Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1.Вып.4.2001

УДК 539.3

К ВОПРОСУ ОБ ИЗГИБЕ МЯГКОГИБКИХ ОБОЛОЧЕК

Е.И.Михайловский, А.В.Ермоленко

Введение

Двадцать лет назад специально для расчета оболочек из резиноподобных (несжимаемых и малосжимаемых) материалов К.Ф.Черныхом была предложена нелинейная теория оболочек [1], в которой сохранялись все допущения Кирхгофа кроме предполагающего неизменность толщины оболочки. Изменение толщины при деформировании оболочки принято называть "поперечным обжатием". Таким образом, главная особенность построенной К.Ф.Черныхом рабочей квазикирхгофовской теории оболочек заключается в учете поперечного обжатия, которое для резиноподобных материалов может оказаться многократным. В этой теории принималось допущение, что материальная точка, положение которой до деформации определяется формулой

$$\mathring{\mathbf{R}}(\alpha,\xi)=\mathring{\mathbf{r}}(\alpha)+\xi\mathring{\mathbf{n}}(\alpha)$$
$$(\alpha\overset{\Delta}{=}(\alpha^1,\alpha^2)\in\mathring{\Omega},\ \xi\in[-{}^1\!/_2\mathring{h},{}^1\!/_2\mathring{h}]),\tag{0.1}$$

после деформации с достаточной степенью точности может быть представлена радиусом-вектором

$$\mathbf{R}(\alpha,\xi)=\mathbf{r}(\alpha)+\lambda_\xi(\alpha)(\xi+{}^1\!/_2\varkappa_\xi(\alpha)\xi^2)\mathbf{n},\tag{0.2}$$

где $\mathring{\mathbf{r}}$, $\mathbf{r}$, $\mathring{\mathbf{n}}$, $\mathbf{n}$ – радиусы-векторы проекции материальной точки на срединную поверхность оболочки и единичные векторы нормалей к срединной поверхности соответственно до и после деформации.

Параметр $\lambda_\xi(\alpha)$ определяет кратность изменения толщины оболочки:

$$h=|\mathbf{R}(\alpha,{}^1\!/_2\mathring{h})-\mathbf{R}(\alpha,-{}^1\!/_2\mathring{h})|=\lambda_\xi\mathring{h},\tag{0.3}$$

а параметр $\varkappa_\xi$ характеризует неравномерность поперечного сжатия (растяжения).

Срединную поверхность оболочки принято представлять формулой

$$\mathbf{r}(\alpha)=\mathring{\mathbf{r}}(\alpha)+\mathbf{u}(\alpha),\tag{0.4}$$

где $\mathbf{u}(\alpha)$ – вектор перемещения соответствующей точки срединной поверхности:

$$\mathbf{u} = u^\alpha \mathring{\mathbf{r}}_\alpha + w\mathring{\mathbf{n}} = u_\alpha \mathring{\mathbf{r}}^\alpha + w\mathring{\mathbf{n}} = u_{<\alpha>}\mathring{\mathbf{e}}_\alpha + w\mathring{\mathbf{n}}.^1 \qquad (0.5)$$

(Через $\mathring{\mathbf{r}}_i$, $\mathring{\mathbf{r}}^j$ обозначаются векторы основного и взаимного поверхностных базисов.)

Принципиальное различие между неизвестными функциями $\lambda_\xi(\alpha)$, $\varkappa_\xi(\alpha)$ и $u_1(\alpha)$, $u_2(\alpha)$, $w(\alpha)$ заключается в том, что функции второй группы имеют независимые вариации, через которые могут быть выражены вариации функций первой группы, т.е. $\delta\lambda_\xi = f_1(\delta u_1, \delta u_2, \delta w)$, $\delta\varkappa_\xi = f_2(\delta u_1, \delta u_2, \delta w)$. Иными словами, в работе [1] функции $\lambda_\xi(\alpha)$, $\varkappa_\xi(\alpha)$ рассматриваются как параметры, учет которых не приводит к увеличению числа уравнений. Этим подход К.Ф.Черныха принципиально отличается от метода построения нелинейных теорий (типа Тимошенко) оболочек, использованного, например, в наиболее часто цитируемых работах [2-4]. В названных работах постулировались аппроксимации вида

$$u_i^\xi(\alpha, \xi) = u_i(\alpha) + \xi\psi_i(\alpha), \;\; w^\xi(\alpha, \xi) = w(\alpha) + \xi\lambda_\xi(\alpha), \qquad (0.6)$$

где независимыми предполагались все шесть вариаций (δu_1, δu_2, $\delta\psi_1$, $\delta\psi_2$, δw, $\delta\lambda_\xi$), т.е. при отсутствии поперечных сдвигов ($\delta\psi_1 = \delta\psi_2 = 0$) появляется еще одно по сравнению с теорией К.Ф.Черныха уравнение в виде приравненного к нулю коэффициента при $\delta\lambda_\xi$ в вариационном уравнении Лагранжа. При этом автор двух последних из цитированных работ, К.З.Галимов, в обзорной статье [5] обратил внимание на несостоятельность использованной им же линейной аппроксимации прогиба по толщине оболочки, так как в случае пренебрежимо малых тангенциальных поворотов (вокруг нормали $\mathring{\mathbf{n}}$) это приводит к неотрицательному изменению толщины ($\lambda_\xi \geq 1$). Если же в (0.6) рассматривать $\lambda_\xi(\alpha)$ как параметр, то указанное противоречие снимается. Однако одного этого параметра недостаточно, например, для удовлетворения главным поверхностным граничным условиям изгибаемой оболочки

$$J\sigma^{33}(\mathring{h}/2) = q_n^+, \;\; J\sigma^{33}(-\mathring{h}/2) = q_n^-. \qquad (0.7)$$

Квазикирхгофовская теория оболочек разрабатывалась К.Ф.Черныхом, исходя из потребности рассчитывать резинотехнические изделия оболочечного типа, но построена как общая для оболочек из сжимаемых и несжимаемых материалов в силу того, что определяющие уравнения выражены через упругий потенциал. Выбирая в качестве последнего, например, потенциал неогуковского несжимаемого материала (NHM), можно построить систему

---

[1]Здесь и ниже суммирование от 1-го до 2-х следует производить по повторяющимся нижнему и верхнему индексам α, β, ν, μ или по двум нижним в случае физических компонент вектора (тензора).

уравнений механики *мягкогибких* оболочек, допускающих конечные упругие деформации. Для получения уравнений механики *жесткогибких* оболочек, допускающих большие перемещения при малых деформациях за счет конечных углов поворота, рекомендуется использовать упругий потенциал стандартного материала второго порядка (STM-2).

При этом непосредственно представленный в работе [1] вариант нелинейной квазикирхгофовской теории оболочек содержит ряд противоречий. Так, в [1] используется формула

$$g_{i3} = {}^1\!/_2\xi\partial\lambda_\xi^2/\partial\alpha^i \stackrel{\Delta}{=} {}^1\!/_2\xi\partial_i\lambda_\xi^2, \tag{0.8}$$

которая при отсутствии поперечных сдвигов приводит к неприемлемому условию $\lambda_\xi = const$.

Далее, предположение о неэргетичности параметров $\lambda_\xi(\alpha)$, $\varkappa_\xi(\alpha)$, понимаемое в названной работе как их неварьируемость (см. [7], стр.179), приводит даже в линейной теории плоских пластин к потере ряда слагаемых, являющихся существенными при рассмотрении, например, контактных задач со свободной границей. Более того, реализованный в работе подход к выводу уравнений статики оболочки из условий равновесия ее бесконечно малого элемента в значительной мере обесценивает заявленный учет параметров λ_ξ, $\varkappa_\xi$, так как их влияние проявляется в основном через работу внешних сил и может быть эффективно учтено лишь при использовании вариационных методов вывода уравнений.

Некоторые противоречия квазикирхгофовской теории устранены в работе [6], где на основе вариационного уравнения Лагранжа построена нелинейная теория жесткогибких оболочек, учитывающая поперечные сдвиги в линейном приближении, что для оболочек названного вида является вполне допустимым. При этом формула (0.8) переходит в следующую:

$$g_{i3} = \psi_i + {}^1\!/_2\xi\partial_i\lambda_\xi^2 \approx \psi_i, \tag{0.9}$$

откуда вовсе не следует, что $\lambda_\xi = const$. Вариации параметров λ_ξ, $\varkappa_\xi$ выражаются через вариации "энергетических аргументов" u_1, u_2, w и учитываются без повышения порядка системы уравнений равновесия.

Для жесткогибких оболочек не возникает сомнений и по поводу как бы обобщающего (0.8) допущения о возможности пренебрегать слагаемыми, содержащими производные функций $\lambda_\xi(\alpha)$, $\varkappa_\xi(\alpha)$.

В данной работе строится в первом приближении теория мягкогибких оболочек с использованием потенциала NHM. Сохраняются все допущения, принятые в работе [6] для жесткогибких оболочек, за исключением допущения о возможности пренебрегать тангенциальными деформациями по сравнению с единицей. При этом вряд ли можно считать безоговорочным для оболочки из резиноподобного материала, например, допущение о возможности учитывать поперечные сдвиги по линейной теории. Однако позволим себе напомнить, что в работе [1] эти сдвиги не учитываются вовсе. Видимо, лишь в первом приближении можно согласиться и с допущениями о линейности изменения по толщине оболочки деформаций и напряжений.

В работе, в частности, показано, что при *средних растяжениях* (квадратами тангенциальных деформаций можно пренебрегать по сравнению с единицей) изгиб мягкогибкой оболочки описывается теми же уравнениями, что и изгиб жесткогибкой.

Используемые обозначения в основном совпадают с принятыми в монографиях [7,8].

§1. Сводка основных уравнений статики жесткогибких оболочек

Приведем с некоторыми уточнениями основные уравнения статики жесткогибкой оболочки, полученные в работе [6].

Предположим, что радиус-вектор материальной точки (0.1) переходит после деформации в следующий (сравни с (0.2)):

$$\mathbf{R}(\alpha,\xi) = \mathbf{r}(\alpha) + \lambda_\xi(\alpha)(\xi + {}^1\!/\!_2\varkappa_\xi\xi^2)\mathbf{n} + \xi\psi_\beta(\alpha)\mathbf{r}^\beta(\alpha). \tag{1.1}$$

При выводе приведенных ниже соотношений использованы допущения:

i) оболочка является тонкой, т.е.

$$\xi b_{<ij>} << 1; \tag{1.2}$$

ii) компоненты тензора деформаций изменяются линейно по толщине оболочки;

iii) производными функций $\lambda_\xi(\alpha)$, $\varkappa_\xi(\alpha)$ можно пренебрегать;

iv) поперечные сдвиги ψ_1, ψ_2 учитываются по линейной теории.

На основании принятых допущений имеют место следующие формулы для компонент тензора деформации Грина-Лагранжа:

$$\gamma^\xi_{ij} = \gamma_{ij} + (\varkappa_{ij} + \mu_{ij})\xi,\ \ \gamma^\xi_{i3} = {}^1\!/\!_2\psi_i,$$
$$\gamma^\xi_{33} = {}^1\!/\!_2(\lambda^2_\xi - 1) + \lambda^2_\xi\varkappa_\xi\xi, \tag{1.3}$$

где

$$\gamma_{ij} = {}^1\!/\!_2(a_{ij} - \mathring{a}_{ij}),\ \ \varkappa_{ij} = -\lambda_\xi b_{ij} + \mathring{b}_{ij},\ \ \mu_{ij} = {}^1\!/\!_2(\mathring{\nabla}_i\psi_j + \mathring{\nabla}_j\psi_i); \tag{1.3'}$$

a_{ij}, b_{ij} — компоненты метрического тензора и тензора кривизны срединной поверхности.

Для описания изгиба жесткогибкой оболочки обычно используют упругий потенциал STM-2. Закон упругости для этого материала имеет вид [7]

$$\{\mathbf{F}^{-1}\cdot J\boldsymbol{\Sigma}\cdot\mathbf{F}^{-1*}\} = 2\mu\boldsymbol{\Gamma} + \lambda I_\Gamma\mathbf{1}$$

($\{\mathbf{F}^{-1}\cdot J\boldsymbol{\Sigma}\cdot\mathbf{F}^{-1*}\}$ — тензор напряжений Пиолы-Кирхгофа; $\mathbf{F}$ — тензор-градиент движения; $\boldsymbol{\Sigma}$ — тензор истинных напряжений Коши; J — якобиан преобразования от лагранжевых координат к эйлеровым; $\boldsymbol{\Gamma}$ — тензор деформации Грина-Лагранжа; I_Γ — первый главный инвариант тензора $\boldsymbol{\Gamma}$; $\mathbf{1}$ — единичный тензор; λ, μ — упругие константы Ламе) или (в терминах компонент соответствующих тензоров с учетом формул $\mathring{g}^{ij}\approx\mathring{a}^{ij}$, $\mathring{a}^{12}=0$, $\mathring{g}^{i3}=0$, $\mathring{g}^{33}=1$)

$$J\sigma^{ij} = (\lambda\mathring{a}^{ij}\mathring{a}^{\alpha\beta} + 2\mu\mathring{a}^{i\alpha}\mathring{a}^{j\beta})\gamma^{\xi}_{\alpha\beta} + \lambda\mathring{a}^{ij}\gamma^{\xi}_{33},$$

$$J\sigma^{33} = \lambda\mathring{a}^{\alpha\beta}\gamma^{\xi}_{\alpha\beta} + (\lambda+2\mu)\gamma^{\xi}_{33},\quad J\sigma^{i3} = 2\mu\mathring{a}^{\alpha i}\gamma^{\xi}_{\alpha 3}. \tag{1.4}$$

На основании (1.3) и (1.4) из условий (0.7) получаем следующие формулы для параметров поперечного обжатия:

$$\lambda^2_\xi = 1 - \frac{2\lambda}{\lambda+2\mu}\mathring{a}^{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta} + \frac{2m_n}{(\lambda+2\mu)\mathring{h}},$$

$$\lambda^2_\xi\varkappa_\xi = -\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\mathring{a}^{\alpha\beta}(\varkappa_{\alpha\beta}+\mu_{\alpha\beta}) + \frac{q_n}{(\lambda+2\mu)\mathring{h}}, \tag{1.5}$$

где

$$q_n = q_n^+ - q_n^-,\quad m_n = {}^1\!/_2(q_n^+ + q_n^-)\mathring{h}. \tag{1.5$'$}$$

Если усилия и моменты ввести с помощью формул

$$S^{ij} = \int_{-\mathring{h}/2}^{\mathring{h}/2}(J\sigma^{ij} - \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}J\sigma^{33}\delta^{ij})d\xi,$$

$$M^{ij} = \lambda_\xi\int_{-\mathring{h}/2}^{\mathring{h}/2}(J\sigma^{ij} - \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}J\sigma^{33}\delta^{ij})\xi d\xi,$$

$$T^i_{\cdot n} = \lambda_\xi\int_{-\mathring{h}/2}^{\mathring{h}/2}J\sigma^{i3}d\xi. \tag{1.6}$$

то на основании соотношений (1.4)–(1.6) определяющие уравнения упругости принимают вид

$$S^{ij} = CA^{ij,\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta},\quad M^{ij}_K = \lambda_\xi DA^{ij,\alpha\beta}\varkappa_{\alpha\beta},$$

$$M_T^{ij} = \lambda_\xi D A^{ij,\alpha\beta}\mu_{\alpha\beta},\ M^{ij} = M_K^{ij} + M_T^{ij},$$
$$T^i_{\cdot n} = \mu h \mathring{a}^{i\alpha}\psi_\alpha, \tag{1.7}$$

где

$$A^{ij,\alpha\beta} = (1-\nu)\mathring{a}^{i\alpha}\mathring{a}^{j\beta} + \nu\mathring{a}^{ij}\mathring{a}^{\alpha\beta},$$
$$C = \frac{E\mathring{h}}{1-\nu^2},\ D = \frac{E\mathring{h}^3}{12(1-\nu^2)} \tag{1.7'}$$

(E, ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала оболочки).

Полагая для упрощения записи, что нагрузка на боковой поверхности оболочки отсутствует, вариационное уравнение Лагранжа можно записать так:

$$\delta U = A(\delta\mathbf{R}), \tag{1.8}$$

где

$$\delta U = \int_{\mathring{\Omega}}\int_{-\mathring{h}/2}^{\mathring{h}/2}\delta\Phi d\xi d\mathring{\Omega},\ A(\delta\mathbf{R}) = \int_\Omega(\mathbf{q}^+\cdot\delta\mathbf{R}^+ - \mathbf{q}^-\cdot\delta\mathbf{R}^-)d\Omega,$$
$$\delta\Phi = J\sigma^{\alpha\beta}\delta\gamma^\xi_{\alpha\beta} + 2J\sigma^{\alpha 3}\delta\gamma^\xi_{\alpha 3} + J\sigma^{33}\delta\gamma^\xi_{33}. \tag{1.8'}$$

Заметим, что уравнение (1.8), вообще говоря, не представляет собой выражение какого-либо вариационного принципа, так как $A(\delta\mathbf{R})$ не является вариацией функционала (что и отражено в обозначении). Это связано, прежде всего, с зависимостью поверхностной нагрузки от перемещений оболочки. Если нагрузка такова, что $A(\delta\mathbf{R})$ является вариацией некоторого функционала, то она (нагрузка) называется *консервативной*, а соответствующий функционал – *потенциалом поверхностной нагрузки*. Консервативной является, в частности, т.н. мертвая нагрузка, например, весовая. Можно показать [9], что при некоторых условиях консервативной нагрузкой является и равномерно распределенное давление.

Вводя обозначения (см. (1.5′))

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}^+ - \mathbf{q}^- = q^\alpha\mathbf{r}_\alpha + q_n\mathbf{n},$$
$$\mathbf{m} = {}^1\!/\!_2(\mathbf{q}^+ + \mathbf{q}^-)\mathring{h} = m^\alpha\mathbf{r}_\alpha + m_n\mathbf{n},$$

получаем

$$\mathbf{q}^+\cdot\delta\mathbf{R}^+ - \mathbf{q}^-\cdot\delta\mathbf{R}^- = \mathbf{q}\cdot\delta\mathbf{r} + {}^1\!/\!_8\mathring{h}^2 q_n\delta(\lambda_\xi\varkappa_\xi) + m_n\delta\lambda_\xi + m^\beta\delta\psi_\beta +$$
$$+ {}^1\!/\!_8\mathring{h}^2\lambda_\xi\varkappa_\xi\mathbf{q}\cdot\delta\mathbf{n} + \psi^\beta\mathbf{m}\cdot\delta\mathbf{r}_\beta + \lambda_\xi\mathbf{m}\cdot\delta\mathbf{n}. \tag{1.9}$$

Здесь

$$\delta\lambda_\xi = -\frac{\nu}{1-\nu}\mathring{a}^{\alpha\beta}\mathbf{r}_\alpha \cdot \delta\mathbf{r}_\beta,$$

$$\delta(\lambda_\xi \varkappa_\xi) = -\frac{\nu}{1-\nu}\mathring{a}^{\alpha\beta}(\delta\varkappa_{\alpha\beta} + \delta\mu_{\alpha\beta}) \approx$$

$$\approx \frac{\nu}{1-\nu}\mathring{a}^{\alpha\beta}[\lambda_\xi \nabla_\alpha(\mathbf{n}\cdot\delta\mathbf{r}_\beta) - \nabla_\alpha \delta\psi_\beta]. \qquad (1.9')$$

Если пренебречь в (1.9) подчеркнутыми слагаемыми, то выражение для работы внешних сил на отвечающих им смещениях в области $\Omega\backslash\partial\Omega$ можно записать так:

$$A(\delta\mathbf{R}) = \int_{\mathring{\Omega}} \{\widetilde{\mathbf{q}}\cdot\delta\mathbf{r} + [h_\lambda^2 \nabla_\alpha(\mathring{a}^{\alpha\beta}q_n) + m^\beta]\delta\psi_\beta\}\sqrt{a}d\alpha^1 d\alpha^2, \qquad (1.10)$$

где

$$\widetilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q} + \frac{h_\lambda^2}{\sqrt{a}}\partial_\alpha[\sqrt{a}\nabla_\beta(\mathring{a}^{\alpha\beta}q_n)\mathbf{n}] + \frac{\nu}{1-\nu}\frac{1}{\sqrt{a}}\partial_\alpha(\sqrt{a}m_n\mathring{a}^{\alpha\beta}\mathbf{r}_\beta),$$

$$h_\lambda^2 = \nu\mathring{h}^2/8(1-\nu), \ a = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{12}, \ \mathring{a} = \mathring{a}_{11}\mathring{a}_{22}. \qquad (1.10')$$

(Здесь и ниже знаком "тильда" помечаем выражения, главными слагаемыми которых являются величины под тильдой в системе обозначений, принятой в монографии [10].)

Окончательно получаем следующую систему уравнений статики жесткогибкой оболочки:

$$\nabla_\alpha(\mathcal{A}\widetilde{T}^{\alpha i}) - b_\beta^i \nabla_\alpha(\mathcal{A}\widetilde{M}^{\alpha\beta}) + q^i = 0,$$

$$\nabla_\alpha\nabla_\beta(\mathcal{A}\widetilde{M}^{\alpha\beta}) + \mathcal{A}\widetilde{T}^{\alpha\beta}b_{\alpha\beta} + q_n = 0,$$

$$\nabla_\alpha(\mathcal{A}\widetilde{M}^{\alpha i}) - \mathcal{A}T^i_{\cdot n} = 0. \qquad (1.11)$$

Здесь

$$\widetilde{M}^{ij} = M^{ij} + h_\lambda^2 \mathcal{A}^{-1}\mathring{a}^{ij}q_n,$$

$$\widetilde{T}^{ij} = T^{ij} + \frac{\nu}{1-\nu}\mathring{a}^{ij}(M^{\alpha\beta}b_{\alpha\beta} + \mathcal{A}^{-1}m_n),$$

$$T^{ij} = S^{ij} - b_\alpha^j M^{\alpha i}, \ \mathcal{A} = \sqrt{\mathring{a}}/\sqrt{a}. \qquad (1.11')$$

Если убрать знаки "тильда" над усилиями и моментами в (1.11), то эти уравнения будут идентичны уравнениям равновесия квазикирхгофовской теории К.Ф.Черныха (11.57) [7], однако следует помнить, что в (1.11′) (см. (1.7))

$$M^{ij} = M_K^{ij} + M_T^{ij}, \ T^i_{\cdot n} = \mu h\mathring{a}^{i\alpha}\psi_\alpha.$$

Статические величины T^{ij}, M^{ij} отличаются от $\widetilde{T}^{ij}$, $\widetilde{M}^{ij}$ наличием в последних дополнительных слагаемых, связанных с варьированием параметров λ_ξ, $\varkappa_\xi$.

Граничное вариационное уравнение, соответствующее (1.8), можно представить в следующем виде:

$$\oint_{\partial\Omega}[Q_{\nu\nu}\delta u_\nu + Q_{\nu t}\delta u_t + Q_{\nu n}\delta w +$$
$$+\mathcal{A}(1+\widetilde{\varepsilon})\widetilde{M}_{\nu\nu}\delta(\vartheta_\nu + \psi_\nu) + \mathcal{A}(1+\widetilde{\varepsilon})\widetilde{M}_{\nu t}\delta(\vartheta_t + \psi_t) -$$
$$-\widetilde{\vartheta}_\nu \widetilde{M}_{\nu\nu}\delta(\frac{du_\nu}{d\mathring{s}_\nu}) - \widetilde{\vartheta}_t \widetilde{M}_{\nu\nu}\delta(\frac{du_t}{d\mathring{s}_\nu})]d\mathring{s}_t = 0. \tag{1.12}$$

Здесь

$$Q_{\nu\nu} = \underline{\widetilde{T}_{\nu\nu} + \mathcal{A}(1+\widetilde{\varepsilon})\mathring{\tau}_t\widetilde{M}_{\nu t}} + \widetilde{T}^{\alpha\beta}\varepsilon_{\beta\gamma}\mathring{\nu}_\alpha\mathring{\nu}^\gamma +$$
$$+\frac{d\widetilde{\vartheta}_\nu\widetilde{M}_{\nu t}}{d\mathring{s}_t} + (\mathring{\rho}_\nu\widetilde{M}_{\nu\nu} - \mathring{\rho}_t\widetilde{M}_{\nu t})\widetilde{\vartheta}_t + \widetilde{\vartheta}_\nu T_{\nu n},$$
$$Q_{\nu t} = \underline{\widetilde{T}_{\nu t} - \mathcal{A}(1+\widetilde{\varepsilon})\mathring{\sigma}_t\widetilde{M}_{\nu t}} + \widetilde{T}^{\alpha\beta}\varepsilon_{\beta\gamma}\mathring{\nu}_\alpha\mathring{t}^\gamma +$$
$$+\frac{d\widetilde{\vartheta}_t\widetilde{M}_{\nu t}}{d\mathring{s}_t} - (\mathring{\rho}_\nu\widetilde{M}_{\nu\nu} - \mathring{\rho}_t\widetilde{M}_{\nu t})\widetilde{\vartheta}_\nu + \widetilde{\vartheta}_t T_{\nu n},$$
$$Q_{\nu n} = \underline{\mathcal{A}(1+\widetilde{\varepsilon})T_{\nu n} + \frac{d\mathcal{A}(1+\widetilde{\varepsilon})\widetilde{M}_{\nu t}}{d\mathring{s}_t}} - \widetilde{\vartheta}_\nu\widetilde{T}_{\nu\nu} - \widetilde{\vartheta}_t\widetilde{T}_{\nu t} +$$
$$+(\mathring{\sigma}_\nu\widetilde{M}_{\nu\nu} - \mathring{\tau}_t\widetilde{M}_{\nu t})\widetilde{\vartheta}_\nu - (\mathring{\tau}_\nu\widetilde{M}_{\nu\nu} - \mathring{\sigma}_\nu\widetilde{M}_{\nu t})\widetilde{\vartheta}_t;$$
$$\widetilde{T}_{\nu\nu} = \widetilde{T}^{\alpha\beta}\mathring{\nu}_\alpha\mathring{\nu}_\beta,\ \widetilde{T}_{\nu t} = \widetilde{T}^{\alpha\beta}\mathring{\nu}_\alpha\mathring{t}_\beta \equiv T_{\nu t},$$
$$\widetilde{M}_{\nu\nu} = \widetilde{M}^{\alpha\beta}\mathring{\nu}_\alpha\mathring{\nu}_\beta,\ \widetilde{M}_{\nu t} = \widetilde{M}^{\alpha\beta}\mathring{\nu}_\alpha\mathring{t}_\beta \equiv M_{\nu t},$$
$$T_{\nu n} = T^{\alpha}_{\cdot n}\mathring{\nu}_\alpha\ (= \mu h\psi_{<\alpha>}\mathring{\nu}_\alpha = \mu h\psi_\nu);$$
$$\mathring{\nu}_1\sqrt{\mathring{a}^{11}} = \mathring{t}_2\sqrt{\mathring{a}^{22}} = \mathring{\nu}^1\sqrt{\mathring{a}_{11}} = \mathring{t}^2\sqrt{\mathring{a}_{22}} = \cos\gamma,$$
$$\mathring{\nu}_2\sqrt{\mathring{a}^{22}} = -\mathring{t}_1\sqrt{\mathring{a}^{11}} = \mathring{\nu}^2\sqrt{\mathring{a}_{22}} = -\mathring{t}^1\sqrt{\mathring{a}_{11}} = \sin\gamma,$$
$$\gamma\ -\ \text{угол между векторами } \mathring{\mathbf{r}}_1 \text{ и } \mathring{\boldsymbol{\nu}}. \tag{1.13}$$

Таким образом, статические граничные величины выражаются через усилия и моменты (1.11′) без каких-либо дополнительных допущений. Подчеркнутые в (1.13) граничные величины отличаются от полученных в работе [7] (см. форм. (11.62)) (кроме того, что в них имеются слагаемые, связанные с варьированием параметров λ_ξ, $\varkappa_\xi$) тем, что отнесены к исходной конфигурации края оболочки. Особенность геометрических граничных величин заключается в том, что (при отсутствии поперечных сдвигов) для точного удовлетворения граничному уравнению Лагранжа следует учитывать шесть независимых вариаций

$$\delta u_\nu,\ \delta u_t,\ \delta w,\ \delta(\frac{\partial u_\nu}{\partial \dot{s}_\nu}),\ \delta(\frac{\partial u_t}{\partial \dot{s}_\nu}),\ \delta(\frac{\partial w}{\partial s_\nu}).$$

К аналогичному результату пришел бы и К.Ф.Черных, если бы представил скалярное произведение $\boldsymbol{\nu}\cdot\delta\mathbf{n}$ (см. [7], форм. (11.43)) в виде линейной комбинации независимых вариаций (подробнее см. в работе [6]).

§2. О применимости теории жесткогибких оболочек к расчету мягкогибких оболочек

Выведем основные уравнения статики мягкогибкой оболочки, т.е. изготовленной из мягкого несжимаемого материала и допускающей конечные упругие деформации.

Ниже используются те же предположения, что и в §1, за исключением предположения ii), которое будем принимать в следующей формулировке:

ii′) компоненты тензоров деформаций и *напряжений* изменяются линейно по толщине оболочки.

(Предположение о линейности напряжений по толщине для оболочки из стандартного материала 2-го порядка излишне, так как связь между деформациями и напряжениями для этого материала линейна.)

При сделанных допущениях кинематические уравнения (1.3), (1.3′) сохраняют свой вид.

Определитель матрицы метрического тензора в актуальной конфигурации можно представить в виде

$$g = \begin{vmatrix} \mathring{a}_{11} + 2\gamma^\xi_{11} & 2\gamma^\xi_{12} & \psi_1 \\ 2\gamma^\xi_{21} & \mathring{a}_{22} + 2\gamma^\xi_{22} & \psi_2 \\ \psi_1 & \psi_2 & \lambda^2_\xi(1 + 2\varkappa_\xi\xi) \end{vmatrix} =$$

$$= \mathring{a}\lambda^2_\xi(1 + 2\varkappa_\xi\xi)(1 + 2\mathring{a}^{\alpha\beta}\gamma^\xi_{\alpha\beta} + 2\mathring{c}^{\alpha\nu}\mathring{c}^{\beta\mu}\gamma^\xi_{\alpha\beta}\gamma^\xi_{\nu\mu}). \qquad (2.1)$$

Здесь учтено, что [7]

$$\mathring{c}^{ik}\mathring{c}^{jl} = \mathring{a}^{ij}\mathring{a}^{kl} - \mathring{a}^{ik}\mathring{a}^{jl},\ \mathring{a}^{ii} = \mathring{a}^{-1}_{ii},\ \mathring{a}^{12} = \mathring{a}^{21} = 0,$$

откуда следует формула

$$\begin{vmatrix} \gamma_{11}^{\xi} & \gamma_{12}^{\xi} \\ \gamma_{21}^{\xi} & \gamma_{22}^{\xi} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\mathring{a}\mathring{c}^{\alpha\nu}\mathring{c}^{\beta\mu}\gamma_{\alpha\beta}^{\xi}\gamma_{\nu\mu}^{\xi}. \tag{2.2}$$

Принимая во внимание, что для несжимаемого материала выполняется условие (см. (1.2))

$$J = \frac{dV}{d\mathring{V}} = \sqrt{\frac{g}{\mathring{g}}} = 1 \approx \sqrt{\frac{g}{\mathring{a}}}, \tag{2.3}$$

на основании (2.1) имеем

$$\lambda_{\xi}^{-2}\varkappa_{\xi} = -d^{\alpha\beta}(\varkappa_{\alpha\beta} + \mu_{\alpha\beta}),$$

$$\lambda_{\xi}^{2} = [1 + (\mathring{a}^{\alpha\beta} + d^{\alpha\beta})\gamma_{\alpha\beta}]^{-1}, \tag{2.4}$$

где

$$d^{\alpha\beta} = \mathring{a}^{\alpha\beta} + 2\mathring{c}^{\alpha\nu}\mathring{c}^{\beta\mu}\gamma_{\nu\mu}. \tag{2.4$'$}$$

Из (2.4) можно получить следующие приближенные формулы для вариаций параметров поперечного обжатия (сравни с (1.9′)):

$$\delta\lambda_{\xi} \approx -d^{\alpha\beta}\mathbf{r}_{\alpha}\cdot\delta\mathbf{r}_{\beta},\ \delta(\lambda_{\xi}\varkappa_{\xi}) \approx -\mathring{a}^{\alpha\beta}(\delta\varkappa_{\alpha\beta} + \delta\mu_{\alpha\beta}). \tag{2.5}$$

Преобразуем формулу $(2.5)_2$. С учетом $(2.5)_1$ из (1.3′) находим

$$\delta\varkappa_{\alpha\beta} = -\lambda_{\xi}\delta b_{\alpha\beta} + d^{\nu\mu}b_{\alpha\beta}\mathbf{r}_{\nu}\cdot\delta\mathbf{r}_{\mu}. \tag{2.6}$$

Далее, используя формулы ковариантного дифференцирования, получаем

$$\nabla_{\alpha}\delta\mathbf{r}_{\beta} = \delta(\partial_{\alpha}\mathbf{r}_{\beta}) - \Gamma_{\alpha\beta}^{\nu}\delta\mathbf{r}_{\nu} = \delta(\Gamma_{\alpha\beta}^{\nu}\mathbf{r}_{\beta}) +$$
$$+\delta(b_{\alpha\beta}\mathbf{n}) - \Gamma_{\alpha\beta}^{\nu}\delta\mathbf{r}_{\nu} = \delta(b_{\alpha\beta}\mathbf{n}) + \mathbf{r}_{\nu}\delta\Gamma_{\alpha\beta}^{\nu}. \tag{2.7}$$

На основании (2.7) справедливо равенство

$$\nabla_{\alpha}(\mathbf{n}\cdot\delta\mathbf{r}_{\beta}) = \delta\mathbf{r}_{\beta}\cdot\nabla_{\alpha}\mathbf{n} + \mathbf{n}\cdot\nabla_{\alpha}\delta\mathbf{r}_{\beta} =$$
$$= -b_{\alpha}^{\nu}\mathbf{r}_{\nu}\cdot\delta\mathbf{r}_{\beta} + \delta b_{\alpha\beta}. \tag{2.8}$$

Объединив равенства (2.6) и (2.8), придем к формуле

$$\delta\varkappa_{\alpha\beta} = -\lambda_{\xi}\nabla_{\alpha}(\mathbf{n}\cdot\delta\mathbf{r}_{\beta}) - \lambda_{\xi}b_{\alpha}^{\nu}\mathbf{r}_{\nu}\cdot\delta\mathbf{r}_{\beta} + b_{\alpha\beta}d^{\nu\mu}\mathbf{r}_{\nu}\cdot\delta\mathbf{r}_{\mu}. \tag{2.9}$$

Учитывая, что сдвиги определяются по линейной теории, можно принять

$$\delta\mu_{\alpha\beta} = {}^{1\!}/_{2}(\nabla_{\alpha}\delta\psi_{\beta} + \nabla_{\beta}\delta\psi_{\alpha}). \tag{2.10}$$

Окончательно на основании соотношений $(2.5)_1$ – (2.10) будем использовать следующую приближенную формулу:

$$\delta(\lambda_\xi \varkappa_\xi) \approx \mathring{a}^{\alpha\beta}[\lambda_\xi \nabla_\alpha(\mathbf{n}\cdot\delta\mathbf{r}_\beta) - \nabla_\alpha \delta\psi_\beta]. \tag{2.11}$$

(Очевидно, что формула (2.11) совпадает с формулой $(1.9')_2$, если в последней положить $\nu = 1/2$.)

Из (2.1) получаем следующие формулы для характерных производных:

$$\frac{\partial g}{\partial g_{11}} = \mathring{a}_{22}\lambda_\xi^2(1 + 2\mathring{a}^{22}\gamma_{22}^\xi)(1 + 2\varkappa_\xi \xi),$$

$$\frac{\partial g}{\partial g_{12}} = -2\lambda_\xi^2\gamma_{11}^\xi(1 + 2\varkappa_\xi\xi), \quad \frac{\partial g}{\partial g_{13}} = -\mathring{a}_{22}\psi_1,$$

$$\frac{\partial g}{\partial g_{33}} = \mathring{a}(1 + 2\mathring{a}^{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta}^\xi + 2\mathring{c}^{\alpha\nu}\mathring{c}^{\beta\mu}\gamma_{\alpha\beta}^\xi\gamma_{\nu\mu}^\xi). \tag{2.12}$$

На основании формулы (см., например, [7])

$$g^{ij} = \frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial g_{ij}} \tag{2.13}$$

находим

$$g^{11} = \mathring{a}^{11}(1 + 2\mathring{a}^{22}\gamma_{22}^\xi)g_{33}, \quad g^{22} = (1 \rightleftharpoons 2)g^{11},$$

$$g^{12} = -2\mathring{a}^{11}\mathring{a}^{22}\gamma_{21}^\xi g_{33}, \quad g^{i3} = -\mathring{a}^{i\alpha}\psi_\alpha, \quad g^{33} = g_{33}^{-1}, \tag{2.14}$$

где

$$g^{33} = 1 + 2\mathring{a}^{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta}^\xi + 2\mathring{c}^{\alpha\nu}\mathring{c}^{\beta\mu}\gamma_{\alpha\beta}^\xi\gamma_{\nu\mu}^\xi. \tag{2.14'}$$

Закон упругости для неогуковского материала имеет вид [8]

$$\{\mathbf{F}^{-1}\cdot J\boldsymbol{\Sigma}\cdot\mathbf{F}^{-1*}\} = \mu\mathbf{1} - p\mathring{\boldsymbol{\Lambda}}^{-2}$$

или

$$\sigma^{ij} = \mu\mathring{g}^{ij} - pg^{ij}, \tag{2.15}$$

где p – всестороннее давление, с точностью до которого определяется тензор напряжений в случае несжимаемого материала.

(Впредь для удобства сравнения некоторых уравнений за константами μ, C, D, h_λ^2 сохраняем те же обозначения, что и для сжимаемого материала, т.е.

$$\mu = {}^1\!/_3 E, \ C = {}^4\!/_3 E\mathring{h}, \ D = {}^1\!/_9 E\mathring{h}^3, \ h_\lambda^2 = {}^1\!/_8 \lambda_\xi \mathring{h}^2.)$$

Учитывая статические граничные условия на лицевых поверхностях (0.7) и линейность изменения напряжений по толщине оболочки, можно записать (см. (1.5′))

$$\sigma^{33} = \mathring{h}^{-1}(m_n + \xi q_n). \tag{2.16}$$

На основании соотношений (2.14)–(2.16) имеем

$$p = [\mu + \underline{\mathring{h}^{-1}(m_n + \xi q_n)}]g_{33} \approx \mu g_{33}. \tag{2.17}$$

Пренебрежение подчеркнутым в (2.17) слагаемым эквивалентно принятию статической гипотезы Кирхгофа в "жесткой" форме

$$\sigma^{33} = 0. \tag{2.18}$$

Допущение (2.18) ниже предполагаем выполненным при рассмотрении внутренней энергии деформации. Что же касается работы внешних сил, то для ее вычисления будем использовать формулу (2.16).

Окончательно приходим к следующим уравнениям упругости для оболочки из несжимаемого материала:

$$\sigma^{11} = \mu\mathring{a}^{11}[1 - (1 + 2\mathring{a}^{22}\gamma^{\xi}_{22})g^2_{33}],\ \sigma^{22} = (1 \rightleftharpoons 2)\sigma^{11},$$

$$\sigma^{12} = 2\mu\mathring{a}^{11}\mathring{a}^{22}\gamma^{\xi}_{21}g^2_{33},\ \sigma^{i3} = \mu\mathring{a}^{i\beta}\psi_\beta. \tag{2.19}$$

Усилия и моменты вводим по формулам (1.6) с учетом (2.18). В силу допущения ii′) принимаем

$$\sigma^{ij} = \sigma^{ij}_0 + \sigma^{ij}_1\xi. \tag{2.20}$$

После выполнения элементарных, но достаточно громоздких выкладок с использованием формул (1.6), (2.18)–(2.20), получаем

$$S^{11} = \frac{1}{4}C\mathring{a}^{11}\left(1 - \frac{1 + 2\mathring{a}^{22}\gamma_{22}}{(g^{33}_0)^2}\right),\ S^{22} = (1 \rightleftharpoons 2)S^{11},$$

$$S^{12} = \frac{C\mathring{a}^{11}\mathring{a}^{22}}{2(g^{33}_0)^2}\gamma_{12}; \tag{2.21$_1$}$$

$$M^{11} = \frac{\lambda_\xi D\mathring{a}^{11}}{2(g^{33}_0)^3}[2(1 + 2\mathring{a}^{22}\gamma_{22})d^{\alpha\beta}(\varkappa_{\alpha\beta} + \mu_{\alpha\beta}) -$$

$$-\mathring{a}^{22}g^{33}_0(\varkappa_{22} + \mu_{22})],\ M^{22} = (1 \rightleftharpoons 2)M^{11},$$

$$M^{12} = \frac{\lambda_\xi D\mathring{a}^{11}\mathring{a}^{22}}{2(g^{33}_0)^3}[g^{33}_0(\varkappa_{12} + \mu_{12}) - 4\gamma_{12}d^{\alpha\beta}(\varkappa_{\alpha\beta} + \mu_{\alpha\beta})]; \tag{2.21$_2$}$$

$$T^{i}_{\cdot n} = \lambda_\xi \mathring{h}\mu \mathring{a}^{i\beta}\psi_\beta, \tag{2.21$_3$}$$

где

$$g_0^{33} = 1 + (\mathring{a}^{\alpha\beta} + d^{\alpha\beta})\gamma_{\alpha\beta}. \tag{2.21$'$}$$

Пренебрегая в формулах $(2.21)_1$, $(2.21)_2$ квадратами тангенциальных деформаций по сравнению с единицей, придем к уравнениям упругости (1.7), (1.7$'$) при условии $\nu = 1/2$.

Учитывая, что (при $\nu = 1/2$) формула для вариации $\delta(\lambda_\xi \varkappa_\xi)$ сохраняет вид $(1.9')_2$, а формула для $\delta\lambda_\xi$ отличается от $(1.9')_1$ лишь заменой множителя $\mathring{a}^{\alpha\beta}$ на $d^{\alpha\beta}$, уравнения (1.11) и формулы для граничных величин (1.13) не изменяются. Однако при этом формулу $(1.11')_2$, строго говоря, следует принимать в виде

$$\widetilde{T}_{ij} = T^{ij} + \mathring{a}^{ij}M^{\alpha\beta}b_{\alpha\beta} + A^{-1}d^{ij}m_n, \tag{2.22}$$

хотя учитывая, что нагрузку m_n обычно вообще не принимают во внимание, внесенные в эту формулу изменения вряд ли могут оказаться существенными, за исключением разве что контактных задач.

Таким образом, изгиб мягкогибкой оболочки (NHM) *при средних растяжениях* (квадраты тангенциальных деформаций малы по сравнению с единицей) описываются теми же уравнениями, что и изгиб жесткогибкой оболочки (STM-2).

Литература

1. **Черных К.Ф.** Нелинейная теория изотропных упругих тонких оболочек // *Изв. АН СССР. МТТ. 1980. №2. С.148-159.*

2. **Айнола Л.Я.** Нелинейная теория типа Тимошеко для упругих оболочек // *Изв. АН Эст.ССР. Сер. физ.-мат. и техн. наук. 1965. Т.14. №3.* С.337-344.

3. **Галимов К.З.** Нелинейная теория оболочек типа Тимошенко // *Исслед. по теории пластин и оболочек. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1975. Вып.11. С.92-126.*

4. **Галимов К.З.** К нелинейной теории тонких оболочек типа Тимошенко // *Изв. АН СССР. МТТ. 1976. №4. С.156-166.*

5. **Галимов К.З.** О некоторых направлениях развития механики деформированного тела в Казани // *Исслед. по теории пластин и оболочек. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1976. Вып.12. С.3-26.*

6. **Михайловский Е.И.** Игнорирование гипотез Кирхгофа в нелинейной теории жесткогибких оболочек // *Нелинейные проблемы механики и физики деформируемого твердого тела / Сб. трудов научной школы акад. В.В.Новожилова. СПб. 2000. Вып.2. С.131-160. (ISBN 5-7997-0205-0)*

7. **Черных К.Ф.** Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Л.:Машиностроение, 1986. 336 с.

8. **Михайловский Е.И. Торопов А.В.** Математические модели теории упругости. Сыктывкар: Сыктывкарский ун-т, 1995. 251 с.

9. **Зубов Л.М.** Методы нелинейной теории упругости в теории оболочек. Ростов-на-Дону: Изд-во Ростов. ун-та, 1982. 144 с.

10. **Новожилов В.В., Черных К.Ф., Михайловский Е.И.** Линейная теория тонких оболочек. Л.: Политехника, 1991. 656 с.

Summary

Mikhailovskii E.I., Ermolenko A.V. On the question of soft-flexible shells bending

A nonlinear theory of hard-flexible shells (i.e. shells made of hard compressible material) is given not using the Kirchhoff hypotheses. Some of the transversal deformations can be described by parameters expressible in terms of energy variables. This allows to obtain a compact system of equations, no more complicated that the one based on Kirchhoff hypotheses. It is shown that the same system of equations adequately describes the bending of soft-flexible shells (i.e. made of soft incompressible material) with medium stretchings (when it is possible to disregard the squares of tangential deformations as compared with 1). Using variational Lagrange equation, the full set of geometric boundary values is given. This set, consisting of boundary displacements and their derivations along tangential normal to boundary contour.

Сыктывкарский университет *Поступила 30.09.2000*