Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1.Вып.4.2001

УДК 681.3.082

Быстрый алгоритм отображения многомерных решеток

В. Е. Езовских

В различных приложениях, например, машинной графике встречается задача о преобразовании числовой информации, заданной на решетке определенной размерности на решетку с отличным от исходной разрешением. Предлагается быстрый алгоритм подобного преобразования для случая целочисленности исходной и преобразованной информации.

Известна задача о распределении p предметов по q ящикам при выполнении некоторых принципов "справедливости" относительно количества предметов a_i $(i = 1..q)$ в каждом ящике:

- все p предметов использованы;
- количество предметов в любых двух ящиках отличается не более чем на единицу;
- если считать ящики упорядоченными, то последовательность a_i "почти" периодическая.

Существует простое решение этой задачи. Оно весьма похоже на алгоритм линейной интерполяции Брезенхейма [1, p.23].

Пусть $p = t*q+r, p > q, 0 < r < q$. Запишем алгоритм на псевдокоде (случай $r = 0$ тривиален)

```
begin t:=p div q; r:=2*(p mod q); d:=r-q; for i:=1 to q do
    begin if (d>0) then begin a[i]:=t+1; d:=d-q end else a[i]:=t;
    d:=d+r end end.
```

Следует заметить, что в случае преобразования целочисленных данных $z_j(j = 1..p)$ на решетке p в целочисленные данные $a_i(i = 1..q)$ на решетке q такой алгоритм часто дает неудовлетворительные результаты, например, при масштабировании растровых изображений в машинной графике.

Рассмотрим несколько иной подход. Будем считать, что p и q – натуральные взаимно простые числа. Запишем последовательность рациональных чисел (количество пар круглых скобок равно q)

$$(\frac{q}{q}\frac{q}{q}\dots\frac{q}{q}\frac{r}{q})(\frac{q-r}{q}\frac{q}{q}\dots\frac{q}{q}\frac{2r-q}{q})(\frac{2q-2r}{q}\frac{q}{q}\dots\frac{q}{q}\frac{3r-2q}{q})\dots$$

Каждая группа в круглых скобках содержит весовые коэффициенты, с помощью которых значения z_j преобразуются в a_i. Например, из первой скобки для вычисления a_1 следует воспользоваться следующей схемой

$$f = q * \sum_{j=1}^{t} z_j + r * z_{t+1}, h = f\ div\ p, g = f\ mod\ p$$

$$a_1 = h, \text{если } 2g - t < 0, \quad a_1 = h + 1, \text{если } 2g - t \geq 0$$

Обозначим в каждой i–ой группе скобок числитель первой дроби через fl_i, а числитель последней дроби через fr_i (все остальные числители равны q). Очевидно должны быть выполнены условия

$$fl_i \geq 0,\ fr_i \geq 0,\ fl_i + fr_i = r\ (i = 1..q)$$

$$fl_1 = fr_q = q,\ fl_i + fr_{i+1} = q\ (i = 1..q-1)$$

Если условие $fr_i \geq 0$ нарушается, то количество рациональных чисел вида $\frac{q}{q}$ уменьшается на единицу, а к отрицательному fr_i прибавляется q. Таким образом, количество дробей вида $\frac{q}{q}$ в каждой паре скобок может быть равно t или $t-1$.

Запишем алгоритм вычисления весов на псевдокоде ($n[i]$ – это количество дробей вида $\frac{q}{q}$ в i–ой скобке)

```
begin t:=p div q; r:=p mod q; fl[1]:=q; fr[1]:=r; n[1]:=t; for i:=2
   to q do begin fl[i]:=q-fr[i]; fr[i]:=r-fl[i]; if (fr[i]<0) then begin
   fr[i]:=fr[i]+q; n[i]:=t-1 end else n[i]:=t end end.
```

Если известен ряд чисел fl_i, fr_i, n_i, то значения на решетку q пересчитываются по формулам (индексы jsиje вычисляются по n_i)

$$f = fl_i * z_{js} + q * \sum_{j=js+1}^{j=je-1} z_j + fr_i * z_{je}, h = f\ div\ p, g = f\ mod\ p$$

$$a_i = h, \text{если } 2g - t < 0, \quad a_i = h + 1, \text{если } 2g - t \geq 0$$

Обобщение на многомерный случай элементарно.

Автор признателен коллегам с кафедры прикладной математики СыктГУ за полезные замечания.

Литература

1. **Bresenham J. E.** Algorithm for Computer Control of a Digital Plotter// *IBM System Journal, Vol.4, pp.21–30, 1965.*

Summary

Ezovskih V. E. Fast algorithm for transformation of lattices

The problem of digital information transform between lattices with different size of cells is often considered in many applications–computer graphics, interpolation and so on. The fast algorithm of such a transform is described in one important case. The values at lattices nodes are to be integers.

Сыктывкарский университет *Поступила 25.01.01*