi(x+y)$, учитывая, что
$\varphi(x) = \beta\mu e$, $\varphi(y) = \sum\limits_{k=1}^{n}(\alpha_k-\alpha_{k-1})\mu s_k$:

$$\varphi(x)+\varphi(y)-\varphi(x+y) = \beta\left[\mu e+\sum_{k=1}^{n}\mu s_k - \sum_{k=0}^{n-1}\mu(s_{k+1}\vee(s_k\wedge e)) - \mu(s_n\wedge e)\right] \geqslant 0,$$

ибо выражение в квадратных скобках по (14) неотрицательно. Таким образом, в нашем частном случае мы получаем $\varphi(x+y) \leqslant \varphi(x) + \varphi(y)$.

Б. Пусть теперь $x = \beta e$, $y = \sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_i e_i$, причем мы *не предполагаем* $\beta \leqslant \min\limits_{i=0}^{n-1}(\alpha_{i+1} - \alpha_i)$. Взамен этого мы потребуем, чтобы все числа α_i, β были рациональными. Приведем дроби α_i, β к общему знаменателю, пусть $\alpha_i = \dfrac{k_i}{m}$, $\beta = \dfrac{l}{m}$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Тогда $y = \sum\limits_{i=0}^{n} \dfrac{k_i}{m} e_i$, где $k_i < k_{i+1}$ и $k_i \in \omega := \mathbb{N} \cup \{0\}$ $\forall i$. Введем элементы $x_p = \dfrac{p}{m} e$, $p = 1, 2, \ldots, l$. Если теперь $x_p + y = \sum\limits_{j} \gamma_j e_j$ – стандартное представление элемента $x_p + y$ с неравными γ_j, то каждый коэффициент γ_j будет иметь вид $\dfrac{\nu}{m}$ с $\nu \in \omega$. Поэтому $\dfrac{1}{m} \leqslant \min\limits_{j \geqslant 0}(\gamma_{j+1} - \gamma_j)$ и к сумме $x_1 + (x_p + y)$ можем применить доказанное в п. А при любом $p \geqslant 1$. Поэтому имеем возможность написать:

$$\varphi(x+y) = \varphi(x_1 + (x_{l-1} + y)) \leqslant \varphi(x_1) + \varphi(x_{l-1} + y) =$$

$$\varphi(x_1) + \varphi(x_1 + (x_{l-2} + y)) \leqslant 2\varphi(x_1) + \varphi(x_{l-2} + y)) \leqslant \ldots \leqslant$$

$$(l-1)\varphi(x_1) + \varphi(x_1 + y) \leqslant l\varphi(x_1) + \varphi(y) = \text{ (по однородности } \varphi)$$

$$\varphi(lx_1) + \varphi(y) = \varphi(x) + \varphi(y).$$

В. Если $x = \beta e$, $y = \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k e_k$ и β, α_k – произвольные, то выберем рациональные последовательности $t_n \to \beta$, $r_n^k \longrightarrow_n \alpha_k$ и рассмотрим последовательности конечно-значных элементов $x_n = t_n e$, $y_n = \sum\limits_{k=0}^{n} r_n^k e_k$. Тогда по доказанному в п. Б имеем $\varphi(x_n + y_n) \leqslant \varphi(x_n) + \varphi(y_n)$. По следствию из предложения 9^o в п.3 получим

$$\varphi(x+y) = \lim \varphi(x_n + y_n) \leqslant \lim[\varphi(x_n) + \varphi(y_n)] = \varphi(x) + \varphi(y).$$

Г. Пусть теперь $x, y \in L^+$ и $x = \sum\limits_{i=0}^{n} \beta_i e_i$ – стандартное представление x. Запишем x в ярусном представлении с неравными коэффициентами

$$x = \sum_{i=1}^{n} (\beta_i - \beta_{i-1}) s_i, \; s_i = \sum_{k=i}^{n} e_k, \; i = 1, 2, \ldots, n,$$

и введем обозначения $x_p = \sum\limits_{i=p}^{n}(\beta_i - \beta_{i-1})s_i$, $p = 1, 2, \ldots, n$. Тогда применяя несколько раз п. В, получим:

$$\varphi(x+y) = \varphi((\beta_1 - \beta_o)s_1 + (x_2 + y)) \leqslant \varphi((\beta_1 - \beta_0)s_1) + \varphi(x_2 + y) =$$

$$= (\beta_1 - \beta_0)\mu s_1 + \varphi((\beta_2 - \beta_1)s_2 + (x_3 + y)) \leqslant (\beta_1 - \beta_0)\mu s_1 + \varphi((\beta_2 - \beta_1)s_2) +$$

$$+ \varphi(x_3 + y) = (\beta_1 - \beta_0)\mu s_1 + (\beta_2 - \beta_1)\mu s_2 + \varphi((\beta_3 - \beta_2)s_3 + (x_4 + y)) \leqslant \ldots \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n}(\beta_i - \beta_{i-1})\mu s_i + \varphi(y) = \varphi(x) + \varphi(y).$$

Д. Пусть $p \in L^+$, $y \in X^+$. Выберем $\xi < \varphi(p+y)$ и найдем конечнозначный элемент $q \leqslant p + y$, удовлетворяющий условию $\varphi(q) > \xi$. Тогда очевидно $q - p \leqslant y$ и $(q-p)_+ \leqslant y$, причем $(q-p)_+ \in L^+$. По монотонности φ и доказанному в п. Г можно написать $\xi < \varphi(q) = \varphi((q - p) + p) \leqslant \varphi((q-p)_+ + p) \leqslant \varphi((q-p)_+) + \varphi(p) \leqslant \varphi(y) + \varphi(p)$. В силу произвольности $\xi < \varphi(p + y)$ отсюда получаем

$$\varphi(y + p) \leqslant \varphi(y) + \varphi(p).$$

Е. Для следующего шага доказательства понадобится еще одна лемма.

Лемма 5. *Пусть $x \in X^+$ - ограниченный элемент (т.е. $\exists\, c > 0 : 0 \leqslant x \leqslant c1$, см. [10], с. 86). Тогда $\forall \varepsilon > 0$ существует конечнозначный элемент $q \geqslant x$ такой, что*

$$\varphi(q) < \varphi(x) + \varepsilon \cdot \mu e_x, \tag{22}$$

где e_x - след элемента x.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\mu e_x = +\infty$, то можно взять $q = ce_x$.

Пусть $\mu e_x < +\infty$. Выберем $\varepsilon > 0$ и разбиение $\tau : 0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n = c$ с шагом $h(\tau) \leqslant \varepsilon$ и рассмотрим конечнозначный элемент $p = \sum\limits_{i=1}^{n}(\lambda_i - \lambda_{i-1})a^x_{\lambda_i}$. Представим его в стандартной форме $p = \sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i e_i$, где $e_i = a^x_{\lambda_i} - a^x_{\lambda_{i+1}}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, $e_n = a^x_{\lambda_n}$, а e_0 можно считать равным $e_0 = e_x - a^x_{\lambda_1}$. Построим теперь конечнозначный элемент

$$q = \sum_{i=0}^{n} \lambda_{i+1} e_i,$$

где считаем $\lambda_{n+1} = \lambda_n + \varepsilon$. Покажем, что $q \geqslant x$.

Из $e_i \,\mathrm{d}\, a^x_{\lambda_{i+1}}$ по лемме 3 следует $\lambda_{i+1}e_i \geqslant e_i x$, $i = 0, 1, \ldots, n$ (при $i = n$ неравенство получается следующим образом: $x \leqslant c1 \implies e_i x \leqslant ce_i = \lambda_n e_i < \lambda_{n+1}e_i$). Отсюда $q = \sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_{i+1}e_i \geqslant \sum\limits_{i=0}^{n} e_i x = x\sum\limits_{i=0}^{n} e_i = x \cdot e_x = x$.

Осталось проверить неравенство (22). Для этого заметим, что $q = \sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_{i+1}e_i \leqslant$ (так как $\lambda_{i+1} - \lambda_i \leqslant \varepsilon$) $\sum\limits_{i=0}^{n}(\lambda_i + \varepsilon)e_i = \sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i e_i + \varepsilon \sum\limits_{i=0}^{n} e_i = p + \varepsilon e_x$. Поэтому $\varphi(q) \leqslant \varphi(p + \varepsilon e_x) \leqslant$ (по п. В) $\varphi(p) + \varphi(\varepsilon e_x) \leqslant \varphi(x) + \varphi(\varepsilon e_x) = \varphi(x) + \varepsilon\mu e_x$.

Ж. Пусть $x, y \in X^+$, причем y – ограниченный элемент, пусть $0 \leqslant y \leqslant c1$, $c > 0$. Так как $\varphi(y) = \int\limits_0^\infty \mu b^y_\lambda d\lambda < +\infty$, то $\mu b^y_\lambda < +\infty \;\forall \lambda > 0$. Рассмотрим для $\alpha > 0$ два элемента

$$y_\alpha = y - y \wedge \alpha 1 \quad \text{и} \; z_\alpha = (x + y) - (x + y) \wedge \alpha 1.$$

Тогда $e_{y_\alpha} = b^{y_\alpha}_0 = b^y_\alpha$ и $\mu e_{y_\alpha} < +\infty$. По лемме 5 в п. Е для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется конечно-значный элемент $q \geqslant y_\alpha$ такой, что $\varphi(q) < \varphi(y_\alpha) + \varepsilon \cdot \mu e_{y_\alpha}$. Так как по лемме 4 п.6 $z_\alpha \leqslant x + y_\alpha$, а $y_\alpha \leqslant q$, то

$$\varphi(z_\alpha) \leqslant \varphi(x + y_\alpha) \leqslant \varphi(x + q) \leqslant \text{ (по доказанному в п. Д)}$$

$$\varphi(x) + \varphi(q) \leqslant \varphi(x) + \varphi(y_\alpha) + \varepsilon\mu e_{y_\alpha} \leqslant \varphi(x) + \varphi(y) + \varepsilon \cdot \mu e_{y_\alpha}.$$

В силу $\mu e_{y_\alpha} < +\infty$ и произвольности $\varepsilon > 0$ отсюда получаем $\varphi(z_\alpha) \leqslant \varphi(x) + \varphi(y)$. Поскольку, в свою очередь, это неравенство верно при любом $\alpha > 0$, то перейдя здесь к пределу при $\alpha \to +0$ и учитывая следствие из предложения 7^o в п.3 мы получим

$$\varphi(x + y) = \lim_{\alpha \to +0} \varphi(z_\alpha) \leqslant \varphi(x) + \varphi(y).$$

З. Теперь, наконец, имеем возможность перейти к общему случаю. Пусть $x, y \in X^+$ произвольные. Для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем неравенство $(x + y) \wedge n1 \leqslant x \wedge n1 + y \wedge n1$ (см. следствие из теоремы III.6.2 в [10], с. 71), где все три элемента будут ограниченными, поэтому по доказанному в п. Ж

$$\varphi((x + y) \wedge n1) \leqslant \varphi(x \wedge n1) + \varphi(y \wedge n1) \leqslant \varphi(x) + \varphi(y).$$

Перейдя здесь к пределу при $n \to \infty$ и учитывая следствие 1 из предложения 7^o в п.3, получим

$$\varphi(x + y) = \lim_{n \to \infty} \varphi((x + y) \wedge n1) \leqslant \varphi(x) + \varphi(y).$$

8. Одно приложение

Опираясь на полученные нами результаты, а также результаты работы [13], мы можем дать новое доказательство теоремы о мерах на булевых алгебрах (по существу имеющейся в работах [7], [14], [15], хотя явно и не сформулированной).

Теорема 4. *Если на σ-полной булевой алгебре E имеется существенно положительная сильно субаддитивная σ-непрерывная сверху в нуле нечеткая мера μ, то E нормируема.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можем считать μ конечной (иначе взяли бы $\mu' = \mu \wedge 1$). Надстроим над E K_σ-пространство X ограниченных элементов ([10], теорема V.2.3) и построим на X^+ функционал Шоке φ_μ. Он будет существенно положительным (по 12^o в п.4), положительно однородным (по 6^o в п.3), конечным (если $x \leqslant \alpha 1$, то $\varphi_\mu(x) \leqslant \alpha \cdot \mu 1$), σ-непрерывным сверху в нуле (по 14^o в п.4), алгебраически субаддитивным (по теореме 3), монотонным (по 2^o в п.3). Следовательно, для него будет выполняться также условие *усиленной субаддитивности*

$$\varphi(|x+y|) \leqslant \varphi(|x|) + \varphi(|y|) \quad \forall x, y \in X.$$

По теореме 1 из [13] E будет нормируемой булевой алгеброй.

Замечание. Для удобства читателя мы повторим основные моменты доказательства теоремы 1 из [13].

Положим для $x \in X$ $\|x\| = \varphi_\mu(|x|)$. Тогда $\|\cdot\|$ будет монотонной нормой в X, непрерывной относительно $o\sigma$-сходимости: $x_n \xrightarrow{o\sigma} x \Longrightarrow \|x_n\| \longrightarrow \|x\|$. Действительно, σ-непрерывная сверху в нуле субмера $o\sigma$-непрерывна и φ_μ $o\sigma$-непрерывен на X^+ (по 15^o в п.4 и замечанию 1 к нему), поэтому $x_n \xrightarrow{o\sigma} x \Longrightarrow |x_n| \xrightarrow{o\sigma} |x| \Longrightarrow \|x_n\| \longrightarrow \|x\|$.

По теореме Хана-Банаха на X существует достаточное множество непрерывных линейных функционалов $\{f_\xi\}_{\xi\in\Sigma}$, мажорируемых нормой $\|\cdot\|$. Все они $o\sigma$-непрерывны, поэтому их сужения на E будут конечными счетно-аддитивными зарядами, а полные вариации v_ξ этих зарядов – конечными счетно-аддитивными положительными мерами. Если E_ξ – компонента существенной положительности v_ξ, а $1_\xi = \vee E_\xi$, $\xi \in \Sigma$, то множество $\{1_\xi\}_{\xi\in\Sigma}$ полно в E. Наличие непрерывной существенно положительной субмеры на E обеспечивает счетность типа E, поэтому найдется не более чем счетный набор $1_{\xi_1}, 1_{\xi_2}, \ldots$ полный в E. Тогда $m : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$, определенная равенством

$$m(e) = \sum_n \frac{1}{2^n} \cdot \frac{v_{\xi_n}(e)}{(v_{\xi_n}(1)+1)},$$

будет существенно положительной счетно-аддитивной мерой на E.

Литература

1. **Choquet G.** Theory of capacities // *Ann. Inst. Fourier. 1955. V. 5. №1. P. 131-295.*

2. **Šipoš J.** Integral with respect to a pre-measure // Math. *Slovaca. 1979. V. 29. №2. P. 141-145.*

3. **Šipoš J.** Non-linear integrals // *Math. Slovaca. 1979. V. 29. №3. P. 257-270.*

4. **Šipoš J.** Integral representations of non-linear functionals // *Math. Slovaca. 1979. V. 29. №4. P. 333-345.*

5. **Порошкин А.Г., Баженов И.И.** Один способ интегрирования по монотонным функциям множества // *Упорядоченные пространства и операторные уравнения: Межвуз. сб. научн. тр. / Пермский ун-т. Сыктывкар, 1982. С. 28-41.*

6. **Maharam D.** An algebraic characterization of measure algebras // *Ann. Math. 1947. V. 48. №1. P. 154-167.*

7. **Kelley J.L.** Measure on Boolean algebras // *Pacif. J. Math. 1959. V. 9. P. 1165-1177.*

8. а) **Порошкин А.Г.** О метризуемости порядковых топологий в K-пространствах / *Сыктывкарский ун-т. Сыктывкар, 1981. 16 с. / Деп. в ВИНИТИ, № 743-81 ДЕП.* (См. также б) **Порошкин А.Г.** К вопросу о метризуемости секвенциальной порядковой топологии в упорядоченных группах и векторных пространствах // *Вестник Сыктывкарского ун-та. Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 1995. Вып. 1. С. 63-74.)*

9. **Порошкин А.Г.** К вопросу об интегрировании по векторной мере // Вопросы функционального анализа (теория меры, упорядоченные пространства, операторные уравнения): Межвуз. сб. научн. тр. / *Сыктывкарский ун-т. Сыктывкар, 1991. С. 82-88.*

10. **Вулих Б.З.** Введение в теорию полуупорядоченных пространств. *М.: Физматгиз, 1961. 407 с.*

11. **Канторович Л.В., Акилов Г.П.** Функциональный анализ. *М.: Наука, 1984. 750 с.*

12. **Партасарати К.** Введение в теорию вероятностей и теорию меры. *М.: Мир, 1983. 343 с.*

13. **Порошкин А.Г.** К вопросу о нормируемости булевых алгебр с непрерывной внешней мерой // *Сибирский математический журнал. 1980. Т. 21. №4. С. 216-220.*

14. **Eisenstadt B.J., Lorentz G.G.** Boolean rings and Banach lattices // *Illinois J.Math. 1959. V. 3. №4. P. 524-531.*

15. **Попов В.А.** Аддитивные и полуаддитивные функции на булевых алгебрах // *Сибирский математический журнал. 1976. Т. 17. №2. С. 331-339.*

16. **Порошкин А.Г., Шергин Ю.В.** О функционале Шоке в K_σ пространстве со слабой единицей. *Деп. в ВИНИТИ №2378-В97. 30 с.*

17. **Порошкин А.Г., Шергин Ю.В.** Об одном применении функционала Шоке. // *Проблемы современного математического образования в педвузах России. Тезисы докладов Межрегиональной научной конференции: Киров, 1998. С. 190-192.*

Summary

Poroshkin A.G., Shergin Yu.V. On the Choquet functional and one its application in measure theory

The main properties of nonadditive extended functional on the cone of positive elements of a K_σ-space with a weak unit, named here the Choquet functional, are considered. One application of this functional is given — a new proof of normability of a σ-complete Boolean algebra with an essentialy positive strongly subadditive continuous fuzzy measure.

Сыктывкарский университет *Поступила 28.09.2000*