Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1.Вып.4.2001

УДК 523.5

Групповой анализ и инвариантные решения уравнений Ка́рмана

О.Г.Карманов

Методами группового анализа исследуется система уравнений Ка́рмана изгиба пластин. Выписывается базис алгебры симметрий системы. Строится оптимальная система подалгебр алгебры симметрий, приводятся решения системы уравнений, инвариантные относительно группы преобразований, порождаемой данной алгеброй.

1. Введение

Уравнения Ка́рмана изгиба пластин имеют следующий вид [1]:

$$D\Delta^2 w = q_n + L(\Psi, w), \qquad (1.1)_1$$

$$\frac{1}{Eh}\Delta^2\Psi = -\frac{1}{2}L(w, w), \qquad (1.1)_2$$

где Δ^2 — бигармонический оператор, $L(u,\varphi) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$, $\Psi(x,y)$ — функция напряжения, $w(x,y)$ — прогиб, q_n — поперечная нагрузка.

Система уравнений $(1.1)_1$ – $(1.1)_2$ описывает процесс изгиба гибких пластин большого прогиба, что представляет собой наиболее общий случай. В силу громоздкости числовых выкладок, связанных с решением системы, на данный момент получено относительно небольшое число доведенных до конца решений в области теории этих пластин.

В связи с этим возникла идея использовать аппарат группового анализа для изучения свойств данной системы и получения на основе этих свойств каких-либо решений. Суть подхода заключается в том, что если известна группа симметрий системы дифференциальных уравнений, то можно попытаться отыскать какие-либо точные частные решения данной системы, которые называются инвариантными решениями.

Алгоритм построения группы симметрий системы дифференциальных уравнений подробно изложен в [2, 4] и состоит в отыскании инфинитезимальных образующих группы. Образующие группы симметрий ищутся в виде

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{p} \xi^i(x,u)\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{q} \varphi_\alpha(x,u)\frac{\partial}{\partial \varphi^\alpha}$$

и определяются из условия инвариантности:

Пусть $\Delta_\nu(x, u^{(n)})$, $\nu = 1, \ldots, l$ — система дифференциальных уравнений (здесь x — вектор, представляющий независимые переменные, $u^{(n)}$ — вектор, представляющий зависимые переменные и их всевозможные производные до порядка n включительно). Группа преобразований G, действующая на пространстве независимых и зависимых переменных, в которых записана исходная система, является группой симметрий системы, если для каждой инфинитезимальной образующей $\mathbf{v}$ группы G

$$\mathbf{pr}^{(n)}\mathbf{v}\left[\Delta_\nu(x, u^{(n)})\right] = 0, \quad \nu = 1, \ldots, l \tag{1.2}$$

на решениях системы. (Здесь $\mathbf{pr}^{(n)}\mathbf{v}$ — так называемое n-е продолжение образующей $\mathbf{v}$, вычисляемое по формулам Ли [4].)

Из условия инвариантности (1.2) получаем систему линейных дифференциальных уравнений для определения функций $\xi^i(x,u)$, $\varphi^\alpha(x,u)$. Однако алгоритм Ли вычисления образующих группы, несложный в применении к уравнениям невысоких порядков, содержащих небольшое число независимых и зависимых переменных, приводит к чрезвычайно громоздким выкладкам при увеличении как порядка уравнений, так и числа переменных, и в случае системы Ка́рмана вряд ли может быть реализован вручную. Использование системы символьных вычислений Maple V Release 4 существенно упростило решение поставленной задачи.

2. Вычисление группы симметрий

В случае системы уравнений Ка́рмана образующие группы симметрий ищутся в виде

$$\mathbf{v} = X(x,y,w,\Psi)\frac{\partial}{\partial x} + Y(x,y,w,\Psi)\frac{\partial}{\partial y} + W(x,y,w,\Psi)\frac{\partial}{\partial w} + \Phi(x,y,w,\Psi)\frac{\partial}{\partial \Psi},$$

где $X(x, y, w, \Psi)$, $Y(x, y, w, \Psi)$, $W(x, y, w, \Psi)$, $\Phi(x, y, w, \Psi)$ — функции, подлежащие определению.

Продолжение $\mathbf{pr}^{(n)}\mathbf{v}$ образующей $\mathbf{v}$ имеет вид

$$\mathbf{pr}^{(n)}\mathbf{v} = \mathbf{v} + \cdots + W^{xx}\frac{\partial}{\partial w_{xx}} + W^{xy}\frac{\partial}{\partial w_{xy}} + W^{yy}\frac{\partial}{\partial w_{yy}} + \cdots +$$

$$+W^{xxxx}\frac{\partial}{\partial w_{xxxx}} + W^{xxyy}\frac{\partial}{\partial w_{xxyy}} + W^{yyyy}\frac{\partial}{\partial w_{yyyy}} + \cdots +$$

$$+\Phi^{xx}\frac{\partial}{\partial \Psi_{xx}} + \Phi^{xy}\frac{\partial}{\partial \Psi_{xy}} + \Phi^{yy}\frac{\partial}{\partial \Psi_{yy}} + \cdots +$$

$$+\Phi^{xxxx}\frac{\partial}{\partial \Psi_{xxxx}} + \Phi^{xxyy}\frac{\partial}{\partial \Psi_{xxyy}} + \Phi^{yyyy}\frac{\partial}{\partial \Psi_{yyyy}},$$

где многоточием обозначены слагаемые, не входящие в запись условия инвариантности (1.2). Функции W^{xx}, W^{xy}, W^{yy},Φ^{xx}, Φ^{xy}, Φ^{yy}, W^{xxxx}, W^{xxyy}, W^{yyyy}, Φ^{xxxx}, Φ^{xxyy}, Φ^{yyyy} вычисляются по формулам продолжения.

Условие инвариантности применительно к данной задаче имеет следующий вид

$$D\left(W^{xxxx} + 2W^{xxyy} + W^{yyyy}\right) = X \cdot (q_n)_x + Y \cdot (q_n)_y + \Phi^{xx} w_{yy} + W^{yy}\Psi_{xx} -$$

$$-2\Phi^{xy} w_{xy} - 2W^{xy}\Psi_{xy} + \Phi^{yy} w_{xx} + W^{xx}\Psi_{yy}, \qquad (2.1)_1$$

$$\frac{1}{Eh}\left(\Phi^{xxxx} + 2\Phi^{xxyy} + \Phi^{yyyy}\right) = 2W^{xy} w_{xy} - W^{xx} w_{yy} - W^{yy} w_{xx} \qquad (2.1)_2$$

на решениях системы $(1.1)_1$ - $(1.1)_2$.

Определение вида функций $X(x, y, w, \Psi)$, $Y(x, y, w, \Psi)$, $W(x, y, w, \Psi)$, $\Phi(x, y, w, \Psi)$ проводится поэтапно. На каждом шаге уравнения $(2.1)_1$ – $(2.1)_2$ расщепляются на переопределенную систему большого числа линейных уравнений в частных производных относительно функций $X(x, y, w, \Psi)$, $Y(x, y, w, \Psi)$, $W(x, y, w, \Psi)$, $\Phi(x, y, w, \Psi)$. Исследуя наиболее простые уравнения полученной системы, выясняем свойства искомых функций (независимость от одной или более переменных и т.п.). Затем условие инвариантности $(2.1)_1$ – $(2.1)_2$ выписывается заново с учетом сделанных уточнений. Процесс продолжается до тех пор, пока не будет определен явный вид функций $X(x, y, w, \Psi)$, $Y(x, y, w, \Psi)$, $W(x, y, w, \Psi)$, $\Phi(x, y, w, \Psi)$, либо дальнейшая конкретизация невозможна.

Применение алгоритма Ли [2, 4] с использованием возможностей системы символьных вычислений Maple V Release 4 дает следующий результат:

Если $q_n = q_n(x,y)$ — произвольная функция своих аргументов, то система $(1.1)_1$ – $(1.1)_2$ допускает шестимерную алгебру L_6 инфинитезимальных операторов с базисом $\mathbf{v}_4 = x\frac{\partial}{\partial w}$, $\mathbf{v}_5 = y\frac{\partial}{\partial w}$, $\mathbf{v}_6 = \frac{\partial}{\partial w}$, $\mathbf{v}_7 = x\frac{\partial}{\partial \Psi}$, $\mathbf{v}_8 = y\frac{\partial}{\partial \Psi}$, $\mathbf{v}_9 = \frac{\partial}{\partial \Psi}$. Образующие $\mathbf{v}_6$ и $\mathbf{v}_9$ порождают группы сдвигов вдоль координатных осей w и Ψ соответственно. Образующие $\mathbf{v}_4$, $\mathbf{v}_5$ и $\mathbf{v}_7$, $\mathbf{v}_8$ порождают действие группы галилеевых переносов вдоль осей w и Ψ соответственно.

Групповая классификация [2] системы $(1.1)_1$ – $(1.1)_2$ по функции q_n приводит к следующему результату. Расширение алгебры L_6 происходит только при таких специализациях q_n:

1. $q_n = q_n(y)$; дополнительный базисный оператор $\mathbf{v}_1 = \frac{\partial}{\partial x}$ (сдвиг вдоль оси x);
2. $q_n = q_n(x)$; дополнительный базисный оператор $\mathbf{v}_2 = \frac{\partial}{\partial y}$ (сдвиг вдоль оси y);
3. $q_n = q_n(x^2 + y^2)$; дополнительный базисный оператор $\mathbf{v}_3 = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$ (вращение в плоскости xy);
4. $q_n = const$; дополнительные базисные операторы $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$.

Как видно, наиболее широкая группа симметрий системы $(1.1)_1$ – $(1.1)_2$ получается при $q_n = const$. В этом случае отвечающая данной группе алгебра инфинитезимальных симметрий L_9 порождается базисом операторов $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_9$. В данной работе рассматривался именно этот случай.

3. Построение оптимальной системы подалгебр

Зная группу симметрий системы уравнений, можно понижать порядок уравнений, входящих в систему, получая системы уравнений, более простые для изучения. Решения редуцированных таким образом систем называются инвариантными относительно группы решениями. Однако если подходить к задаче построения инвариантных решений, не изучив предварительно свойств полученной на предыдущем этапе алгебры симметрий системы уравнений, то одни и те же функции могут появиться в качестве инвариантных решений относительно различных подгрупп группы симметрий системы. Для построения неэквивалентных инвариантных решений алгебра симметрий L_9

системы $(1.1)_1$ – $(1.1)_2$ разбивается на одномерные неизоморфные подалгебры, каждой из которых отвечает некоторое инвариантное решение. На практике это осуществляется следующим образом: рассматривается вектор $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_9\mathbf{v}_9$ из линейной оболочки алгебры L_9 и подвергается различным присоединенным преобразованиям [2, 4] так, чтобы обратить в нуль как можно больше коэффициентов a_i. Ключевое наблюдение здесь состоит в том, что функция $\eta(\mathbf{v}) = -24a_3^2$ является инвариантом присоединенного действия, и процесс упрощения вектора $\mathbf{v}$ разбивается на два случая: $a_3 \neq 0$ и $a_3 = 0$. В первом случае это означает, что никакими присоединенными преобразованиями нельзя обратить в нуль коэффициент при $\mathbf{v}_3$.

Рассматривая эти два случая, получаем, что система одномерных неизоморфных подалгебр состоит из следующих операторов:

$$
\begin{gathered}
\mathbf{v}_3, \quad \mathbf{v}_3 + a\mathbf{v}_6, \quad \mathbf{v}_3 + a\mathbf{v}_9, \quad \mathbf{v}_3 + a\mathbf{v}_6 + b\mathbf{v}_9, \\
\mathbf{v}_1, \quad \mathbf{v}_1 + a\mathbf{v}_4 + b\mathbf{v}_5, \quad a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4, \quad a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4 + c\mathbf{v}_7 + d\mathbf{v}_8, \qquad (3.1) \\
\mathbf{v}_1 + a\mathbf{v}_4 + b\mathbf{v}_5 + c\mathbf{v}_7 + d\mathbf{v}_8, \quad a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 + c\mathbf{v}_4 + d\mathbf{v}_5 + \mathbf{v}_7, \quad \mathbf{v}_1,
\end{gathered}
$$

где a, b, c, d — произвольные, не равные нулю постоянные.

4. Редукция и построение инвариантных решений системы Ка́рмана

Для каждого из операторов системы (3.1) ищутся инварианты [4] действия группы, порождаемой данным оператором. Инвариантные функции $\zeta(x)$ ищутся из условия

$$\mathbf{v}(\zeta(x)) = 0,$$

что равносильно решению линейного уравнения в частных производных первого порядка. Исходная система $(1.1)_1$ – $(1.1)_2$ переписывается в терминах инвариантов, при этом одна из независимых переменных исключается, и система уравнений Ка́рмана сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

4.1. Редукция относительно оператора $\mathbf{v}_3 = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$

Инвариантами оператора вращения будут следующие функции

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad v = w, \quad \psi = \Psi.$$

Переписывая систему $(1.1)_1$ – $(1.1)_2$ в терминах инвариантов, где r играет роль новой независимой переменной, а v и ψ — функции от

r, получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$D\left(rv^{IV}+2v'''-\frac{1}{r}v''+\frac{1}{r^2}v'\right)=q_nr+\psi''v'+\psi'v'', \qquad (4.1)_1$$

$$\frac{1}{Eh}\left(r\psi^{IV}+2\psi'''-\frac{1}{r}\psi''+\frac{1}{r^2}\psi'\right)=-v'v''. \qquad (4.1)_2$$

4.2. Редукция относительно оператора $\mathbf{v}_3+a\mathbf{v}_6+b\mathbf{v}_9=y\frac{\partial}{\partial x}-$ $-x\frac{\partial}{\partial y}+a\frac{\partial}{\partial w}+b\frac{\partial}{\partial\Psi}$

Инвариантами оператора будут функции

$$r=\sqrt{x^2+y^2},\quad v=w-a\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x},\quad \psi=\Psi-b\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}.$$

Редуцированная система имеет вид

$$D\left(rv^{IV}+2v'''-\frac{1}{r}v''+\frac{1}{r^2}v'\right)=q_nr-\frac{2ab}{r^3}+\psi''v''+\psi'v'', \qquad (4.2)_1$$

$$\frac{1}{Eh}\left(r\psi^{IV}+2\psi'''-\frac{1}{r}\psi''+\frac{1}{r^2}\psi'\right)=\frac{a^2}{r^3}-v'v''. \qquad (4.2)_2$$

4.3. Редукция относительно оператора $\mathbf{v}_3+a\mathbf{v}_6=y\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial y}+a\frac{\partial}{\partial w}$

Инвариантами оператора будут функции

$$r=\sqrt{x^2+y^2},\quad v=w-a\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x},\quad \psi=\Psi.$$

Редуцированная система имеет вид

$$D\left(rv^{IV}+2v'''-\frac{1}{r}v''+\frac{1}{r^2}v'\right)=q_nr+\psi''v''+\psi'v'', \qquad (4.3)_1$$

$$\frac{1}{Eh}\left(r\psi^{IV}+2\psi'''-\frac{1}{r}\psi''+\frac{1}{r^2}\psi'\right)=\frac{a^2}{r^3}-v'v''. \qquad (4.3)_2$$

4.4. Редукция относительно оператора $\mathrm{v}_3 + a\mathrm{v}_9 = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y} + a\frac{\partial}{\partial \Psi}$

Инварианты

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad v = w, \quad \psi = \Psi - a\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}.$$

Редуцированная система имеет вид

$$D\left(rv^{IV} + 2v''' - \frac{1}{r}v'' + \frac{1}{r^2}v'\right) = q_n r + \psi''v'' + \psi'v'', \qquad (4.4)_1$$

$$\frac{1}{Eh}\left(r\psi^{IV} + 2\psi''' - \frac{1}{r}\psi'' + \frac{1}{r^2}\psi'\right) = -v'v''. \qquad (4.4)_2$$

Из систем (4.1) - (4.4) наиболее общий вид имеет система (4.2). Таким образом, достаточно исследовать только систему (4.2). Используя известное преобразование и понижая порядок каждого из уравнений на единицу, систему (4.2) можно переписать в следующем виде

$$Dr\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right)\right] = \frac{q_n r^2}{2} + \frac{ab}{r^2} + \psi'v',$$

$$\frac{1}{Eh}r\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\psi}{dr}\right)\right] = -\frac{a^2}{2r^2} - \frac{v'^2}{2}.$$

Выполняя замену $v' = \tilde{v}(r)$, $\psi' = \tilde{\psi}(r)$, порядок каждого уравнения в системе можно понизить еще на единицу. К сожалению, возможности дальнейших упрощений на этом исчерпываются.

4.5. Редукция относительно оператора $a\mathrm{v}_1 + b\mathrm{v}_2 + \mathrm{v}_4 = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial w}$

Инварианты оператора

$$r = bx - ay, \quad v = w - \frac{x^2}{2a}, \quad \psi = \Psi.$$

Редуцированная система имеет вид

$$k^2 D v^{IV} = q_n + a\psi'', \qquad (4.5)_1$$

$$\frac{k^2}{Eh}\psi^{IV} = -av'', \qquad (4.5)_2$$

где $k = a^2 + b^2$. Решением редуцированной системы (4.5) будет пара функций

$$v(r) = \left(c_1 e^{\lambda r} + c_2 e^{-\lambda r}\right)\cos\lambda r + \left(c_3 e^{\lambda r} + c_4 e^{-\lambda r}\right)\sin\lambda r + c_5 r + c_6 + \frac{k^2 q_n}{a^2 Eh},$$

$$\psi(r) = \sqrt{DEh}\left(c_2 e^{-\lambda r} - c_1 e^{\lambda r}\right)\sin\lambda r + \sqrt{DEh}\left(c_3 e^{\lambda r} - c_4 e^{-\lambda r}\right)\cos\lambda r -$$
$$-\frac{q_n}{2a}r^2 + c_7 r + c_8,$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_8$ — произвольные постоянные, $\lambda = \sqrt[4]{\frac{a^2 Eh}{4k^4 D}}$.

Таким образом, частным решением системы $(1.1)_1$ – $(1.1)_2$ будут функции

$$w(x,y) = v(bx - ay) + \frac{x^2}{2a},$$
$$\Psi(x,y) = \psi(bx - ay).$$

4.6. Редукция относительно $a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 + c\mathbf{v}_4 + d\mathbf{v}_5 + \mathbf{v}_7 = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y} + (cx + dy)\frac{\partial}{\partial w} + x\frac{\partial}{\partial \Psi}$

Инварианты оператора

$$r = bx - ay, \quad v = w - \frac{(ac + bd)x^2 - 2drx}{2a^2}, \quad \psi = \Psi - \frac{x^2}{2a}.$$

Редуцированная система имеет вид

$$k^2 D v^{IV} = q_n + av'' + (ac + bd)\psi'', \qquad (4.6)_1$$

$$\frac{k^2}{Eh}\psi^{IV} = \frac{d^2}{a^2} - (ac + bd)v'', \qquad (4.6)_2$$

где $k = a^2 + b^2$.

В зависимости от знаков величин a и $\tilde{D} = a^2 - 4DEh(ac + bd)^2$ получаем, что решением системы (4.6) будут функции:

1) $a > 0$, $\tilde{D} > 0$.

$$v(r) = c_1 e^{\lambda_1 r} + c_2 e^{-\lambda_1 r} + c_3 e^{\lambda_2 r} + c_4 e^{-\lambda_2 r} + \bar{v},$$

$$\psi(r) = -\frac{k^2 D}{ac + bd}\left(\lambda_2^2\left(c_1 e^{\lambda_1 r} + c_2 e^{-\lambda_1 r}\right) + \lambda_1^2\left(c_3 e^{\lambda_2 r} + c_4 e^{-\lambda_2 r}\right)\right) + \bar{\psi},$$

где $\lambda_{1,2} = \sqrt{\frac{a \pm \sqrt{\tilde{D}}}{2k^2 D}}$ и здесь и далее в этом разделе

$$\bar{v} = \frac{d^2}{2a^2(ac + bd)}r^2 + c_5 r + c_6 + \frac{k^2(d^2 + aq_n(ac + bd))}{aEh(ac + bd)^3},$$

$$\bar{\psi} = -\frac{d^2 + aq_n(ac + bd)}{2a(ac + bd)^2}r^2 + c_7 r + c_8.$$

2) $a > 0$, $\tilde{D} < 0$ и $a < 0$, $\tilde{D} < 0$.

$$v(r) = \left(c_1 e^{\lambda_1 r} + c_2 e^{-\lambda_1 r}\right)\sin\lambda_2 r + \left(c_3 e^{\lambda_1 r} + c_4 e^{-\lambda_1 r}\right)\cos\lambda_2 r + \bar{v},$$

$$\psi(r) = \frac{2k^2 D\lambda_1\lambda_2}{ac+bd}((c_1 e^{\lambda_1 r} - c_2 e^{-\lambda_1 r})\cos\lambda_2 r - (c_3 e^{\lambda_1 r} - c_4 e^{-\lambda_1 r})\sin\lambda_2 r) -$$
$$-\frac{a}{2(ac+bd)}((c_1 e^{\lambda_1 r} + c_2 e^{-\lambda_1 r})\sin\lambda_2 r + (c_3 e^{\lambda_1 r} + c_4 e^{-\lambda_1 r})\cos\lambda_2 r) + \bar{\psi},$$

где $\lambda_{1,2} = \sqrt{\frac{2\sqrt{DEh(ac+bd)^2}\pm a}{4k^2 D}}$.

3) $a < 0$, $\tilde{D} > 0$.

$$v(r) = c_1\sin\lambda_1 r + c_2\cos\lambda_1 r + c_3\sin\lambda_2 r + c_4\cos\lambda_2 r + \bar{v},$$

$$\psi(r) = \frac{k^2 D}{ac+bd}(\lambda_2^2(c_1\sin\lambda_1 r + c_2\cos\lambda_1 r) + \lambda_1^2(c_3\sin\lambda_2 r + c_4\cos\lambda_2 r)) + \bar{\psi},$$

где $\lambda_{1,2} = \sqrt{\frac{-a\pm\sqrt{\tilde{D}}}{2k^2 D}}$.

4) $a > 0$, $\tilde{D} = 0$.

$$v(r) = (c_1 + c_2 r)e^{\lambda r} + (c_3 + c_4 r)e^{-\lambda r} + \bar{v},$$

$$\psi(r) = -\frac{DEh(ac+bd)}{a}((c_1 + c_2 r)e^{\lambda r} + (c_3 + c_4 r)e^{-\lambda r} - \frac{2}{\lambda}(c_2 e^{\lambda r} - c_4 e^{-\lambda r})) + \bar{\psi},$$

где $\lambda = \sqrt{\frac{a}{2k^2 D}}$.

5) $a < 0$, $\tilde{D} = 0$.

$$v(r) = c_1\cos\lambda r + c_2\sin\lambda r + (c_3\cos\lambda r + c_4\sin\lambda r)r + \bar{v},$$

$$\psi(r) = -\frac{2DEh(ac+bd)}{a}(c_1\cos\lambda r + c_2\sin\lambda r + (c_3\cos\lambda r + c_4\sin\lambda r)r) +$$
$$+\frac{4DEh(ac+bd)}{\lambda a}(c_3\cos\lambda r - c_4\sin\lambda r) + \bar{\psi},$$

где $\lambda = \sqrt{\frac{-a}{2k^2 D}}$.

Таким образом, частное решение системы $(1.1)_1 - (1.1)_2$ имеет вид

$$w(x,y) = v(bx - ay) + \frac{(ac-bd)x^2 + 2adxy}{2a^2},$$

$$\Psi(x,y) = \psi(bx - ay) + \frac{x^2}{2a}.$$

4.7. Редукция относительно $a\mathrm{v}_1 + b\mathrm{v}_2 + \mathrm{v}_4 + c\mathrm{v}_7 + d\mathrm{v}_8 = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial w} + (cx+dy)\frac{\partial}{\partial \Psi}$

Инварианты оператора

$$r = bx - ay, \quad v = w - \frac{x^2}{2a}, \quad \psi = \Psi - \frac{(ac+bd)x^2 - 2drx}{2a^2}.$$

Редуцированная система имеет вид

$$k^2 D v^{IV} = q_n + (ac+bd)v'' + a\psi'', \tag{4.7$_1$}$$

$$\frac{k^2}{Eh}\psi^{IV} = -av'', \tag{4.7$_2$}$$

где $k = a^2 + b^2$.

В зависимости от знаков величин $ac+bd$ и $\tilde{D} = (ac+bd)^2 - 4DEha^2$ имеем, что решением редуцированной системы (4.7) будут функции:

1) $ac+bd > 0$, $\tilde{D} > 0$.

$$v(r) = c_1 e^{\lambda_1 r} + c_2 e^{-\lambda_1 r} + c_3 e^{\lambda_2 r} + c_4 e^{-\lambda_2 r} + \bar{v},$$

$$\psi(r) = -\frac{k^2 D}{a}(\lambda_2^2(c_1 e^{\lambda_1 r} + c_2 e^{-\lambda_1 r}) + \lambda_1^2(c_3 e^{\lambda_2 r} + c_4 e^{-\lambda_2 r})) + \bar{\psi},$$

где $\lambda_{1,2} = \sqrt{\frac{ac+bd\pm\sqrt{\tilde{D}}}{2k^2 D}}$ и здесь и далее в этом разделе

$$\bar{v} = c_5 r + c_6 + \frac{k^2 q_n}{a^2 Eh},$$

$$\bar{\psi} = -\frac{q_n}{2a}r^2 + c_7 r + c_8.$$

2) $ac+bd > 0$, $\tilde{D} < 0$ и $ac+bd < 0$, $\tilde{D} < 0$.

$$v(r) = (c_1 e^{\lambda_1 r} + c_2 e^{-\lambda_1 r})\sin\lambda_2 r + (c_3 e^{\lambda_1 r} + c_4 e^{-\lambda_1 r})\cos\lambda_2 r + \bar{v},$$

$$\psi(r) = \frac{2k^2 D\lambda_1\lambda_2}{a}((c_1 e^{\lambda_1 r} - c_2 e^{-\lambda_1 r})\cos\lambda_2 r - (c_3 e^{\lambda_1 r} - c_4 e^{-\lambda_1 r})\sin\lambda_2 r) -$$
$$- \frac{a}{2(ac+bd)}((c_1 e^{\lambda_1 r} + c_2 e^{-\lambda_1 r})\sin\lambda_2 r + (c_3 e^{\lambda_1 r} + c_4 e^{-\lambda_1 r})\cos\lambda_2 r) + \bar{\psi},$$

где $\lambda_{1,2} = \sqrt{\frac{2\sqrt{DEha^2}\pm(ac+bd)}{4k^2 D}}$.

3) $ac+bd < 0$, $\tilde{D} > 0$.

$$v(r) = c_1\sin\lambda_1 r + c_2\cos\lambda_1 r + c_3\sin\lambda_2 r + c_4\cos\lambda_2 r + \bar{v},$$

$$\psi(r) = \frac{k^2 D}{a}(\lambda_2^2(c_1 \sin \lambda_1 r + c_2 \cos \lambda_1 r) + \lambda_1^2(c_3 \sin \lambda_2 r + c_4 \cos \lambda_2 r)) + \bar{\psi},$$

где $\lambda_{1,2} = \sqrt{\frac{-(ac+bd)\pm\sqrt{\tilde{D}}}{2k^2 D}}$.

4) $ac + bd > 0$, $\tilde{D} = 0$.

$$v(r) = (c_1 + c_2 r)e^{\lambda r} + (c_3 + c_4 r)e^{-\lambda r} + \bar{v},$$

$$\psi(r) = -\frac{2DEha}{ac+bd}((c_1 + c_2 r)e^{\lambda r} + (c_3 + c_4 r)e^{-\lambda r} - \frac{2}{\lambda}(c_2 e^{\lambda r} - c_4 e^{-\lambda r})) + \bar{\psi},$$

где $\lambda = \sqrt{\frac{ac+bd}{2k^2 D}}$.

5) $ac + bd < 0$, $\tilde{D} = 0$.

$$v(r) = c_1 \cos \lambda r + c_2 \sin \lambda r + (c_3 \cos \lambda r + c_4 \sin \lambda r)r + \bar{v},$$

$$\psi(r) = -\frac{2DEha}{ac+bd}(c_1 \cos \lambda r + c_2 \sin \lambda r + (c_3 \cos \lambda r + c_4 \sin \lambda r)r) +$$
$$+ \frac{4DEha}{\lambda(ac+bd)}(c_3 \cos \lambda r - c_4 \sin \lambda r) + \bar{\psi},$$

где $\lambda = \sqrt{\frac{-(ac+bd)}{2k^2 D}}$.

Таким образом, частное решение системы $(1.1)_1$ – $(1.1)_2$ имеет вид

$$w(x,y) = v(bx - ay) + \frac{x^2}{2a},$$

$$\Psi(x,y) = \psi(bx - ay) + \frac{(ac - bd)x^2 + 2adxy}{2a^2}.$$

4.8. Редукция относительно оператора $\mathrm{v}_1 + a\mathrm{v}_4 + b\mathrm{v}_5 = \frac{\partial}{\partial x} + (ax + by)\frac{\partial}{\partial w}$

Инварианты оператора

$$r = y, \quad v = w - \frac{ax^2}{2} - brx, \quad \psi = \Psi.$$

Редуцированная система имеет вид

$$Dv^{IV} = q_n + a\psi'', \tag{4.8$_1$}$$

$$\frac{1}{Eh}\psi^{IV} = b^2 - av''. \tag{4.8$_2$}$$

Решением редуцированной системы (4.8) будет пара функций

$$v(r) = (c_1 e^{\lambda r} + c_2 e^{-\lambda r})\cos\lambda r + (c_3 e^{\lambda r} + c_4 e^{-\lambda r})\sin\lambda r + \frac{b^2}{2a}r^2 + c_5 r + c_6 + \frac{q_n}{a^2 Eh},$$

$$\psi(r) = \sqrt{DEh}(c_2 e^{-\lambda r} - c_1 e^{\lambda r})\sin\lambda r + \sqrt{DEh}(c_3 e^{\lambda r} - c_4 e^{-\lambda r})\cos\lambda r -$$

$$-\frac{q_n}{2a}r^2 + c_7 r + c_8,$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_8$ — произвольные постоянные, $\lambda = \sqrt[4]{\frac{a^2 Eh}{4D}}$.

Таким образом, частное решение системы $(1.1)_1$ - $(1.1)_2$

$$w(x,y) = v(y) + \frac{ax^2}{2} + bxy,$$

$$\Psi(x,y) = \psi(y).$$

4.9. Редукция относительно оператора $\mathbf{v}_1 + a\mathbf{v}_4 + b\mathbf{v}_5 + c\mathbf{v}_7 + d\mathbf{v}_8 = \frac{\partial}{\partial x} + (ax+by)\frac{\partial}{\partial w} + (cx+dy)\frac{\partial}{\partial \Psi}$

Инварианты оператора

$$r = y, \quad v = w - \frac{ax^2}{2} - brx, \quad \psi = \Psi - \frac{cx^2}{2} - drx.$$

Редуцированная система имеет вид

$$Dv^{IV} = q_n + cv'' + a\psi'' - 2bd, \tag{4.9$_1$}$$

$$\frac{1}{Eh}\psi^{IV} = b^2 - av''. \tag{4.9$_2$}$$

Решения редуцированной системы (4.9) в зависимости от знаков величин c и $\tilde{D} = c^2 - 4DEha^2$ имеют следующий вид:

1) $c > 0$, $\tilde{D} > 0$.

$$v(r) = c_1 e^{\lambda_1 r} + c_2 e^{-\lambda_1 r} + c_3 e^{\lambda_2 r} + c_4 e^{-\lambda_2 r} + \bar{v},$$

$$\psi(r) = -\frac{D}{a}(\lambda_2^2(c_1 e^{\lambda_1 r} + c_2 e^{-\lambda_1 r}) + \lambda_1^2(c_3 e^{\lambda_2 r} + c_4 e^{-\lambda_2 r})) + \bar{\psi},$$

где $\lambda_{1,2} = \sqrt{\frac{c \pm \sqrt{\tilde{D}}}{2k^2 D}}$ и здесь и далее в этом пункте

$$\bar{v} = \frac{b^2}{2a}r^2 + c_5 r + c_6 + \frac{b^2 c + a(q_n - 2bd)}{a^3 Eh},$$

$$\bar{\psi} = -\frac{b^c + a(q_n - 2bd)}{2a^2} r^2 + c_7 r + c_8.$$

2) $c > 0$, $\tilde{D} < 0$ и $c < 0$, $\tilde{D} < 0$.

$$v(r) = (c_1 e^{\lambda_1 r} + c_2 e^{-\lambda_1 r}) \sin \lambda_2 r + (c_3 e^{\lambda_1 r} + c_4 e^{-\lambda_1 r}) \cos \lambda_2 r + \bar{v},$$

$$\psi(r) = \frac{2k^2 D \lambda_1 \lambda_2}{a} ((c_1 e^{\lambda_1 r} - c_2 e^{-\lambda_1 r}) \cos \lambda_2 r - (c_3 e^{\lambda_1 r} - c_4 e^{-\lambda_1 r}) \sin \lambda_2 r) -$$

$$- \frac{c}{2a} ((c_1 e^{\lambda_1 r} + c_2 e^{-\lambda_1 r}) \sin \lambda_2 r + (c_3 e^{\lambda_1 r} + c_4 e^{-\lambda_1 r}) \cos \lambda_2 r) + \bar{\psi},$$

где $\lambda_{1,2} = \sqrt{\frac{2\sqrt{DEha^2} \pm c}{4D}}$.

3) $c < 0$, $\tilde{D} > 0$.

$$v(r) = c_1 \sin \lambda_1 r + c_2 \cos \lambda_1 r + c_3 \sin \lambda_2 r + c_4 \cos \lambda_2 r + \bar{v},$$

$$\psi(r) = \frac{D}{a} (\lambda_2^2 (c_1 \sin \lambda_1 r + c_2 \cos \lambda_1 r) + \lambda_1^2 (c_3 \sin \lambda_2 r + c_4 \cos \lambda_2 r)) + \bar{\psi},$$

где $\lambda_{1,2} = \sqrt{\frac{-c \pm \sqrt{\tilde{D}}}{2D}}$.

4) $c > 0$, $\tilde{D} = 0$.

$$v(r) = (c_1 + c_2 r) e^{\lambda r} + (c_3 + c_4 r) e^{-\lambda r} + \bar{v},$$

$$\psi(r) = -\frac{2DEha}{c} ((c_1 + c_2 r) e^{\lambda r} + (c_3 + c_4 r) e^{-\lambda r} - \frac{2}{\lambda} (c_2 e^{\lambda r} - c_4 e^{-\lambda r})) + \bar{\psi},$$

где $\lambda = \sqrt{\frac{c}{2D}}$.

5) $c < 0$, $\tilde{D} = 0$.

$$v(r) = c_1 \cos \lambda r + c_2 \sin \lambda r + (c_3 \cos \lambda r + c_4 \sin \lambda r) r + \bar{v},$$

$$\psi(r) = -\frac{2DEha}{c} (c_1 \cos \lambda r + c_2 \sin \lambda r + (c_3 \cos \lambda r + c_4 \sin \lambda r) r) +$$

$$+ \frac{4DEha}{\lambda c} (c_3 \cos \lambda r - c_4 \sin \lambda r) + \bar{\psi},$$

где $\lambda = \sqrt{\frac{-c}{2D}}$.

Литература

1. **Михайловский Е. И., Торопов А. В.** Математические модели теории упругости. Сыктывкар, 1995. 251 с.

2. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений М.: Наука, 1978. 399 с.

3. **Ибрагимов Н. Х.** Групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений и принцип инвариантности в математической физике// *Успехи матем. наук. 1992. Т. 47. Вып. 4(286). С. 83–144.*

4. **Олвер П.** Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1986. 637 с.

5. **Фущич В. И., Штелень В. М., Серов Н. И.** Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики. Киев: Наук. думка, 1989. 336 с.

Summary

Karmanov O.G. Group analysis and invariant solutions of Carman equations

The Carman system of equations for plate bending is investigated using group analysis. A basis of the algebra of symmetries is found, an optimal system of one-dimentional subalgebras is constructed. Some solutions of the system of equations in question are given, which are invariant under transformations generated by the above algebra.

СыктГУ *Поступила 30.09.2000*